Homologie I

Sarah Humberg

19. Mai 2010

In diesem Vortrag führen wir zunächst den Begriff der Homologietheorie ein, mit dessen Hilfe wir im Anschluss zwei interessante Tatsachen erstaunlich knapp beweisen können. Im letzten Abschnitt konstruieren wir die Simpliziale Homologie und finden einen neuen Weg die Eulercharakteristik eines topologischen Raumes zu berechnen.

1 Axiomatische Definition von Homologie

Definition 1.1. Definiere die Kategorie $\mathbf{TOP^2}$: Objekte sind Paare (X, A) von topologischen Räumen, d.h. ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge $A \subseteq X$, versehen mit der Teilraumtopologie. Ein Morphismus $f : (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$.

Zwei Morphismen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ heißen *homotop*, $f \simeq g$, falls eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$ existiert mit $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$ und $H(A \times [0, 1]) \subseteq B$.
(X, A) und (Y, B) heißen *homotopieäquivalent*, $(X, A) \simeq (Y, B)$, falls stetige Abbildungen $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (Y, B) \to (X, A)$ existieren mit $f \circ g \simeq id_{(Y,B)}$ und $g \circ f \simeq id_{(X,A)}$.

Definition 1.2. Eine *Homologietheorie* $H_* = (H_*, \partial_*)$ mit Werten in $\mathbb{F}_2$**-VR** ist eine Folge kovarianter Funktoren $H_n : \mathbf{TOP^2} \to \mathbb{F}_2\text{-}\mathbf{VR}$, $n \in \mathbb{Z}$, zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, \emptyset)$, $n \in \mathbb{Z}$, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

1. *Homotopieaxiom.*

   Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so folgt $\underbrace{H_n(f)}_{=:f_*} = \underbrace{H_n(g)}_{=:g_*}$ $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Seminar „Algorithmische Topologie“, SS 2010, WWU Münster

2. *Lange exakte Sequenz von Paaren.*

   Für jedes Paar (X, A) ist folgende nach beiden Seiten unendlich lange Sequenz exakt:

   $$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

   wobei $i : A \hookrightarrow X$ und $j : X := (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen bezeichnen.

   Die Abbildung $\partial_n(X, A)$ heißt *Randoperator.*

3. *Ausschneidung.*

   Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Unterräume sodass $\bar{A} \subseteq \mathring{B}$. Dann induziert die Inklusion $i : (X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, B)\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ Isom. $i_* : H_n(X \setminus A, B \setminus A) \xrightarrow{\cong} H_n(X, B)$.

4. *Dimensionsaxiom.*

   $$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

   für jeden Einpunktraum $\{*\}$.

5. *Additivität.*

   Sei $(X_i, A_i)_{i\in I}$ Folge von top. Paaren, $j_i : (X_i, A_i) \hookrightarrow (\dot{\bigcup} X_i, \dot{\bigcup} A_i)$ die kanonische Inklusion.

   Dann ist $\bigoplus H_n(X_i, A_i) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus (j_i)_*} H_n(\dot{\bigcup} X_i, \dot{\bigcup} A_i)$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.3. Aus dem Homotopieaxiom folgt:
$(X, A) \simeq (Y, B) \Rightarrow H_n(X, A) \cong H_n(Y, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 1.4 (Mayer-Vietoris-Sequenz)**.**
Sei X top. Raum, $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$, $A \subseteq X_0 := X_1 \cap X_2$, betrachte die Inklusionen

$$\begin{tikzcd} (X_0, A) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & (X_1, A) \arrow[d, "j_1"] \\ (X_2, A) \arrow[r, "j_2"] & (X, A) \end{tikzcd}$$

Es gibt natürliche Homomorphismen $r_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(X_0, A)$ sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$\ldots \to H_n(X_0, A) \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{r_n} H_{n-1}(X_0, A) \to \ldots$$

Diese heißt Mayer-Vietoris-Sequenz.

2 Beispiele von Berechnungen und Anwendungen

Wir können nun die Homologiegruppen der d-dimensionalen Sphäre berechnen und betrachten zwei weitere wichtige Anwendungen von Homologie. Dabei vertrauen wir darauf dass mindestens eine Homologietheorie existiert, ein konkretes Beispiel werden wir erst in Kapitel 3 kennenlernen.

Beispiel 2.1. Für jeden top. Raum X und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $H_n(X, X) = 0$.

Beweis. Zur Übung. $\square$

Beispiel 2.2 (Homologie der Sphäre S^d)**.**
Für die d-dimensionale Sphäre S^d gilt:

$$H_n(S^d, \{*\}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = d \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Beweis. (per Induktion)
IA: Sei $d = 0$. Es ist $S^0 = \{*\} \dot\cup \{*\}$, also:

$$H_n(S^0, \{*\}) = H_n(\{*\} \dot\cup \{*\}, \{*\}) \overset{Add.axiom}{=} \underbrace{H_n(\{*\}, \{*\})}_{=0} \oplus \underbrace{H_n(\{*\}, \emptyset)}_{=:H_n(\{*\})} \overset{Dim.axiom}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

IS: $d - 1 \mapsto d$.
Seien $N := (0, \dots, 0, 1)$, $S := (0, \dots, 0, -1)$. Dann ist $S^d = \underbrace{(S^d \setminus \{N\})}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(S^d \setminus \{S\})}_{\text{offen}}$.
Sei $\{*\} \in (S^d \setminus \{N\}) \cap (S^d \setminus \{S\}) = S^d \setminus \{N, S\} \simeq S^{d-1}$
Betrachte die Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\dots \to \underbrace{H_n(S^d \setminus N, \{*\})}_{\substack{\cong H_n(\mathbb{R}^d, \{*\}) \\ \cong H_n(\{*\}, \{*\}) = 0}} \oplus \underbrace{H_n(S^d \setminus S, \{*\})}_{=\,0} \to H_n(S^d, \{*\}) \to \underbrace{H_{n-1}(S^d \setminus \{N, S\}, \{*\})}_{\cong H_{n-1}(S^{d-1}, \{*\})} \to \underbrace{H_{n-1}(S^d \setminus N, \{*\}) \oplus \dots}_{=\,0}$$

Also ist $H_n(S^d, \{*\}) \cong H_{n-1}(S^{d-1}, \{*\}) \overset{IV}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n - 1 = d - 1 \Leftrightarrow n = d \\ 0 & sonst \end{cases}$

$\square$

Bemerkung 2.3.
Es ist $H_0(X) = H_0(X, \{*\}) \oplus \mathbb{F}_2$ und $H_n(X) = H_n(X, \{*\})$ für $n \geq 1$, also z.B.
$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$ und für $d \geq 1$: $H_n(S^d) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0, d \\ 0 & sonst \end{cases}$.

Lemma 2.4 (Invarianz der Dimension)**.**

Seien $d, e \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^e$ sind homöomorph $\Leftrightarrow d = e$.

Beweis. .
„$\Leftarrow$“ ist trivial.
„$\Rightarrow$“: Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ Homöomorphismus.
Für $x \in \mathbb{R}^d$ induziert f einen Homöom. $\underbrace{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}}_{\simeq S^{d-1}} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{R}^e \setminus \{f(x)\}}_{\simeq S^{e-1}}$.

Also sind S^{d-1} und S^{e-1} homotopieäquivalent und es gilt:

$$\underbrace{H_n(S^{d-1}, \{*\})}_{=\begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = d-1 \\ 0 & sonst \end{cases}} \quad \cong \quad \underbrace{H_n(S^{e-1}, \{*\})}_{=\begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = e-1 \\ 0 & sonst \end{cases}} \qquad \Rightarrow \ d = e$$

□

Satz 2.5 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.**
Jede stetige Abbildung $f : D^d \to D^d$ von der abgeschlossenen Kreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Annahme: $f(x) \neq x \ \forall \ x \in D^d$.
Definiere $r : D^d \to S^{d-1}$ folgendermaßen: Für $x \in D^d$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahles ausgehend von $f(x)$ durch x mit der S^{d-1}. Dann ist r stetig und eingeschränkt auf S^{d-1} die Identität.
Sei $i : S^{d-1} \hookrightarrow D^d$ die Inklusion, dann ist $r \circ i = id_{S^{d-1}}$.
Also ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} S^{d-1} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id"'] & D^d \arrow[d, "r"] \\ & S^{d-1} \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Funktoreigenschaften kommutiert dann aber auch folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_2 \cong H_{d-1}(S^{d-1}, \{*\}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "id_*"'] & H_{d-1}(D^d, \{*\}) \cong \{0\} \arrow[d, "r_*"] \\ & H_{d-1}(S^{d-1}, \{*\}) \cong \mathbb{F}_2 \end{tikzcd}$$

$\lightning$

□

3 Simpliziale Homologie als Beispiel einer Homologietheorie

Wir werden nun als Beispiel einer Homologietheorie die Simpliziale Homologie für endliche Simpliziale Komplexe konstruieren. Wie wir wissen können wir zu vielen topologischen Räumen eine Triangulierung finden, d.h. einen endlichen Simplizialen Komplex K mit $X \cong |K|$. Die Homologie eines solchen topologischen Raumes kann auf die Homologie seiner Triangulierung zurückgeführt werden, durch einen kleinen Trick ([Mun84], Seite 149) lässt sich erreichen, dass dies von der Wahl der Triangulierung unabhängig ist.

Sei im folgenden K ein endlicher Simplizialer Komplex.

Definition 3.1. • Eine *d-Kette* c in K (mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$) ist eine formale Summe von d-Simplizes in K, also $c = \sum a_i\sigma_i$ mit σ_i d-Simplex für alle i, $a_i \in \mathbb{F}_2$.

• $C_d(K) = C_d$ sei die Gruppe der d-Ketten in K
(mit komponentenweiser Addition $\sum a_i\sigma_i + \sum b_i\sigma_i = \sum(a_i + b_i)\sigma_i$).
Insbesondere ist $C_d(K) = 0$ für $d < 0$ oder $d > dim(K)$.

• Der *Rand* $\partial_d\sigma$ eines d-Simplexes σ sei die Summe seiner $(d-1)$-dimensionalen Seiten, also für $\sigma = conv(u_0, \dots, u_d)$ sei $\partial_d\sigma := \sum_{j=0}^{d} conv(u_0, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_d)$.

• Der *Rand* $\partial_d c$ einer d-Kette $c = \sum a_i\sigma_i$ sei def. als $\partial_d c := \sum a_i\partial_d\sigma_i$. Dann ist $\partial_d c$ eine $(d-1)$-Kette, schreibe $\partial_d : C_d(K) \to C_{d-1}(K)$.
∂_d ist ein Homomorphismus und heißt *Randabbildung für Ketten.*

Die Sequenz $\quad \dots \xrightarrow{\partial_{d+2}} C_{d+1}(K) \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d(K) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(K) \to \dots$

heißt *Kettenkomplex von K.*

• Ein *d-Zykel* ist eine d-Kette aus $\ker \partial_d =: Z_d = Z_d(K)$,
ein *d-Rand* ist eine d-Kette aus $\operatorname{im} \partial_{d+1} =: B_d = B_d(K)$.

Satz 3.2. *Es gilt $\partial_{d-1}\partial_d c = 0$ für alle d und jede d-Kette c.*

Beweis. Für einen d-Simplex $\sigma_i = conv(u_0, \dots, u_d)$ gilt:

$$\partial_{d-1}\partial_d\sigma_i = \partial_{d-1}\left(\sum_{j=0}^{d} conv(u_0, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_d)\right) = \sum_{j=0}^{d} \partial_{d-1}(conv(u_0, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_d))$$

$$= \sum_{j=0}^{d}\sum_{i \neq j} conv(u_0, \dots, \hat{u_i}, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_d),$$

dabei taucht jede der $(d-2)$-dimensionalen Seiten $conv(u_0, \dots, \hat{u_i}, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_d)$ genau zweimal in der Summe auf. Für eine d-Kette $c = \sum a_i\sigma_i$ gilt also:

$$\partial_{d-1}\partial_d c = \partial_{d-1}\left(\sum a_i \partial_d \sigma_i\right) = \sum a_i \partial_{d-1}\partial_d \sigma_i$$

$$= \sum 2a_i \left(\sum_{j=0}^{d} \sum_{i<j} conv(u_0, \ldots, \hat{u_i}, \ldots, \hat{u_j}, \ldots, u_d) \right) = 0$$

wegen $a_i \in \mathbb{F}_2$.

$\square$

Bemerkung 3.3. Also gilt: $B_d \leq Z_d$ Untergruppe.
Es ist $C_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{s_d}$ mit s_d Anzahl der d-Simplizes in K,
$Z_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{z_d}$ für ein $z_d \in \mathbb{N}$, $B_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{b_d}$ für ein $b_d \in \mathbb{N}$.

Definition 3.4 (Simpliziale Homologie)**.**
Die *d-te Homologiegruppe von K* ist $H_d(K) := Z_d/B_d \quad (\cong (\mathbb{F}_2)^{z_d}/_{(\mathbb{F}_2)^{b_d}} \cong (\mathbb{F}_2)^{z_d-b_d})$.
Der Rang $\operatorname{rg} H_d(K) =: \beta_d(K)$ heißt *d-te Bettizahl* von K, also $\beta_d(K) = z_d - b_d$.

Satz 3.5 (Euler-Poincaré-Formel)**.**

$$\text{Es gilt:} \quad \chi(K) = \sum_{d=0}^{\infty}(-1)^d \beta_d(K) \text{ für die Eulercharakteristik von } K.$$

Beweis. Da $\partial_d : C_d(K) \to C_{d-1}(K)$ Homomorphismus ist folgt:

$$C_d(K)/\ker\partial_d \cong \operatorname{im}\partial_d \;\Leftrightarrow\; C_d(K)/Z_d(K) \cong B_{d-1}(K) \;\Leftrightarrow\; (\mathbb{F}_2)^{s_d}/(\mathbb{F}_2)^{z_d} \cong (\mathbb{F}_2)^{b_{d-1}}$$

$$\Leftrightarrow\; (\mathbb{F}_2)^{s_d - z_d} \cong (\mathbb{F}_2)^{b_{d-1}} \;\Leftrightarrow\; s_d - z_d = b_{d-1} \;\Leftrightarrow\; s_d = z_d + b_{d-1}$$

Also: $$\chi(K) = \sum_{d=0}^{\infty}(-1)^d s_d = \sum_{d=0}^{\infty}(-1)^d (z_d + b_{d-1}) = \sum_{d=0}^{\infty}(-1)^d (z_d - b_d) = \sum_{d=0}^{\infty}(-1)^d \beta_d(K)$$

$\square$

Definition 3.6. Sei $K_0 \subseteq K$ Unterkomplex. Betrachte den Kettenkomplex

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{d+2}} C_{d+1}(K)/C_{d+1}(K_0) \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d(K)/C_d(K_0) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(K)/C_{d-1}(K_0) \to \ldots$$

wobei $\partial_d : C_d(K)/C_d(K_0) \to C_{d-1}(K)/C_{d-1}(K_0)$ von $\partial_d : C_d(K) \to C_{d-1}(K)$ induziert wird.
Definiere die *relative Homologie* des Paares (K, K_0) als $H_d(K, K_0) := \ker\partial_d / \operatorname{im}\partial_{d+1}$.

Bemerkung 3.7. Ist $f : K \to L$ eine simpliziale Abbildung, dann induziert f eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung $f_* : H_d(K) \to H_d(L)$ in Homologie:
f induziert zunächst eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung auf den Kettengruppen:

$$f_\# : C_d(K) \to C_d(L),\; \sum a_i\sigma_i \mapsto \sum a_i\tau_i \text{ mit } \tau_i = \begin{cases} f(\sigma_i) & dim f(\sigma_i) = d \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} C_d(K) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\partial_K"'] & C_d(L) \arrow[d, "\partial_L"] \\ C_{d-1}(K) \arrow[r, "f_\#"] & C_{d-1}(L) \end{tikzcd}$$
kommutiert,

deshalb gilt $f_\#(Z_d(K)) \subseteq Z_d(L)$ und $f_\#(B_d(K)) \subset B_d(L)$, also induziert $f_\#$ eine wohldefinierte Abbildung f_* auf den Quotienten:

$$f_* : H_d(K) = Z_d(K)/B_d(K) \to Z_d(L)/B_d(L) = H_d(L),\ z + B_d(K) \mapsto f_\#(z) + B_d(L)$$

Ist $f : (K, K_0) \to (L, L_0)$ eine simpliziale Abbildung von Paaren, d.h. $f : K \to L$ simpliziale Abbildung mit $f(K_0) \subseteq L_0$, dann induziert f ebenso eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung $f_* : H_d(K, K_0) \to H_d(L, L_0)$ in relativer Homologie.

Wegen $f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\#$ und $id_\# = id_{C_d(K,K_0)}$
gilt auch $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und $id_* = id_{H_d(K,K_0)}$.

Es lässt sich zeigen, dass dieses Konzept der induzierten Abbildung in Homologie auf stetige Abbildungen zwischen triangulierten topologischen Räumen verallgemeinert werden kann.
Also ist $(H_d)_{d\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Funktoren von der Kategorie der Paare von triangulierten topologischen Räumen in die Kategorie der $\mathbb{F}_2$-Vektorräume.
Desweiteren lässt sich eine „passende“ Folge von natürlichen Transformationen $\partial_d : H_d(X, A) \to H_{d-1}(A, \emptyset)$ definieren und man kann (teilweise mit einigem Aufwand) nachrechnen dass die Axiome einer Homologietheorie erfüllt sind.

Aufgabe 3.8. Man zeige, dass das Dimensionsaxiom im Falle der simplizialen Homologie erfüllt ist.

Aufgabe 3.9. Man berechne die Bettizahlen der d-dimensionalen Sphäre S^d.

Literatur

[1] H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, AMS, 2009.

[2] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[3] W. Lück, *Algebraische Topologie*, Vieweg, 2005.