Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 3. November 2008

Thema 1 (Lokalisierungen und induktive Limiten)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $x \in \operatorname{Spec}(R)$.

1. Wie bilden die Lokalisierungen R_f mit $f \in R - \mathfrak{p}_x$ in kanonischer Weise ein induktives System?
2. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}_x}$ zum induktiven Limes der Lokalisierungen R_f mit $f \in R - \mathfrak{p}_x$ isomorph ist.

Thema 2 (Die Garbe der holomorphen Funktionen)**.** Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ die Menge aller homolorphen (d.h. komplex analytischen) Funktionen vom Typ $U \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \colon \mathbf{Opn}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{Set}$ zusammen mit den kanonischen Einschränkungsabbildungen eine Garbe (von Ringen) bildet.
2. Zeigen Sie, dass der Halm dieser Garbe in 0 (d.h. der induktive Limes der Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ aller offenen Umgebungen $U \subset \mathbb{C}$ von 0 bezüglich der Restriktionen) kanonisch mit dem Ring

$$\left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{es gibt ein } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \cdot r^n < \infty \right\}$$

identifiziert werden kann; hierbei ist die Ringstruktur auf $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ durch punktweise Addition und die Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j} \right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

gegeben (d.h. wir fassen $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ als Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$ auf).

Hinweis. Eine übersichtliche Einführung in die Theorie der holomorphen Funktionen liefert das Buch „Funktionentheorie“ von K. Jänich.

Bitte wenden

Thema 3 (Vektorraumbündel und Garben). Ein *n-dimensionales (reelles) Vektorraumbündel* über einem topologischen Raum B ist eine stetige Abbildung $\pi\colon E \longrightarrow B$ von topologischen Räumen mit den folgenden Eigenschaften:

– *Die Fasern sind Vektorräume:* Für jedes $b \in B$ ist die *Faser* $\pi^{-1}(b) \subset E$ mit der Struktur eines n-dimensionalen (reellen) Vektorraums versehen.

– *Lokale Trivialität:* Jeder Punkt $b \in B$ besitzt eine Umgebung $U \subset B$, für die es einen Homöomorphismus $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\mathrm{pr}_U \circ \varphi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ und die Einschränkung $\varphi|_{\pi^{-1}(u)}\colon \pi^{-1}(u) \longrightarrow \{u\} \times \mathbb{R}^n$ für jedes $u \in U$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Ist $U \subset B$ eine Teilmenge, so heißt eine Abbildung $s\colon U \longrightarrow E$ ein *Schnitt von π über U*, wenn s stetig ist und $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ erfüllt.

1. Illustrieren Sie die obigen Begriffe am sogenannten *trivialen Geradenbündel* $\mathrm{pr}_{S^1}\colon S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ über $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ und an dem durch das Möbiusband gegebenen Geradenbündel über S^1. Weitere Beispiele von Vektorraumbündeln sind z.B. durch Tangentialbündel von glatten Mannigfaltigkeiten gegeben.

2. Sei $\pi\colon E \longrightarrow B$ ein Vektorraumbündel. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\Gamma_\pi\colon \mathbf{Opn}(B) &\longrightarrow \mathbf{Set}\\ U &\longmapsto \text{Menge der Schnitte von } \pi \text{ über } U\end{aligned}$$

   zusammen mit den kanonischen Einschränkungsabbildungen eine Garbe bildet.

3. Sei $\pi\colon E \longrightarrow B$ ein Vektorraumbündel und sei $C(B, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen vom Typ $B \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\Gamma_\pi(B)$ der globalen Schnitte von π ein $C(B, \mathbb{R})$-Modul ist.

4. Formulieren Sie den Satz von Swan über den genauen Zusammenhang zwischen Vektorraumbündeln über einem zusammenhängenden, kompakten Hausdorffraum B und $C(B, \mathbb{R})$-Moduln, und skizzieren Sie die Beweisidee (*R.G. Swan: Vector bundles and projective modules* (Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), S. 264–277) bzw. *J. Cuntz, R. Meyer, J.M. Rosenberg: Topological and Bivariant K-Theory* (Springer (2007), S. 6f)).

   Verwenden Sie hierbei die Charakterisierung von projektiven Moduln als direkte Summanden von freien Moduln als Definition.

Hinweis. Eine kurze Einführung in Vektorraumbündel finden Sie im Buch „Einführung in die Differentialtopologie“ von Th. Bröcker und K. Jänich.

Besprechung am 12. November 2008