Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 1. Dezember 2008

Thema 1 (Morphismen in affine Schemata).

1. Sei X ein Schema und R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie: Es gibt eine kanonische Bijektion
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec} R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\bigl(R, \mathcal{O}_X(X)\bigr).$$
Insbesondere existiert ein kanonischer Morphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$.

2. Folgern Sie, dass die Kategorie der Schemata terminale Objekte besitzt. Besitzt die Kategorie der Schemata auch initiale Objekte?

Hinweis. Die Definition terminaler und initialer Objekte findet sich in jedem Buch über Kategorientheorie, z.B. im Buch „Category Theory“ von H. Herrlich und G.E. Strecker.

Thema 2 (Der Funktor der Punkte und Morphismen aus affinen Schemata). Zu einem Schema X betrachten wir den durch X dargestellten (kontravarianten) Funktor

$$\begin{aligned} X(\,\cdot\,)\colon \mathbf{Sch} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ T &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X) \\ (\varphi\colon T \to T') &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X) \\ f \mapsto f \circ \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der Punkte und die Einschränkung $X(\,\cdot\,)^{\mathrm{aff}}\colon \mathbf{Aff} \longrightarrow \mathbf{Set}$ von $X(\,\cdot\,)$ auf die Unterkategorie der affinen Schemata. Zeigen Sie:

1. Sind X und X' Schemata, deren Funktoren $X(\,\cdot\,)$ und $X'(\,\cdot\,)$ natürlich isomorph sind, so sind die Schemata X und X' isomorph.

2. Seien X und X' Schemata, deren Funktoren $X(\,\cdot\,)^{\mathrm{aff}}$ und $X'(\,\cdot\,)^{\mathrm{aff}}$ natürlich isomorph sind. Sind dann die Schemata X und X' isomorph?

Bemerkung. Man kann zeigen, dass der Funktor der Punkte einen sogenannten volltreuen Funktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der (kontravarianten) Funktoren von **Sch** nach **Set** liefert; dieser Tatsache liegt ein allgemeineres Prinzip zugrunde – das Yoneda-Lemma (*Eisenbud: Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* [S. 703]; *Herrlich, Strecker: Category Theory* [§ 30]).

Bitte wenden

Thema 3 (Quasi-affine Schemata). Ein Schema heißt *quasi-affin*, wenn es quasi-kompakt ist und eine offene Immersion in ein affines Schema besitzt. Eine *offene Immersion* ist ein Morphismus $i\colon X \longrightarrow Y$ von Schemata mit folgenden Eigenschaften: Die Abbildung i induziert einen Homöomorphismus $X \longrightarrow U$ auf eine offene Teilmenge U von Y, und versieht man U mit der induzierten Struktur einens offenen Unterschemas von Y, so ist der von i induzierte Morphismus $X \longrightarrow U$ ein Isomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass ein quasi-kompaktes Schema X genau dann quasi-affin ist, wenn der kanonische Morphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ eine offene Immersion ist.

2. Sind alle offenen Teilmengen affiner Schemata quasi-kompakt?

3. Sind alle quasi-affinen Schemata affin?

4. Sind alle quasi-kompakten Schemata quasi-affin?

Besprechung am 10. Dezember 2008