Grundlagen der Graphentheorie

Thomas Kamps

6. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Definition von Graphen 3

2 Unabhängigkeit von Ecken und Kanten 3

3 Teil- und Untergraphen 4

4 Schnitt, Vereinigung und Produkt von Graphen 5

5 Vollständige Graphen 6

6 Partitionen 7

7 Minoren und topologische Minoren 7

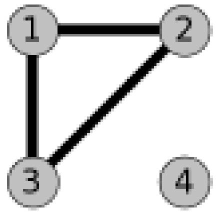
8 Planarer Graph 10

9 Satz von Kuratowski u. Wagner 11

10 Chromatische Zahl 11

1 Definition von Graphen

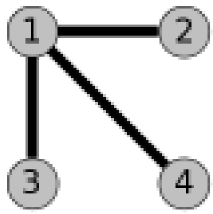
Ein Graph ist ein Tupel $G = (E, V)$ bestehend aus einer Eckmenge E und einer Kantenmenge $V \subset \{\{x, y\} | x, y \in E; x \neq y\}$.
Um dies zu verdeutlichen folgt hier ein Beispielgraph:



In diesem Beispiel ist die Menge aller Ecken $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Menge aller Kanten $V = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$. Daher lässt sich dieser Graph schreiben als $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

2 Unabhängigkeit von Ecken und Kanten

In einem Graphen kann es sein, dass je zwei Ecken nicht durch eine Kante verbunden sind. Im obigem Beispiel ist die Ecke 4 mit keiner der anderen Ecken verbunden. Ein Paar von Ecken, dass durch eine Kante verbunden ist, nennen wir benachbart.
Analog erfolgt die Definition für Kanten: Ein Paar von Kanten wird als benachbart bezeichnet, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt haben.
Auch dazu hier ein Beispiel:



In obigem Beispiel sind folgende Ecken benachbart:

- 1 und 2
- 1 und 3
- 1 und 4

Folgende Kanten sind benachbart:

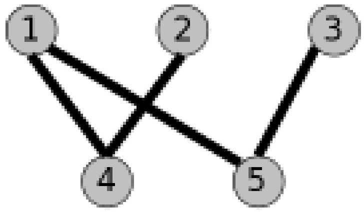
- $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$
- $\{1, 2\}$ und $\{1, 4\}$
- $\{1, 3\}$ und $\{1, 4\}$.

Zwei Ecken/Kanten werden als Nachbarn bezeichnet, wenn sie benachbart sind.

Definition 2.1. Sei $G = (E, V)$ ein Graph und $x \in E$ eine Ecke. x hat n Nachbarn, wenn es n Kanten der Form $\{x, y\} \in V$ mit $y \in E$ gibt.

Definition 2.2. Sei $G = (E, V)$ ein Graph, $E' \subset E$ und $V' \subset V$ Teilmengen der Ecken bzw. Kanten.
E' heißt unabhängig, wenn für alle Paare $x, y \in E'$ mit $x \neq y$ gilt: x und y sind nicht benachbart.
V' heißt unabhängig, wenn für alle Paare $\{x, y\}, \{x', y'\} \in V'$ mit $\{x, y\} \neq \{x', y'\}$ gilt: $\{x, y\}$ und $\{x', y'\}$ sind nicht benachbart.

Auch dazu ein Beispiel:



In diesem Beispiel sind beispielsweise die Eckmengen $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 5\}$ und $\{3, 4\}$ unabhängig.
Außerdem ist beispielsweise die Kantenmenge $\{\{1, 4\}, \{3, 5\}\}$ unabhängig.

Bemerkung 2.3. *Sei $G = (E, V)$ ein Graph und $E' \subset E$, $V' \subset V$ unabhängig. Dann ist auch jede Teilmenge von E' bzw. V' unabhängig.*

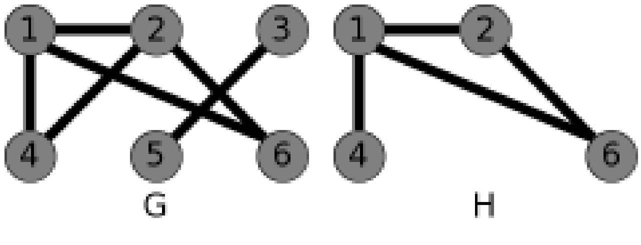
3 Teil- und Untergraphen

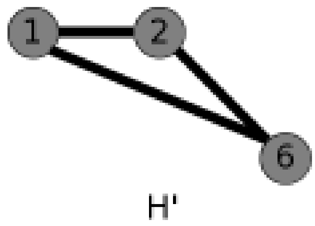
Manchmal ist es von Bedeutung Teile eines Graphen zu betrachten. In diesem Abschnitt wollen wir die Begriffe Teilgraph und Untergraph einführen.

Definition 3.1. Sei $G = (E, V)$ ein Graph und $G' = (E', V')$ ein weiterer Graph.
G' heißt Teilgraph von G, wenn gilt: $E' \subset E$ und $V' \subset V$.
Wenn zusätzlich für alle Paare $x, y \in E'$ mit $\{x, y\} \in V$ auch $\{x, y\} \in V'$ gilt, nennen wir G' einen Untergraphen von G.

Bemerkung 3.2. *Jeder Untergraph von G ist auch ein Teilgraph von G.*

Hierzu ein Beispiel:





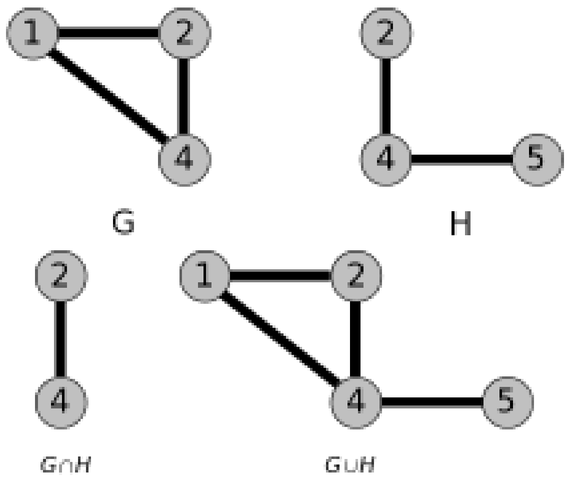
H ist ein Teilgraph von G und H' ist ein Untergraph von G. Aber H ist kein Untergraph von G, da H die Ecken 2 und 4 enthält aber nicht die Kante $\{2, 4\}$.

4 Schnitt, Vereinigung und Produkt von Graphen

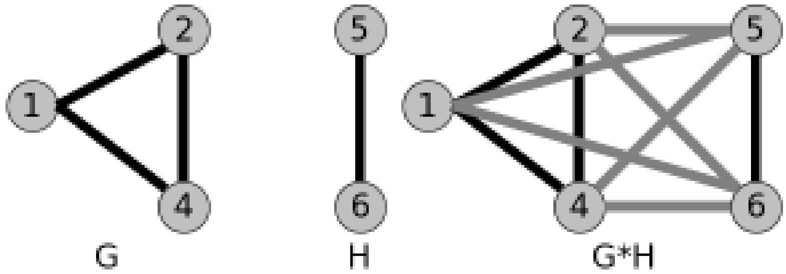
In diesem Abschnitt wollen wir 3 Verknüpfungen von Graphen erläutern. Dabei ist es auch notwendig den leeren Graphen einzuführen. Diesen Graphen wollen wir mit $\emptyset$ bezeichnen und es gilt: $\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$.

Definition 4.1. Seien $G = (E, V)$ und $G' = (E', V')$ zwei Graphen.
Schnitt zweier Graphen: $G \cap G' := (E \cap E', V \cap V')$
Vereinigung zweier Graphen: $G \cup G' := (E \cup E', V \cup V')$
Gilt $G \cap G' = \emptyset$, so ist das Produkt zweier Graphen: $G * G' := (E \cup E', V \cup V' \cup \{\{x, y\} | x \in E, y \in E'\})$

Nun ein Beispiel für Schnitt und Vereinigung:



Hier ein Beispiel für das Produkt zweier Graphen:



Die neu hinzugekommenden Kanten sind grau gezeichnet.

Bemerkung 4.2. *Für alle Graphen G gilt: $G * \emptyset = G$*

5 Vollständige Graphen

Jetzt wollen wir einen speziellen Typ von Graphen behandeln: Den vollstänigen Graphen.

Definition 5.1. Ein Graph $G = (E, V)$ heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in E$ mit $x \neq y$ gilt: $\{x, y\} \in V$.
Mit anderen Worten: Je zwei Ecken sind benachbart.

Einen vollständigen Graphen mit n Ecken werden wir mit K^n bezeichnen.

Bemerkung 5.2. *Sei G ein vollständiger Graph und E seine Eckmenge. Jede Teilmenge von E ist nicht unabhängig.*

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach: Sei $E' \subset E$ eine Teilmenge von E. Da jedes Paar $x, y \in E$ benachbart ist gilt dies auch für alle Paare $x, y \in E'$. Also ist E' nicht unabhängig. $\square$

Weniger trivial ist folgender Satz:

Satz 5.3. $K^n * K^m = K^{n+m}$

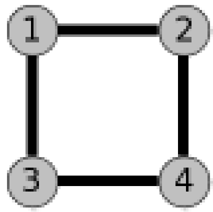
Beweis. Beim Produkt von K^n und K^m wird jede Ecke aus K^n mit jeder Ecke aus K^m verbunden. Da bereits auch jede Ecke aus K^n bzw. K^m mit jeder anderen Ecke aus K^n bzw. K^m verbunden ist, ist jede Ecke aus $K^n * K^m$ mit jeder anderen Ecke aus $K^n * K^m$ verbunden. Damit erfüllt $K^n * K^m$ die Definition eines vollständigen Graphen. Da $K^n * K^m$ $n + m$ Ecken hat, gilt damit: $K^n * K^m = K^{n+m}$. $\square$

In Abschnitt 4 haben wir bei dem Produktbeispiel das Produkt eines K^3 mit einem K^2 gebildet und erhielten einen K^5. Es sei noch erwähnenswert, dass der K^1 nur aus einer einzigen Ecke besteht.

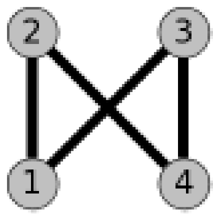
Bemerkung 5.4. *Jeder Graph mit n Ecken ist ein Teilgraph von K^n.*

6 Partitionen

Die Eckmenge E eines Graphen lässt sich in disjunkte unabhängige Teilmengen $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ zerlegen. Eine solche Zerlegeung nennen wir Partitionierung und die $E_1, \ldots, E_n$ nennen wir Partitionen. Um dies zu verdeutlichen folgt ein Beispiel:



Es gilt bei diesem Graph $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\})$. Wir können $\{1, 2, 3, 4\}$ zerlegen in $\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$. $\{1, 4\}$ und $\{2, 3\}$ sind dabei jeweils unabhängig. Diese Zerlegung können wir auch in der Darstellung erreichen:



An dieser Stelle wollen wir den Graphen einführen, der n Ecken, aber keine Kanten hat. Diesen Graphen wollen wir mit K_n bezeichnen.

Definition 6.1. $K_{n_1}, \ldots, n_r := K_{n_1} * \cdots * K_{n_r}$

Definition 6.2. $K\underbrace{n, \ldots, n}_{m-mal} := K_n^m$

Der Graph im obigem Beispiel ist ein $K_{2,2} = K_2^2$.

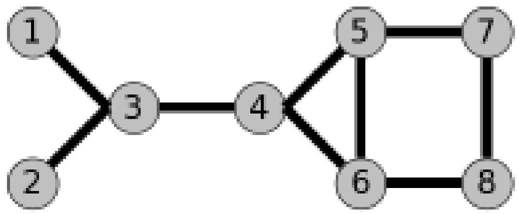
Bemerkung 6.3. $K_1 = K^1$

Bemerkung 6.4. $K\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-mal} = K^n$

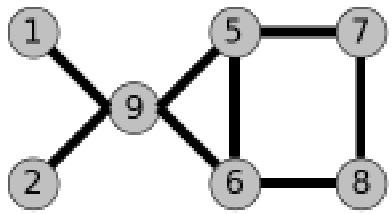
Beweis. $K\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-mal} = \underbrace{K_1 * \cdots * K_1}_{n-mal} = \underbrace{K^1 * \cdots * K^1}_{n-mal} = K^n$ □

7 Minoren und topologische Minoren

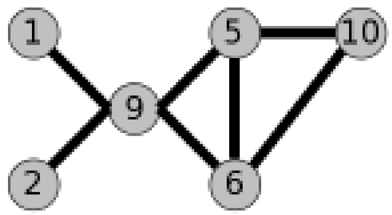
In einem Graphen kann man Kanten kontrahieren. Dabei verschmelzen die beiden Ecken der Kante zu einer gemeinsamen Ecke.



Wir kontrahieren die Kante $\{3,4\}$ und erhalten:



Dabei sind die Ecken 3 und 4 zur Ecke 9 verschmolzen.
Wir kontrahieren auch die Kante $\{7,8\}$:

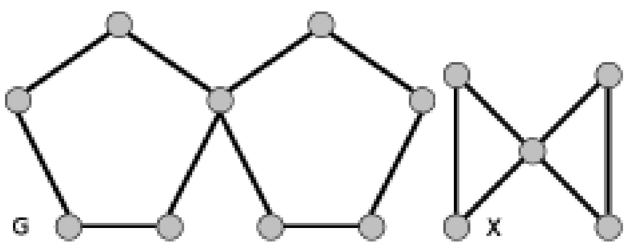


Jetzt sind die Ecken 7 und 8 zur Ecke 10 verschmolzen.

Definition 7.1. Sei G ein Graph und X ein durch eine Reihe von Kantenkontraktionen aus G entstandener Graph. Dann ist G ein MX.

Definition 7.2. Sei X ein Graph mit mindestens einer Kante und sei G ein weiterer Graph. G heißt ein TX, wenn G aus X gewonnen werden kann, indem an Kanten von X weitere Ecken platziert werden.

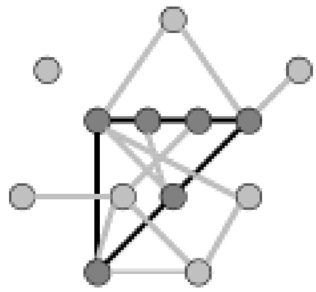
Um diese Definition zu verdeutlichen folgt ein Beispiel:



G ist in diesem Beispiel ein TX.
Nun können wir den Begriff des Minors und des topologischen Minors einführen:

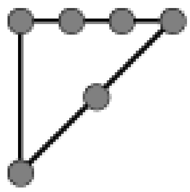
Definition 7.3. Seien G und X zwei Graphen.
X heißt Minor von G, wenn G einen MX als Teilgraphen enthält.
X heißt topologischer Minor von G, wenn G einen TX als Teilgraphen enthält.

Also entstehen Minoren eines Graphen G, in dem man zunächst durch das "löschen" von Ecken und Kanten einen Teilgraphen bildet und anschließend Kanten kontrahiert. Ein Beispiel dazu:



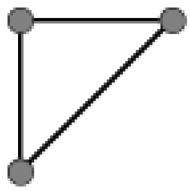
G

Zunächst löschen wir einige Ecken und Kanten und erhalten:



Y

Jetzt kontrahieren wir einige Kanten und erhalten:



X

Y ist also ein MX und Y ist Teilgraph von G. Damit ist X ein Minor von G.
Hier gilt auch: Y ist ein TX und damit ist X sogar ein topologischer Minor von G.

Die Kantenkontraktion hat bei vollständigen Graphen eine interessante Eigenschaft:

Satz 7.4. *Sei $n \leq m$. Dann ist K^m ein MK^n. Mit anderen Worten: K^n ensteht durch Kantenkontraktion aus K^m.*

Beweis. Sei $n \leq m$ und K^m gegeben. Es genügt zu zeigen, dass aus K^m K^{m-1} durch Kantenkontraktion gewonnen werden kann, da aus K^{m-1} K^{m-2} erzeugt werden kann, danach K^{m-3}, usw. bis man schließlich K^n hat.
Sei $K^m = (E, V)$ ein vollstäniger Graph und $x, y \in E$ mit $x \neq y$. Sei weiter M die Menge aller Nachbarn von x und N die Menge aller Nachbarn von y. Es gilt also: $M = E - \{x\}$ und $N = E - \{y\}$.
Durch das Kontrahieren der Kante $\{x, y\}$ verschmelzen die Ecken x und y zu einer Ecke, welche wir mit z bezeichnen wollen. Die Nachbarn von z sind dann $M \cup N - \{x, y, z\} = E - \{x, y, z\}$. Also ist z mit allen anderen Ecken benachbart. Die anderen Kanten bleiben unberührt. Daher ist der neue Graph vollständig. Da zwei Ecken zu einer verschmolzen sind, hat dieser eine Ecke weniger als K^m und daher ist dieser Graph ein K^{m-1}. □

Bemerkung 7.5. *Jeder topologische Minor ist ein Minor.*

Bemerkung 7.6. *Im Allgemeinen sind Minoren keine Teilgraphen.*

Bemerkung 7.7. *Jeder Teilgraph ist auch ein topologischer Minor.*

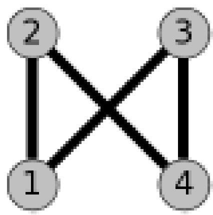
Bemerkung 7.8. *Jeder Graph ist topologischer Minor seiner selbst.*

8 Planarer Graph

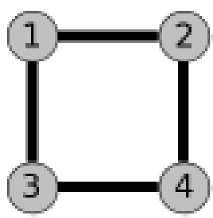
In den meisten vorangegangenen Beispielen hatten die Graphen in der Zeichnung keine Kanten, die sich schneiden. Geht das immer so? Die Antwort lautet: Nein. In den nächsten beiden Abschnitten werden wir klären, wann es möglich ist, einen Graphen zu zeichnen, ohne dass sich die Kanten schneiden.

Definition 8.1. Ein Graph heißt plättbar, wenn er gezeichnet werden kann, ohne dass sich die Kanten schneiden.

Zum Beispiel ist dieser Graph plättbar:



Die Kanten $\{1, 3\}$ und $\{2, 4\}$ schneiden sich. Aber wir können geschickter zeichnen:



Also ist der Graph plättbar.

Folgende vollständige Graphen sind plättbar: $\emptyset, K^1, K^2, K^3$ und K^4. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass für $n \geq 5$ K^n nicht plättbar ist.

9 Satz von Kuratowski u. Wagner

Satz 9.1 (Kuratowski 1930; Wager 1937)**.** *Sei G ein Graph. Dann ist äquivalent:*

1. *G ist plättbar*
2. *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor*
3. *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor*

Jetzt können wir zeigen, dass für $n \geq 5$ K^n nicht plättbar ist:

Satz 9.2. *Für $n \geq 5$ ist K^n nicht plättbar.*

Beweis. Für $n = 5$ ist nichts zu tun, da K^5 sich selbst als Minor enthält.
Für $n > 5$: K^n enthält einen K^5 als Teilgraphen. Man muss lediglich $n - 5$ Ecken löschen. Also enthält auch der K^n für $n > 5$ einen K^5 als Minor. □

10 Chromatische Zahl

Kommen wir nun zu einem anderem Aspekt der Graphentheorie: Den Färbungen.

Definition 10.1. Sei $G = (E, V)$ ein Graph und S eine Menge. Eine Eckfärbung eines Graphen ist eine Abbildung $c\colon E \to S$ mit $c(x) \neq c(y)$, wenn x und y benachbart sind.
Ein Graph heißt k-färbbar, wenn es für $S = \{1, \ldots, k\}$ solch eine Färbung gibt.
Das minimale k, für den ein Graph G k-färbbar ist, heißt chromatische Zahl von G und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet.

Bemerkung 10.2. $\chi(K^n) = n$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$: Trivial.
Induktionsvorraussetzung: $\chi(K^m) = m$ für alle $m \leq n$, n fest
Induktionsschluss: $n \to n + 1$: Sei c eine Färbung von K^n. Nach Induktionsvorraussetzung brauchen wir für c bereits n Farben. Wir kommen von K^n auf K^{n+1} indem wir K^n mit K^1 multiplizieren. Jetzt haben wir $n + 1$ paarweise benachbarter Ecken, die gefärbt werden müssen. Da die n Ecken aus K^n bereits mit n verschiedenen Farben belegt sind, brauchen wir für die neue Ecke eine weiter Farbe. Also brauchen wir ingesamt $n + 1$ Farben. □

Bemerkung 10.3. $\chi(K_n) = 1$

Bemerkung 10.4. $\chi(K_{n_1,\ldots,n_r}) = r$

Beweis. Diesen Graphen können wir in r Partitionen unterteilen. Wir geben jeder Partition eine eigene Farbe. Damit ist gezeigt dass $\chi(K_{n_1,\dots,n_r}) \leq r$ gilt. Um zu zeigen, dass $\chi(K_{n_1,\dots,n_r}) = r$ gilt konstruieren wir einen Untergraphen von $K_{n_1,\dots,n_r}$, indem wir aus jeder Partition genau eine Ecke nehmen. Dieser Untergraph hat r Ecken und wegen der Definition von $K_{n_1,\dots,n_r}$ muss dieser vollständig sein. Dieser Untergraph ist also ein K^r. Damit folgt $\chi(K_{n_1,\dots,n_r}) = r$. □

Literatur

[1] R. Diestel. *Graphentheorie*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2006.