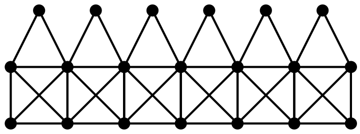
Übungen zur Geometrie

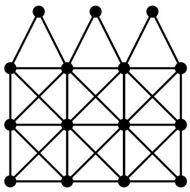
Prof. Dr. C. Löh | Blatt 3 vom 29. April 2016

Aufgabe 1 (die Villa des Nikolaus)**.** Die untenstehenden Skizzen von Graphen spezifizieren jeweils, wieviele Knoten es gibt und welche Knoten durch Kanten verbunden sind. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das sechsfache Nikolaushaus (siehe unten) ist planar.



2. Das dreifache Nikolaushochhaus (siehe unten) ist planar.



Aufgabe 2 (Sechsfarbensatz)**.** Beweisen Sie den Sechsfarbensatz: Für jeden endlichen planaren Graphen (V, E) gibt es eine Abbildung $c \colon V \longrightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit

$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

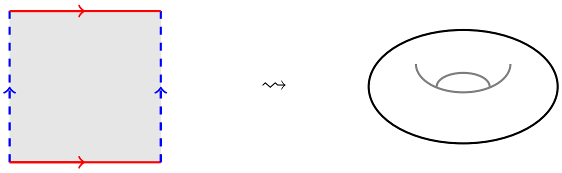
Hinweis. Gehen Sie induktiv vor und betrachten Sie Knoten von niedrigem Grad.

Aufgabe 3 (Fünf Provinzen)**.** König Quintrix herrscht über ein Reich, bestehend aus fünf zusammenhängenden Provinzen, wobei je zwei dieser Provinzen eine gemeinsame Grenze besitzen.

1. Kann sich das Reich von Quintrix auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planeten befinden? Oder auf einer Scheibe?

2. Kann sich das Reich von Quintrix auf der Oberfläche eine Torus-Planeten befinden?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
Hinweis. Den Torus erhält man durch folgende Verklebung der Seiten eines Quadrats; es kann hilfreich sein, Skizzen in dieser Quadratansicht zu erstellen.



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Einbettbarkeit in $\mathbb{R}^3$)**.** Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph in $\mathbb{R}^3$ (sogar mit geraden Kanten!) eingebettet werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

die sogenannte *Momentenkurve*.

1. Skizzieren Sie die Momentenkurve in $\mathbb{R}^3$.
2. Seien $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ und sei

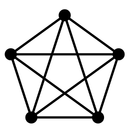
$$M(t_1, \dots, t_4) := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie: Sind die vier Zahlen $t_1, \dots, t_4$ alle verschieden, so ist

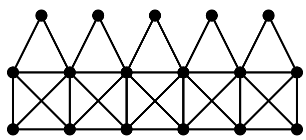
$$\det M(t_1, \dots, t_4) \neq 0.$$

3. Schließen Sie daraus: Sind $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ vier verschiedene Zahlen, so liegen die Punkte $\mu(t_1), \dots, \mu(t_4)$ *nicht* in einer gemeinsamen Ebene in $\mathbb{R}^3$.
4. Folgern Sie: Indem man die Knoten auf die Momentenkurve abbildet und diese Punkte dann durch den Kanten entsprechenden Strecken verbindet, erhält man für jeden endlichen Graphen eine Einbettung nach $\mathbb{R}^3$.

Bonusaufgabe (Makros)**.** Schreiben Sie ein LaTeX-Makro \completegraph und ein LaTeX-Makro \nikolaus, so dass \completegraph{n} bzw. \nikolaus{n} für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ den vollständigen Graphen K_n bzw. das n-fach iterierte Nikolaushaus zeichnet:



\completegraph{5}



\nikolaus{5}

Erklären Sie auch die Funktionsweise Ihrer Makros.
Hinweis. Es könnte sich anbieten, das LaTeX-Paket tikz zu verwenden.

Abgabe bis zum 6. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen