Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 17. November 2008

Thema 1 (Quotienten von Garben)**.** Für einen topologischen Raum X bezeichne C_X die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf X und $\mathbb{R}_X$ die Garbe der lokal-konstanten reellwertigen Funktionen auf X.

1. Zeigen Sie, dass der Prägarbenquotient
$$\begin{aligned} C_{S^1}/\mathbb{R}_{S^1}\colon \mathbf{Opn}(S^1) &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U &\longmapsto C_{S_1}(U)/\mathbb{R}_{S^1}(U) \end{aligned}$$
keine Garbe auf S^1 ist.

2. Sei $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Ist der Prägarbenquotient $C_{D^2}/\mathbb{R}_{D^2}$ eine Garbe auf D^2 ?

3. Ist der Prägarbenquotient $C_{[0,1]}/\mathbb{R}_{[0,1]}$ eine Garbe auf $[0,1]$?

Thema 2 (Adjungierte Funktoren)**.** Seien $F\colon A \longrightarrow B$ und $G\colon B \longrightarrow A$ Funktoren. Der Funktor G ist *rechtsadjungiert* zu F bzw. F ist *linksadjungiert* zu G, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_B\bigl(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,\bigr) \cong \operatorname{Hom}_A\bigl(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,)\bigr)$$

gibt; d.h. für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}(A)$ und $Y \in \operatorname{Ob}(B)$ gibt es einen Isomorphismus $\varphi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_B(F(X),Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,G(Y))$, so dass für alle Morphismen $f \in \operatorname{Hom}_A(X',X)$ und $g \in \operatorname{Hom}_B(Y,Y')$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_B\bigl(F(X),Y\bigr) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}_B(F(f),g)"'] & \operatorname{Hom}_A\bigl(X,G(Y)\bigr) \arrow[d, "\operatorname{Hom}_A(f,G(g))"] \\
\operatorname{Hom}_B\bigl(F(X'),Y'\bigr) \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"'] & \operatorname{Hom}_A\bigl(X',G(Y')\bigr)
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Vergissfunktor $\mathbf{Vect}_K \longrightarrow \mathbf{Set}$ von der Kategorie der K-Vektorräume in die Kategorie der Mengen einen linksadjungierten Funktor besitzt.

2. Zeigen Sie, dass Funktoren, die einen rechtsadjungierten (bzw. linksadjungierten) Funktor besitzen, mit induktiven (bzw. projektiven) Limiten verträglich sind.

3. Besitzt jeder Funktor einen rechts- bzw. linksadjungierten Funktor?

Bitte wenden

Thema 3 (Induzierte Garben). Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Ist F eine Garbe auf X, so definieren wir

$$\begin{aligned} f_*F\colon \mathbf{Opn}(Y) &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ V &\longmapsto F\bigl(f^{-1}(V)\bigr). \end{aligned}$$

Ist G eine Garbe auf Y, so definieren wir $f^{-1}(G)$ als die zu der Prägarbe

$$\begin{aligned} \mathbf{Opn}(X) &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U &\longmapsto \varinjlim_{V \in O(f(U))} G(V), \end{aligned}$$

assoziierte Garbe; hierbei bezeichnet $O(f(U))$ die Menge aller offenen Teilmengen von Y, die $f(U)$ enthalten (aufgefasst als induktives System bezüglich der Inklusion).

1. Zeigen Sie: ist F eine Garbe auf X, so ist f_*F eine Garbe auf Y. Zeigen Sie, dass f_* einen Funktor von der Kategorie der Garben auf X in die Kategorie der Garben auf Y definiert.
2. Zeigen Sie, dass f^{-1} einen Fuktor von der Kategorie der Garben auf Y in die Kategorie der Garben auf X definiert.
3. Sei F eine Garbe auf X, sei $U \subset X$ offen und sei $i\colon U \longrightarrow X$ die Inklusion. Wie hängen die Einschränkung $F|_U$ und die Garbe $i^{-1}F$ zusammen?
4. Sei F eine Garbe auf X und G eine Garbe auf Y. Zeigen Sie, dass es natürliche Garbenmorphismen $f^{-1}f_*F \longrightarrow F$ und $G \longrightarrow f_*f^{-1}G$ gibt; folgern Sie, dass der Funktor f^{-1} zum Funktor f_* linksadjungiert ist (s. Thema 2).

Thema 4 (Fortsetzung einer Garbe durch Null). Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir schreiben $i\colon A \longrightarrow X$ und $j\colon U := X - A \longrightarrow X$ für die zugehörigen Inklusionen.

1. Sei F eine Garbe abelscher Gruppen auf A. Bestimmen Sie die Halme von i_*F.
2. Sei F eine Garbe abelscher Gruppen auf U und sei $j_!F$ die zu der Prägarbe

   $$\begin{aligned} \mathbf{Opn}(X) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ V &\longmapsto \begin{cases} F(V) & \text{falls } V \subset U, \\ 0 & \text{falls } V \not\subset U \end{cases} \end{aligned}$$

   assoziierte Garbe abelscher Gruppen. Bestimmen Sie die Halme der Fortsetzung $j_!F$ und zeigen Sie, dass $j_!F$ die einzige Garbe auf X ist, die diese Halme besitzt und deren Einschränkung auf U mit F übereinstimmt.
3. Sei F eine Garbe auf X. Zeigen Sie, dass es eine kanonische exakte Sequenz von Garben der folgenden Gestalt gibt:

   $$0 \longrightarrow j_!j^{-1}(F) \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^{-1}(F) \longrightarrow 0.$$

Besprechung am 26. November 2008