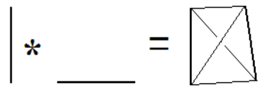
Verallgemeinerte Antipoden und der Z/2-Index

Anna Dierschke 26.11.2008

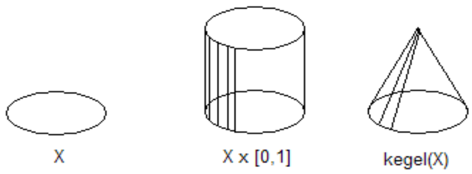
Kapitel 1: Join

Notation 1.1:
Seien A und B Mengen. Schreibe: $A \uplus B$ für die Menge $(A\times \{1\}) \cup (B\times \{2\})$. Allgemeiner schreibe $A_1 \uplus A_2 \uplus \ldots \uplus A_n$ für $(A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}) \cup \ldots \cup (A_n \times \{n\})$.

Definition 1.2 (Join von simplizialen Komplexen):
Seien K und L simpliziale Komplexe. Der Join K*L ist der simpliziale Komplex mit der Eckenmenge $V(K) \uplus V(L)$ und der Menge von Simplizes $\{F \uplus G : F\in K, G\in L\}$.



Definition 1.3 (Join von Räumen):
Seien X und Y topologische Räume. Der Join X*Y ist der Quotientenraum $X\times Y\times [0,1]/\approx$, mit der Äquivalenzrelation $\approx$ gegeben durch $\forall\ x,x'\in X$ und $\forall\ y\in Y:\ (x,y,0)\approx (x',y,0)$ („für t=0 ist x egal“) und $\forall\ x\in X$ und $\forall\ y,y'\in Y:\ (x,y,1)\approx (x,y',1)$ („für t=1 ist y egal“).



(Beispiel eines Joins des Raumes X mit einem Punkt.)

Definition 1.4 (Join von Abbildungen):
Seien die Abbildungen $f: X_1 \to X_2$ und $g: Y_1 \to Y_2$ gegeben. Der Join der Abbildungen ist gegeben durch $f * g: X_1 * Y_1 \to X_2 * Y_2$

$tx \oplus (1-t)y \to tf(x) \oplus (1-t)g(y)$ (wobei $tx \oplus (1-t)y$ für den Punkt [(x,y,t)] steht).

Kapitel 2: k-Zusammenhang

Definition 2.1:
Sei $k \geq -1$. Ein topologischer Raum X heißt k-zusammenhängend, falls für alle $i=-1,0,1,\ldots,k$, jede stetige Abbildung $f: S^i \to X$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{f}: B^{i+1} \to X$ erweitert werden kann.
(Äquivalent: f ist nullhomotop.)
Hier wird S^{-1} als $\emptyset$ interpretiert und B^0 als ein einziger Punkt. Also heißt (-1)-zusammenhängend nicht leer.

Satz 2.2:
Die n-Sphäre S^n ist (n-1)-zusammenhängend aber nicht n-zusammenhängend.
(In diesem Beweis wird der Satz von Borsuk-Ulam verwendet.)

Kapitel 3: Z/2-Index

Definition 3.1 (Z/2-Raum und Z/2-Abbildung):
Ein Z/2-Raum ist ein Paar (X,ν), mit einem topologischen Raum X und einem Homöomorphismus $\nu : X \to X$, gennant Z/2-Aktion auf X, derart dass $\nu^2 = \nu \circ \nu = id_X$.
Die $Z/2$- Aktion ν heißt frei, falls $\forall x \in X: \nu(x) \neq x$, also wenn ν keine Punkte fixiert. In diesem Fall heißt auch der $Z/2$- Raum (X,ν) frei.
Seien (X,ν) und (Y,ω) Z/2-Räume. Eine Z/2-Abbildung $f:(X,\nu) \to (Y,\omega)$ ist eine stetige Abbildung $X \to Y$, die mit den Z/2-Aktionen kommutiert: Für alle $x \in X$ gilt $f(\nu(x)) = \omega(f(x))$ oder kurz: $f \circ \nu = \omega \circ f$.

Definition 3.2 (simplizialer Z/2-Komplex):
Ein simplizialer Z/2-Komplex ist ein simplizialer Komplex K mit einer simplizialen Abbildung $\nu : V(K) \to V(K)$ derart, dass $\|\nu\|$ eine Z/2-Aktion auf $\|K\|$ ist.

Notation 3.3:

i) Seien (X,ν) und (Y,ω) Z/2-Räume. Schreibe $X \overset{Z/2}{\to} Y$ falls eine Z/2-Abbildung von X nach Y existiert und $X \overset{Z/2}{\not\to} Y$, falls keine Z/2-Abbildung existiert.
ii) Schreibe auch $X \leq_{Z/2} Y$ falls gilt: $X \overset{Z/2}{\to} Y$

Definition 3.4 (Z/2-Index):
Sei (X,ν) ein Z/2-Raum. Der Z/2-Index von (X,ν) ist definiert als
$ind_{Z/2}(X) := \min\{n \in \{0,1,2,...\} : X \overset{Z/2}{\to} S^n\}$
S^n hat hier die gewöhnliche antipodale Z/2-Aktion.

Proposition 3.5 (Eigenschaften des Z/2-Index):

(i) Falls $X \leq_{Z/2} Y$, dann ist $ind_{Z/2}(X) \leq ind_{Z/2}(Y)$. Mit anderen Worten folgt aus $ind_{Z/2}(X) > ind_{Z/2}(Y)$, dass $X \overset{Z/2}{\not\to} Y$.
(ii) Für alle $n \geq 0$ ist $ind_{Z/2}(S^n) = n$ (mit der Standard Z/2-Aktion von S^n).
(iii) $ind_{Z/2}(X * Y) \leq ind_{Z/2}(X) + ind_{Z/2}(Y) + 1$.
(iv) Falls X ein (n-1)-zusammenhängender Raum ist, dann ist $ind_{Z/2}(X) \geq n$.
(v) Wenn K ein freier simplizialer Z/2-Komplex der Dimension n ist, dann ist $ind_{Z/2}(K) \leq n$.

(Im Beweis von (ii) und (iv) wird der Satz von Borsuk-Ulam verwendet.)