Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 27. Oktober 2008

Thema 1 (Abgeschlossene Punkte in Spektren)**.** Sei R ein Ring.

1. Zeigen Sie, dass jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ einen abgeschlossenen Punkt enthält.
2. Folgern Sie: Eine offene Menge in $\operatorname{Spec} R$, die alle abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec} R$ enthält, stimmt bereits mit $\operatorname{Spec} R$ überein.

Thema 2 (Die affine Gerade)**.** Sei R ein (nullteilerfreier) Hauptidealring. Im folgenden studieren wir den topologischen Raum $\mathbb{A}^1_R := \operatorname{Spec} R[X]$, die sogenannte *affine Gerade über R*. Die kanonische Inklusion $R \longrightarrow R[X]$ induziert eine stetige Abbildung $\pi\colon \mathbb{A}^1_R \longrightarrow \operatorname{Spec} R$, deren „Fasern“ wir genauer beschreiben wollen:

1. *Die Fasern über abgeschlossenen Punkten:* Zeigen Sie: Ist $x \in \operatorname{Spec} R - \{0\}$, so bildet die von $R[X] \longrightarrow R/\mathfrak{p}_x[X]$ induzierte Abbildung $\mathbb{A}^1_{R/\mathfrak{p}_x} \longrightarrow \mathbb{A}^1_R$ den Raum $\mathbb{A}^1_{R/\mathfrak{p}_x}$ bijektiv auf die Faser $\pi^{-1}(x)$ ab.
2. *Die Faser über dem Nullideal:* Zeigen Sie: Ist $K := Q(R)$ der Quotientenkörper von R, so bildet die von $R[X] \longrightarrow K[X]$ induzierte Abbildung $\mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_R$ den Raum $\mathbb{A}^1_K$ bijektiv auf $\pi^{-1}(0)$ ab.

   Daher wird jedes von Null verschiedene Primideal in $\pi^{-1}(0)$ von einem Polynom der Form $f = c_0 \cdot X^n + c_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + c_n \in R[X]$ erzeugt, wobei $\operatorname{ggT}_R(c_0, \dots, c_n) = 1$ ist und f in $K[X]$ irreduzibel ist.
3. *Elemente von $\mathbb{A}^1_R$:* Schließen Sie daraus, dass alle Primideale von $R[X]$ von der folgenden Form sind:

0	
(p)	für ein Primelement $p \in R$
(p, f)	für ein Primelement $p \in R$ und ein normiertes $f \in R[X]$, dessen Bild in $R/(p)[X]$ irreduzibel ist
(f)	für ein Polynom wie in Teil 2.

   Beschreiben Sie für $x \in \mathbb{A}^1_R$ die Menge $V(\mathfrak{p}_x)$.
4. *Veranschaulichung von $\mathbb{A}^1_R$:* Illustrieren Sie dies in den Fällen $R = \mathbb{Z}$ bzw. $R = K[Y]$, wobei K ein Körper ist; zeichnen Sie insbesondere auch die zugehörigen Bilder (*Mumford: The red book of varieties and schemes* (Examples II.1.E/H), *Hartshorne: Algebraic Geometry* (Example II.2.3.4)).

Bitte wenden

Thema 3 (Neilsche Parabel)**.** Sei K ein Körper und $A := K[X,Y]/(Y^2 - X^3)$, d.h. $\operatorname{Spec} A$ beschreibt die semikubische Parabel „$y^2 = x^3$" in der Ebene K^2.

1. Zeigen Sie, dass die Ringe A und $K[X]$ nicht isomorph sind.

2. Zeigen Sie, dass die topologischen Räume $\operatorname{Spec} A$ und $\operatorname{Spec} K[X]$ homöomorph sind.

   Hinweis. Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $f\colon A \longrightarrow K[X]$, der durch

   $$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow K[X] \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \overline{X} &\longmapsto X^2 \\ \overline{Y} &\longmapsto X^3 \end{aligned}$$

   gegeben ist. Die induzierte Abbildung ${}^af\colon \operatorname{Spec} K[X] \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ ist ein Homöomorphismus:

   – Zeigen Sie, dass ${}^af$ bijektiv ist, indem Sie zeigen, dass die Einschränkung ${}^af|\colon {}^af^{-1}(U) \longrightarrow U$ von ${}^af$ über $U := D_A(\overline{X})$ bijektiv ist.

   – Zeigen Sie, dass die Abbildung ${}^af$ abgeschlossen ist, indem Sie zeigen, dass die Zariski-abgeschlossenen Mengen von $\operatorname{Spec} A$ endlich oder ganz $\operatorname{Spec} A$ sind.

Besprechung am 5. November 2008