Die Kneser-Vermutung

Bernd Kuhlenschmidt (bernd.kuhlenschmidt@uni-muenster.de) 17. 12. 2008

1 Kneser-Graphen

Bei der Kneser-Vermutung handelt es sich um einen Satz aus der Kombinatorik. Dieser lässt sich in die Sprache der Graphentheorie übertragen und auf dieser Grundlage mit topologischen Methoden beweisen.

Satz 1.1 (Die Kneser-Vermutung)**.** *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Zusätzlich sei N eine Menge mit $|N| = n$ und N_k die Menge der k-elementigen Teilmengen von N, definiert durch $N_k = \{X \subseteq N : |X| = k\}$. Wir betrachten eine Abbildung, $f : N_k \to M$ mit $f(K_1) \neq f(K_2)$ für alle $K_1, K_2 \in N_k$ mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.*

Sei $m(k,n)$ die minimale Anzahl von Elementen in M, für die eine derartige Funktion $f : N_k \to M$ existiert. Dann gilt für $n \geq 2k-1$, dass $m(k,n) = n - 2k + 2$.

Um die Kneser-Vermutung in die Sprache der Graphentheorie zu übersetzen, werden folgende Definitionen eingeführt.

Definition 1.2 (Kneser-Graph)**.** Sei X eine endliche Menge, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X beschreibt. Dann ist der *Kneser-Graph* von $\mathcal{F}$ definiert als

$$\mathrm{KG}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 = \emptyset\}).$$

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ sei $\left(\begin{array}{c}[n]\\k\end{array}\right)$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $[n] := \{1, \ldots, n\}$. Den zugehörigen Kneser-Graphen bezeichnen wir mit $\mathrm{KG}_{n,k} := \mathrm{KG}\left(\left(\begin{array}{c}[n]\\k\end{array}\right)\right)$.

Definition 1.3 (Färbung von Graphen)**.** Eine k-Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to [k]$ mit $c(u) \neq c(v)$ für alle $u, v \in V$ mit $\{u, v\} \in E$.

Die *chromatische Zahl* von G, $\chi(G)$, ist das kleinste k für das G eine k-Färbung besitzt.

Beispiel 1.4.

1. In $\mathrm{KG}_{n,1}$ ist jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden, also $\chi(\mathrm{KG}_{n,1}) = n$.
2. $\mathrm{KG}_{2k-1,k}$ ist ein Graph ohne Kanten, also $\chi(\mathrm{KG}_{2k-1,k}) = 1$.
3. In $\mathrm{KG}_{2k,k}$ ist jede Menge ausschließlich mit ihrem Komplement verbunden, also $\mathrm{KG}_{2k,k} = 2$ für $k \geq 1$

Seminar „Diskrete Geometrie und Kombinatorik“, WS 2008/2009, WWU Münster

Es ergibt sich folgende Formulierung der Kneser-Vermutung:

Satz 1.5 (Lovász-Kneser)**.** *Für* $k > 0, n \geq 2k - 1$ *ist* $\chi\left(\mathrm{KG}_{n,k}\right) = n - 2k + 2$.

Im Beweis wird dieses Lemma benötigt:

Lemma 1.6. *Für jede Überdeckung* $F_1, \ldots, F_{n+1}$ *von* S^n*, wobei* F_i *für* $1 \leq i \leq n+1$ *offen oder abgeschlossen ist, existiert ein* i*, so dass* F_i *ein antipodales Paar* $x, -x$ *enthält.*

2 Verallgemeinerte Kneser-Graphen

Aus dem Beweis des Satzes von Lovász-Kneser ergibt sich die Möglichkeit eine untere Schranke für die chromatische Zahl von Kneser-Graphen beliebiger endlicher Mengensysteme herzuleiten.

Definition 2.1 (Hypergraph)**.** Ein *Hypergraph* $(X, \mathcal{F})$ besteht aus einer endlichen Menge X und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Definition 2.2 (Färbung eines Hypergraphen)**.** Eine *Färbung* eines Hypergraphen $(X, \mathcal{F})$ ist eine Abbildung $c : X \to [m]$, für die keine Menge $F \in \mathcal{F}$ nur aus Punkten einer Farbe besteht, d.h. $|c(F)| > 1$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

Definition 2.3 (m-Färbbarkeitsdefekt)**.** Der m-Färbbarkeitsdefekt eines Mengensystems X, $\mathrm{cd}_m(F)$, ist die Größe der kleinsten Teilmenge $Y \subset X$, so dass das System der Mengen von F, die disjunkt zu Y sind, m-färbbar ist, d.h.

$$\mathrm{cd}_m(\mathcal{F}) = \min\left\{|Y| : (X \backslash Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ ist } m\text{-färbbar}\right\}.$$

Satz 2.4 (Satz von Dol'nikov)**.** *Für jedes endliche Mengensystem* $(X, \mathcal{F})$ *gilt*

$$\chi(\mathrm{KG}(\mathcal{F})) \geq \mathrm{cd}_2(\mathcal{F})$$

Bemerkung 2.5. Der Satz von Dol'nikov verallgemeinert den Satz von Lovász-Kneser: Ist $\mathcal{F} = \left(\begin{array}{c}[n]\\k\end{array}\right)$, $n \geq 2k$ erhalten wir, wenn wir $n - 2k + 1$ beliebige Punkte aus $[n]$ herausnehmen das System aller k-elementigen Teilmengen einer $2k-1$-elementigen Menge.

Bei jeder 2-Färbung werden einer der beiden Farben mindestens k Punkte zugeordnet. Daher existiert keine gültige Färbung.

Also $\mathrm{cd}_2(\mathcal{F}) \geq n - 2k + 2$.

3 Schrijver-Graphen

Das folgende Resultat erlaubt eine Spezialisierung des Satzes von Lovász-Kneser:

Lemma 3.1 (Lemma von Gale). *Für alle $d \geq 0$ und alle $k \geq 1$ existiert eine Menge $X \subset S^d$, die aus $2k + d$ Punkten besteht, so dass jede offene Hemisphäre auf S^d mindestens k Punkte aus X enthält.*

Definition 3.2 (Schrijver-Graph). Eine Teilmenge $S \in \binom{[n]}{k}$ heißt *stabil*, wenn sie keine zwei Elemente enthält, die modulo n aufeinander folgend sind, d.h. für $i \in S$ gilt $i + 1 \notin S$ und für $n \in S$ gilt $1 \notin S$. Sei $\binom{[n]}{k}_{\text{stab}}$ die Familie stabiler k-elementiger Teilmengen aus $[n]$.

Der *Schrijver-Graph* ist definiert als

$$\mathrm{SG}_{n,k} := \mathrm{KG}\left(\binom{[n]}{k}_{\text{stab}}\right)$$

Satz 3.3 (Satz von Schrijver). *Für alle $n \geq 2k \geq 0$ gilt*

$$\chi\left(\mathrm{SG}_{n,k}\right) = \chi\left(\mathrm{KG}_{n,k}\right) = n - 2k + 2$$

4 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Zeige, dass $\mathrm{KG}_{n,k}$ keine ungeraden Zyklen einer kürzeren Länge als $1 + 2\left\lceil \frac{k}{n-2k} \right\rceil$ hat.

Aufgabe 4.2. Beweise den Satz von Dol'nikov für Mengensysteme $\mathcal{F}$ mit $\chi\left(\mathrm{KG}\left(\mathcal{F}\right)\right) \leq 2$ über ein direktes kombinatorisches Argument.

Aufgabe 4.3. Zeige, dass sich jeder Graph G als Kneser-Graph auffassen lässt, indem ein Mengensystem $\mathcal{F}$ konstruiert wird, so dass $\mathrm{KG}\left(\mathcal{F}\right)$ isomorph zu G ist.

Literatur

[1] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.

[2] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.