Übungen zur Geometrie

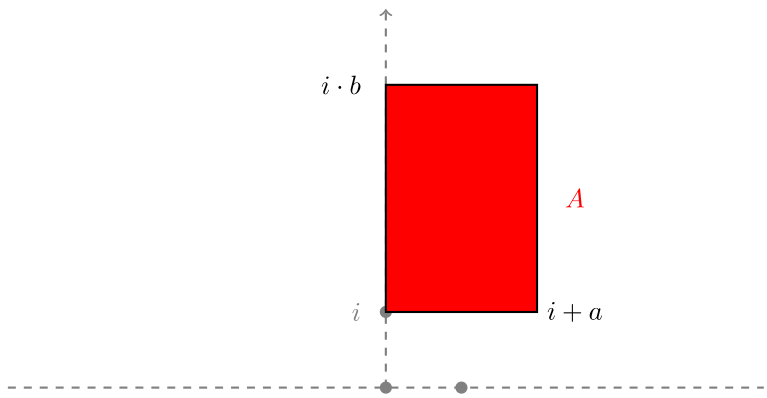
Prof. Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 1. Juli 2016

Aufgabe 1 (Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Gruppe $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ wird von
$$\{f_A \mid A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\} \cup \{z \mapsto -\overline{z} + 2\}$$
erzeugt.
2. Die Gruppe $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ wird von
$$\{z \mapsto -\overline{z} + b \mid b \in \mathbb{R}\}$$
erzeugt.

Aufgabe 2 (Flächenwachstum von hyperbolischen Kreisscheiben)**.**

1. Zu $c \in \mathbb{R}_{>0}$ sei
$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto i + t \cdot c \cdot (1+i). \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \ln(1+c)$.
2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $d_H(i, i+a) \leq 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \ln(1 + a/2)$.
3. Zu $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \in \mathbb{R}_{>1}$ sei $A := \bigl\{x + i \cdot y \in H \bigm| x \in [0,a],\ y \in [1,b]\bigr\} \subset H$. Zeigen Sie, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = a \cdot \Bigl(1 - \frac{1}{b}\Bigr).$$



4. Sei $r \in \mathbb{R}_{>10}$. Folgern Sie, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(B_i^{(H,d_H)}(r)\bigr) \geq e^{\frac{r}{10}} \cdot (1 - e^{-\frac{r}{2}}).$$
Hinweis. Betrachten Sie ein geeignetes Rechteck wie in Teil 3.

Aufgabe 3 (hyperbolische Isometrien sind flächentreu)**.** Sei $A \subset H$ messbar und $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A) \subset H$ messbar ist und, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(f(A)\bigr) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A).$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Cirkellimiet III)**.** Betrachten Sie den Holzschnitt *Cirkellimiet III* von M.C. Escher:

http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iii/

Falls die abgebildeten Vierecke/Dreiecke jeweils kongruente geodätische reguläre hyperbolische Vierecke/Dreiecke (im Scheibenmodell) sind, können dann die weißen Linien hyperbolische geodätische Geraden sein? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Winkel?!

Bonusaufgabe (Papiermodell)**.** Schneiden Sie hinreichend viele kongruente reguläre (euklidische) Dreiecke aus und verkleben Sie diese anhand der Kombinatorik, die von einer Pflasterung der hyperbolischen Ebene durch reguläre Dreiecke mit Winkel $45°$ (also $\pi/4$) beschrieben wird.

Skizzieren Sie wie man darauf aufbauend Unterrichtsmaterial für Schüler der gymnasialen Mittelstufe zur hyperbolischen Ebene erstellen kann. Welche Eigenschaften der hyperbolischen Ebene lassen sich gut an diesem Experiment illustrieren? Welche nicht?

Abgabe bis zum 8. Juli 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Dies ist das letzte Übungsblatt, das regulär in die Wertung eingeht.
Lösungen zu den Blättern 13 und 14 können auch abgegeben werden
und zählen dann als Bonuspunkte.