

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh

Blatt 0 vom 15. April 2016

Aufgabe 1 (Unabhängigkeit). Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel (u, v, w, x) von Punkten, wobei die Punkte u, v , die Punkte v, w , die Punkte w, x und die Punkte x, u je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist (u, v, w, x) ein Viereck in Mini-Geometrie, so ist (u, v, w) ein Dreieck in Mini-Geometrie.
2. Ist (x, y, z) ein Dreieck in Mini-Geometrie, so ist (x, y, z, z) ein Viereck in Mini-Geometrie.

Aufgabe 2 (endliche Mini-Geometrie-Modelle). Ein Modell (P, G, \sqsubset) von Mini-Geometrie ist *endlich*, wenn die Menge P endlich ist.

1. Zeigen Sie: Ist (P, G, \sqsubset) ein endliches Modell für Mini-Geometrie, so ist auch G eine endliche Menge.
2. Gilt auch die Umkehrung? D.h. ist jedes Modell (P, G, \sqsubset) von Mini-Geometrie mit endlicher Menge G bereits endlich?

Aufgabe 3 (kleine Mini-Geometrien).

Behauptung. Bis auf Isomorphie von Mini-Geometrien gibt es höchstens ein Mini-Geometrie-Modell (P, G, \sqsubset) mit $|P| = 4$ und $|G| = 2$.

Beweis. Seien $M = (P, G, \sqsubset)$ und $M' = (P', G', \sqsubset')$ Modelle von Mini-Geometrie mit $|P| = 4 = |P'|$ und $|G| = 2 = |G'|$. Dann gibt es also Bijektionen $f: P \rightarrow P'$ und $F: G \rightarrow G'$. Seien $f': P' \rightarrow P$ und $F': G' \rightarrow G$ die inversen Bijektionen. Dann sind $(f, F): M \rightarrow M'$ und $(f', F'): M' \rightarrow M$ zueinander inverse Isomorphismen von Mini-Geometrien. \square

Gibt es an dem obigen Beweis etwas auszusetzen? Ist die behauptete Aussage überhaupt wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Gradsummen).

1. Sei $X = (V, E)$ ein Graph. Ist $v \in V$, so nennen wir

$$\deg v := |\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

den *Grad von v (in X)*. Zeigen Sie: Ist (V, E) ein Graph mit endlich vielen Knoten, so gilt

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|.$$

2. Folgern Sie: Die Anzahl der Menschen, die heute einer ungeraden Anzahl von Menschen die Hand geschüttelt haben, ist gerade.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Die Schule von Athen).



1. Woher kennen Sie dieses Bild?
2. Wo sind auf diesem Bild Platon, Aristoteles, Pythagoras und Euklid dargestellt?
3. Warum ist Hilbert (der Mathematiker mit Hut) nicht abgebildet?

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen