# Übungsaufgaben

PD Dr. M. Joachim/Dr. C. Löh Dezember 2008

---

**Aufgabe 1** (Ein Satz von Borsuk-Ulam für den Torus? [M; Exercise 2.1.10])**.**

1. Zeige, daß folgendes Analogon des Satzes von Borsuk-Ulam im allgemeinen *nicht* gilt: Für jede stetige Abbildung $f\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ gibt es einen Punkt $(x, y) \in S^1 \times S^1$ mit $f(x, y) = f(-x, -y)$.
2. Zeige, daß es aber für jede stetige Abbildung $f\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ einen Punkt $(x, y) \in S^1 \times S^1$ mit $f(x, y) = f(-x, -y)$ gibt.
3. Finde geeignete Verallgemeinerungen!

**Aufgabe 2** (Der Borsuk-Graph [M; Exercise 2.1.9])**.** Zu $\alpha \in (0, 2)$ und $n \in \mathbf{N}$ ist der *Borsuk-Graph* $B(n + 1, \alpha)$ der wie folgt gegebene (unendliche) Graph:

– Die Ecken von $B(n + 1, \alpha)$ sind die Punkte von $S^n$.

– Zwei Ecken $x$ und $y$ von $B(n + 1, \alpha)$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Abstand von $x$ und $y$ bezüglich der Standardmetrik auf $S^n$ mindestens $\alpha$ ist.

Zeige, daß der Satz von Borsuk-Ulam in Dimension $n$ dazu äquivalent ist, daß die chromatische Zahl für alle $\alpha \in (0, 2)$ die Abschätzung $\chi\bigl(B(n+1, \alpha)\bigr) \geq n+2$ erfüllt.

**Aufgabe 3** (Vierteilungen von Massenverteilungen [M; Exercise 3.1.1])**.** Zeige, daß jede Massenverteilung [M; Theorem 3.1.1] in der Ebene durch zwei Geraden in vier gleich große Teile zerlegt werden kann.

**Aufgabe 4** (Euklidische Räume [M; Exercises 4.3.1, 4.3.3])**.** Seien $m$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Zeige, daß $S^m$ und $S^n$ genau dann homotopieäquivalent sind, wenn $m = n$.

   *Hinweis:* Ist ein topologischer Raum zu einem $n$-zusammenhängenden Raum homotopieäquivalent, so ist er selbst auch $n$-zusammenhängend.
2. Folgere, daß $\mathbf{R}^m$ und $\mathbf{R}^n$ genau dann homöomorph sind, wenn $m = n$ ist.

**Aufgabe 5** ($\mathbf{Z}/2$-Index – Beispiele [M; Exercises 5.3.1, 5.3.2])**.**

1. Gib zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein Beispiel eines freien $\mathbf{Z}/2$-Raumes $X$, der nicht $(n-1)$-zusammenhängend ist, mit $\operatorname{ind}_{\mathbf{Z}/2}(X) = n$.
2. Gib ein Beispiel eines freien $\mathbf{Z}/2$-Raumes $X$ mit $\operatorname{ind}_{\mathbf{Z}/2}(X) = \infty$.

**Aufgabe 6** (Die Ungleichung von Sarkaria [M; Exercise 5.7.1])**.** Gib ein Beispiel eines endlichen $\mathbf{Z}/2$-Komplexes $L_0$ und eines $\mathbf{Z}/2$-Unterkomplexes $L$ von $L_0$ mit der Eigenschaft, daß Sarkarias Ungleichung strikt ist, d.h., daß

$$\operatorname{ind}_{\mathbf{Z}/2}(L) > \operatorname{ind}_{\mathbf{Z}/2}(L_0) - \operatorname{ind}_{\mathbf{Z}/2}(\Delta(L_0 \setminus L)) - 1.$$

---

Seminar „Diskrete Geometrie und Kombinatorik“, WS 2008/2009, WWU Münster

[M] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.