Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 20. Oktober 2008

Thema 1 (Lokalisierungen – Ideale)**.** Beschreiben Sie, wie sich Ideale unter Lokalisierungen verhalten (*Skript*$^{0.2}$*: Proposition 1.2/5, Korollar 1.2/6 und 1.2/7*).

Übungsmaterial.

- Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ prim, und sei $S := \mathbb{Z} - (p_1\mathbb{Z} \cup \dots \cup p_n\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie alle Primideale der Lokalisierung $\mathbb{Z}_S$.
- Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Menge aller Primideale der Lokalisierungen $K[X]_{(X)}$ und $K[X]_X$.
- Sind Lokalisierungen von noetherschen Ringen noethersch?

  Sei K ein Körper. Sind Lokalisierungen von K-Algebren von endlichem Typ auch K-Algebren von endlichem Typ?

Thema 2 (Lokalisierungen – universelle Eigenschaft)**.** Erklären Sie die universelle Eigenschaft von Lokalisierungen und leiten Sie daraus Verträglichkeitsaussagen von iterierten Lokalisierungen ab (*Skript*$^{0.2}$*: Propositionen 1.2/8–1.2/10*).

Übungsmaterial.

- Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $S \subset R$ ein multiplikatives System. Zeigen Sie, dass es bis auf (in einem geeigneten Sinne eindeutige) Isomorphie genau einen Ringhomomorphismus $R \longrightarrow R'$ gibt, der die universelle Eigenschaft der Lokalisierung von R an S besitzt.
- Sei $R = R_1 \times R_2$ ein Produkt von zwei kommutativen Ringen mit Eins. Zeigen Sie, dass R_1 und R_2 Lokalisierungen von R sind.
- Sei S ein System von Morphismen einer Kategorie C. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft einer Lokalisierung von C bezüglich S. (Caveat: Die Existenz solcher Lokalisierungen ist i.a. ein subtiles mengentheoretisches Problem).

  Wie kann man einen Ring in natürlicher Weise als Kategorie auffassen? Zeigen Sie, dass Lokalisierungen von Ringen die universelle Eigenschaft von Lokalisierungen von Kategorien erfüllen.

  Mehr Informationen hierzu finden sich im Buch „An Introduction to Homological Algebra“ von Ch. Weibel (Kapitel 10.3).

Besprechung am 29. Oktober 2008