Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 8. Dezember 2008

Thema 1 ((Quasi)-Kohärente Modulgarben – Beispiele)**.** Zu einem Schema X, einem Punkt $x \in X$ und einer abelschen Gruppe A heißt die Garbe

$$W(x, A) := (\{x\} \hookrightarrow X)_* \operatorname{const}_{\{x\}} A$$

abelscher Gruppen die *Wolkenkratzergarbe* zu A in x. Die Notation $\cdot_*$ (das *direkte Bild von Garben* unter stetigen Abbildungen) wurde in Thema 3 von Blatt 6 eingeführt und $\operatorname{const}_{\{x\}} A$ bezeichnet die konstante Garbe mit Wert A auf $\{x\}$. Der Name Wolkenkratzergarbe leitet sich aus der Gestalt der Halme von $W(x, A)$ ab, wenn x ein abgeschlossener Punkt von X ist.

1. Zeigen Sie, dass nicht alle Modulgarben quasi-kohärent sind, indem Sie ein Schema X, einen Punkt $x \in X$ und eine abelsche Gruppe A angeben, so dass die zugehörige Wolkenkratzergarbe $W(x, A)$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe ist, die nicht quasi-kohärent ist.
2. Sind alle quasi-kohärenten Modulgarben kohärent?
3. Sind alle kohärenten Modulgarben lokal frei?

Thema 2 (Trägermengen globaler Funktionen)**.** Sei X ein Schema und sei $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Sei $X_f \subset X$ die Teilmenge aller Punkte $x \in X$, für die der Keim f_x von f in x eine Einheit im Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist.

1. Beschreiben Sie die Menge X_f im Fall, dass X ein affines Schema ist.
2. Zeigen Sie, dass X_f eine offene Teilmenge von X ist.
3. Zeigen Sie: Es gibt einen kanonischen Ringhomomorphismus
$$\varphi_f \colon \bigl(\mathcal{O}_X(X)\bigr)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f).$$
4. Zeigen Sie, dass φ_f injektiv ist, falls X quasi-kompakt ist.
5. Zeigen Sie, dass φ_f ein Isomorphismus ist, falls X eine endliche offene affine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit der Eigenschaft besitzt, dass die Durchschnitte $U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in I$ quasi-kompakt sind.
6. Ist $\{X_f \mid f \in \mathcal{O}_X(X)\}$ immer eine Basis der Topologie von X ?

Thema 3 (Eine Charakterisierung affiner Schemata)**.**

1. Sei $f \colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus von Schemata ist, wenn Y eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ besitzt, so dass die Einschränkung $f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ von f für alle $i \in I$ ein Isomorphismus ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Schema X genau dann affin ist, wenn es Elemente $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ gibt, so dass die offenen Teilmengen $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$ (siehe Thema 2) affin sind und die Elemente $f_1, \dots, f_n$ das Einheitsideal von $\mathcal{O}_X(X)$ erzeugen.

   Hinweis. Verwenden Sie Teil 5 von Thema 2.

Besprechung am 17. Dezember 2008