Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 24. November 2008

Thema 1 (Tensorprodukte). Geben Sie eine prägnante Übersicht über Tensorprodukte von Moduln bzw. Algebren über kommutativen Ringen – konzentrieren Sie sich dabei auf die wesentlichen Ideen; insbesondere sollen nicht alle Rechnungen im Detail vorgeführt werden. (*Atiyah, Macdonald: Introduction to Commutative Algebra* [S. 24–29, S. 39f]; *Eisenbud: Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* [S. 573f, S. 702]).

1. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.
2. Skizzieren Sie die Konstruktion des Tensorprodukts.
3. Nennen Sie die grundlegenden Eigenschaften des Tensorprodukts (Vertauschung der Faktoren, Assoziativität, Tensorieren mit dem Grundring).
4. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei N ein R-Modul. Zeigen Sie, dass der Funktor $\,\cdot\, \otimes_R N$ zum Funktor $\operatorname{Hom}_R(N, \,\cdot\,)$ linksadjungiert ist.
5. Folgern Sie aus der Adjunktionseigenschaft, dass Tensorprodukte mit direkten Summen verträglich sind.
6. Führen Sie linksexakte, rechtsexakte und exakte Funktoren ein und folgern Sie aus der Adjunktionseigenschaft, dass Tensorprodukte rechtsexakt sind.
7. Definieren Sie flache Moduln und geben Sie Beispiele für flache Moduln.
8. Erklären Sie, wie man mit Hilfe von Tensorprodukten Koeffizientenerweiterungen von Moduln definieren kann.
9. Skizzieren Sie, warum Lokalisierungen im folgenden Sinn mit Tensorprodukten verträglich sind: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei $S \subset R$ ein multiplikatives System und sei M ein R-Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $M_S \cong R_S \otimes_R M$ von R_S-Moduln.

Übungsmaterial.

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- Ist $\,\cdot\, \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein exakter Funktor auf der Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln?
- Sind die $\mathbb{C}$-Algebren $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y]$ und $\mathbb{C}[X, Y]$ isomorph?
- Ist der kanonische Homomorphismus

$$\begin{aligned} C\bigl([0,1],\mathbb{R}\bigr) \otimes_{\mathbb{R}} C\bigl([0,1],\mathbb{R}\bigr) &\longrightarrow C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R}) \\ f \otimes g &\longmapsto \bigl((x,y) \mapsto f(x) \cdot g(y)\bigr) \end{aligned}$$

  von $\mathbb{R}$-Algebren ein Isomorphismus?
- Sind Tensorprodukte mit Produkten verträglich?

Bitte wenden

Die folgenden Übungsaufgaben illustrieren die im Zusammenhang mit affinen Schemata eingeführten Begriffe an einfachen Beispielen.

Aufgabe 1 (Elementare Beispiele affiner Schemata**).**

1. Bestimmen Sie die Strukturgarbe von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ inklusive der Strukturabbildungen.
2. Bestimmen Sie von $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]/(X^2 - X)$ und $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]/(X^3 - X^2)$ die Strukturgarben inklusive der Strukturabbildungen. Verallgemeinern Sie!
3. Bestimmen Sie den Wert der Strukturgarbe von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ auf der Menge $D_{\mathbb{Z}[X]}(2) \cup D_{\mathbb{Z}[X]}(X)$.

Aufgabe 2. Wir betrachten im folgenden die Menge $X := \{x_0, x_1, x_2\}$ mit der Topologie, die durch die offenen Mengen

$$X_0 := \{x_0\}, \quad X_1 := \{x_0, x_1\}, \quad X_2 := \{x_0, x_2\}, \quad X, \quad \emptyset$$

gegeben ist. Sei K ein Körper. Wir definieren auf X eine Prägarbe $\mathcal{O}$, indem wir

$$\mathcal{O}(X) := \mathcal{O}(X_1) := \mathcal{O}(X_2) := K[X]_{(X)}, \quad \mathcal{O}(X_0) := K(X), \quad \mathcal{O}(\emptyset) := 0$$

setzen und als Strukturabbildungen $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X_j)$ bzw. $\mathcal{O}(X_j) \longrightarrow \mathcal{O}(X_0)$ für $j \in \{1, 2\}$ die Identität bzw. die kanonische Inklusion wählen.

1. Zeigen Sie, dass die Prägarbe $\mathcal{O}$ eine Garbe ist.
2. Zeigen Sie, dass die Einschränkungen von $\mathcal{O}$ auf X_1 bzw. X_2 zum Spektrum eines Ringes (mit der zugehörigen Strukturgarbe) isomorph sind.
3. Gibt es einen Ring, dessen Spektrum zu $(X, \mathcal{O})$ isomorph ist?

Aufgabe 3 (Disjunkte Vereinigungen affiner Schemata**).** Zeigen Sie, dass eine disjunkte Vereinigung affiner Schemata genau dann ein affines Schema ist, wenn die Vereinigung endlich ist. Mit anderen Worten:

Sei I eine Menge und sei $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie nichttrivialer kommutativer Ringe mit Eins. Wir bezeichnen mit $\coprod_{i \in I} (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{R_i})$ die disjunkte Vereinigung $\coprod_{i \in I} \operatorname{Spec} R_i$ (mit der Koproduktopologie) und der Garbe, deren Einschränkungen auf allen Komponenten R_i mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{R_i}$ übereinstimmt.

1. Zeigen Sie: Ist I endlich, so gibt es einen kommutativen Ring mit Eins, dessen Spektrum (mit der zugehörigen Strukturgarbe) zu $\coprod_{i \in I} (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{R_i})$ isomorph ist.
2. Zeigen Sie: Ist I unendlich, so gibt es keinen kommutativen Ring mit Eins, dessen Spektrum (mit der zugehörigen Strukturgarbe) zur disjunkten Vereinigung $\coprod_{i \in I} (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{R_i})$ isomorph ist.

Besprechung am 3. Dezember 2008