Čech- und Rips-Komplexe.

Wiederholung: ein (endliches) abstraktes simp. Komp. ist eine endliche Menge $S = \{\sigma \in S\}$ von endlichen Mengen $\sigma \neq \phi$ so dass $\sigma \in S$ und $\phi \neq \tau \subseteq \sigma$ impliziert $\tau \in S$.
Die Menge der Ecken von S ist $V = \{\sigma \in S \mid |\sigma| = 1\}$, wobei $|\sigma|$ die Kardinalität von σ ist. Die Dimension von σ ist $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$, die Dimension von S ist $\dim S = \max_{\sigma \in S} \{\dim(\sigma)\}$.

Eine Realisierung von S ist ein simplizialer Komplex K in $\mathbb{R}^N$, so dass eine Bijektion $\varphi : V \to \{\sigma \in K \mid \dim \sigma = 0\}$ mit konvex $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_e)\} \in K \iff \{v_1, \dots, v_e\} \in S$.
Jeder d-dimensionale (endl.) abstrakte Komplex S hat eine Realisierung in $\mathbb{R}^{2d+1}$; eine Realisierung ist eindeutig bis auf kanonischer simplizialer Isomorphismus; wir notieren $|S|$ die (Isomorphie Klasse der) Realisierung (als Polyeder)

Sei K ein simplizialer Komplex, $\sigma \in K$; der (offene) Stern von σ ist $\operatorname{Star}(\sigma) = \{\tau \in K \mid \sigma \subseteq \tau\}$ (ist selbst kein Komplex).

4.1 Definition: Sei X eine Menge (zum Beispiel $X \subset \mathbb{R}^n$) und sei $F = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine endliche Familie von Teilmengen von X. Sei

$$N(F) = \{A \subset F \mid \cap A \neq \phi\}$$

wobei $\cap A := \bigcap_{a \in A} a$ (insbesondere $A \neq \phi$).

Es ist klar, dass $N(F)$ ein abs. Simp. Komp. ist: falls

$A \in N(F)$ und $\phi \neq B \subset A$ dann gilt

$$\phi \neq \cap A \subset \cap B, \text{ also } \cap B \neq \phi.$$

Wir nennen $N(F)$ den Nerv von F

4.2 Beispiel Sei S ein abstrakter sim. komplex.

Sei $F = \{ |star(v)| \mid v \in S,\ \dim v = 0 \}$ (als Überdeckung von $|S|$: $|star(v)| = \bigcup_{\sigma \in star(v)} \sigma$)

Dann sind S und $N(F)$ Isomorph:

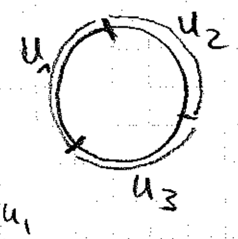
$$|star(v_1)| \cap \dots \cap |star(v_k)| \neq \emptyset \iff \{ v_1, \dots, v_k \} \in S.$$

4.3 Beispiel $X = S^1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1 \}$.

(a) $F = \{ S^1 \}$. Dann ist $|NF|$ ein Punkt (0-simplex)

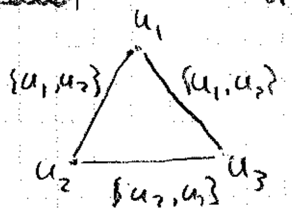
(b) $F = \{ U_1, U_2 \}$ Nord und Süd Hemisphären (mit Äquator). Dann gilt $NF = \{ U_1, U_2, \{U_1, U_2\} \}$, und $|NF|$ ist ein 1-simplex $U_1 \bullet\!\xrightarrow{\{U_1,U_2\}}\!\bullet\, U_2$

(c) $F = \{ U_1, U_2, U_3 \}$

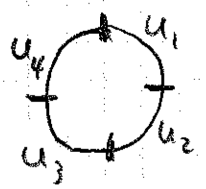


Dann gilt $NF = \{ U_1, U_2, U_3, \{U_1,U_2\}, \{U_1,U_3\}, \{U_2,U_3\} \}$

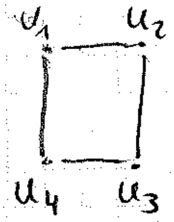
$\Rightarrow$ $|NF|$ ist der Rand eines 2-Simplex



(d) $F = \{ U_1, U_2, U_3, U_4 \}$

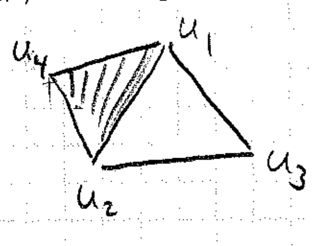


$|NF| \cong$



(e) $F = \{ U_1, U_2, U_3, U_4 \}$ mit U_1, U_2, U_3 wie in (c) und $U_4 = U_1 \cap U_2$:

$|NF| \cong$



<u>Man merkt</u>: (i) die Dimension von NF kann beliebig gross sein

(ii) (a), (b) sind keine gute Modelle von S^1, (c) und (d) sind Homöomorph zu S^1, (e) ist Homotopie-Äquivalent zu S^1.

4.4 Definition: eine stetige Ab. $f : X \to Y$ ist eine **Homotopie-Äquivalenz**, falls es $g : Y \to X$ stetig gibt mit $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$. Existiert eine H.-A. $f : X \to Y$, so haben X und Y den selben **Homotopietyp**. Man schreibt es $X \simeq Y$. X heißt **zusammenziehbar** falls $X \simeq \{*\}$.

4.5 Beispiele (a) $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$: $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \{0\}$, dann gilt $g \circ f = id_{\{0\}}$ und $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n}$, z.B. $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $H(x,t) = tx$.
(b) Δ^k ein k-simplex, v eine Ecke, dann gilt $\Delta^k \simeq \{v\}$.
(c) In Beispiel 4.2 (e) gilt $\|NF\| \simeq S^1$.

4.6 Nerv-Theorem (Borsuk 1946): Sei F eine endliche Menge von nicht-leeren, konvexen, abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$. Dann haben $\bigcup_{a \in F} a$ (als Teilraum von $\mathbb{R}^d$) und $|NF|$ den selben Homotopietyp.

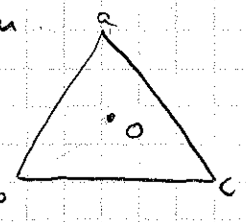
4.7 Bemerkungen: (a) Hat verschiedene Verallgemeinerungen. Hier ist wichtig, dass alle nicht-leeren Schnitte $\bigcap_{a_i \in A \subset F} a_i$ zusammenziehbar sind.
(b) Ein Theorem von Helly (EH Seite 57) impliziert, dass falls $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset F$ mit $k \geq d+1$, und falls $a_{i_1} \cap \dots \cap a_{i_{d+1}} \neq \emptyset$ für alle $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subset \{1, \dots, k\}$ dann gilt $\bigcap A \neq \emptyset$.
Es folgt: $k \geq d$ und Δ^k ist ein k-simplex mit alle d-Seiten in $|NF|$, dann gilt $\Delta^k \in |NF|$.

4.8 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche Teilmenge, und sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Wir definieren $F(S,r) = \{ B_r(s) \mid s \in S \}$ wobei $B_r(s) = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - s\|_2 \leq r \}$.

Wir definieren $\check{C}(S,r) = NF(S,r)$, und nennen es den Čech-Komplex von S (mit Radius r)
(Wir identifizieren S mit $NF(S,r)$; ein k-simplex in $NF(S,r)$ sehen wir also als $\{p_1, \dots, p_k\} \subset S$ an.)

4.9 Beispiele

Seien $S = \{a, b, c\} \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$ die einen gleichseitigen 3-eck bilden



Für $0 < r < \frac{\|a-b\|}{2}$ gilt $\check{C}(S,r) = \{a,b,c\}$

Für $\frac{\|a-b\|}{2} \leq r < \|a\|$ gilt

$\check{C}(S,r) = \{a, b, c, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}\}$.

Für $r \geq \|a\|$ gilt $\check{C}(S,r) = \mathcal{P}(S)$

4.10 Bemerkungen (a) $r_1 \leq r_2 \Rightarrow \check{C}(S,r_1) \subseteq \check{C}(S,r_2)$.

(b) Sei $\sigma \subset S$. Wir haben $\sigma \in \check{C}(S,r) \Leftrightarrow$ ein $x \in \mathbb{R}^d$ existiert mit $\sigma \subset \bar{B}_r(x)$. Etwas mühsam zu überprüfen (Miniball Algorithmus, EH Seite 61). Das motiviert:

4.11 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ wie in 4.8. Sei

$$VR(S,r) = \{\sigma \subseteq S \mid \operatorname{diam}(\sigma) \leq 2r\} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Vietoris-}\\\text{Rips}\end{array}\right)$$

wobei $\operatorname{diam}(\sigma) = \sup\{\|x-y\|_2 \mid x, y \in S\}$.

4.12 Lemma $\check{C}(S,r) \subseteq VR(S,r)$ (Beweis klar, weil $\operatorname{diam}(\bar{B}_x(r)) = 2r$).

4.13 Beispiel Seien $S \subset S^1$ wie in 4.9. Dann gilt

$\check{C}(S,r) = VR(S,r)$ für $0 < r < \frac{\|a-b\|}{2}$

$\check{C}(S,r) \subsetneq VR(S,r) = \mathcal{P}(S)$ $\quad \frac{\|a-b\|}{2} \leq r < \|a\|$

$\check{C}(S,r) = VR(S,r)$ $\quad r \geq \|a\|$.

4.14 Vietoris-Rips Lemma $VR(S,r) \subseteq \check{C}(S, \sqrt{2}r)$.

Beweis: EH Seite 62. Es wird bewiesen, dass falls
$\mathrm{diam}(\sigma) < 2r \Rightarrow \exists x, \ \sigma \subset B_{\sqrt{2}r}(x)$.

4.15 Sensor Netzwerke (V. de Silva, R. Ghrist: "Homological sensor Networks").

Sei D ein Polygonale Fläche in $\mathbb{R}^2$, ∂D ein simpl. Komplex der Dimension 1 mit $\partial D \cong S^1$.
Beispiel: D ist ein Wald;
Wir streuen ein Menge $\{x \in X\}$ von Minisensoren auf D, mit den Eigenschaften:

(A_1) Jeder $x \in X$ hat eine ID, die er sendet; er kann die ID von $y \in X$ empfangen, falls $y \in \overline{B}_{r_b}(x)$ ($r_b > 0$ ist der "Broadcast Radius")

(A_2) Überwachungs-gebiet von x is $\overline{B}_{r_c}(x)$ ($r_c > 0$ ist der "coverage Radius"), mit $r_c \geq \frac{2}{\sqrt{3}} r_b$

(A_3) Jeder $v \in \partial D^{(0)} = \{v_1, \dots, v_k\} = \{$Ecken von $\partial D\}$ wird einem Rand-Sensor x_v zugeordnet.
Sei $X_f = \{x_v \mid v \in \partial D^{(0)}\}$ (f = fence).

(A_4) Jeder $x \in X_f \subset X$ kennt die Id seiner zwei Nachbaren x_1 und x_2 in $\partial D^{(0)}$, und $\overline{B}_x(r_b) \cap X_f = \{x, x_1, x_2\}$

Beispiel: $x \in X$ kann Feuer in $\overline{B}_{r_c}(x)$ detektieren.

Frage: $D \subset \bigcup_{x \in X} B_{r_c}(x)$?

Eine Antwort geht wie folgt:

Sei $R = VR(X, r_b)$, $\mathcal{F} = VR(X_\ell, r_b)$.

<u>Theorem</u> Falls es $[\alpha] \in H_2(R, \mathcal{F}; \mathbb{Z})$ gibt mit $\partial_*[\alpha] \neq 0$ in $H_1(\mathcal{F}; \mathbb{Z}) \cong H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, dann gilt $D \subset \bigcup_{x \in X} B_{r_c}(x)$.

<u>Idée</u>:

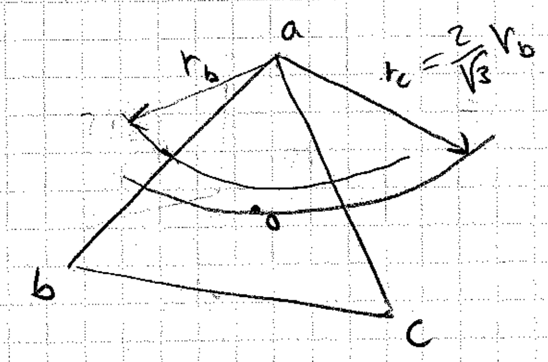
$$\begin{tikzcd} H_2(R, \mathcal{F}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\pi_*"] & H_1(\mathcal{F}) \arrow[d, "\cong"] \\ H_2(\mathbb{R}^2, \partial D) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_1(\partial D) \end{tikzcd}$$

Falls $p \in D \setminus (D \cap \bigcup_{x \in X} B_{r_c}(x))$ dann faktorisiert π_* durch $H_2(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}, \partial D) = 0$.

Die Bedingung $r_c \geq \frac{2}{\sqrt{3}} r_b$ garantiert$^{(*)}$, dass ① gilt:

$$VR(X, r_b) \overset{①}{=} \check{C}(X, r_c) \simeq \bigcup_{x \in X} B_{r_c}(x)$$

(*) (vergleiche Beispiel 4.9 / 4-13)



$r_c > \frac{2}{\sqrt{3}} r_b$