Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh

Blatt 7 vom 27. Mai 2016

Aufgabe 1 (Krümmung vs. Isometrie)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\gamma \colon I \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve und sei $f \colon V \longrightarrow V$ eine (lineare) Isometrie. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Dann ist auch $f \circ \gamma \colon I \longrightarrow V$ nach Bogenlänge parametrisiert.
2. Es gilt $\|\kappa_{f\circ\gamma}(t)\| = \|\kappa_\gamma(t)\|$ für alle $t \in I^\circ$.

Aufgabe 2 (Kurven-Energie)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma \colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann definieren wir die *Energie von* γ durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 \, dt.$$

(Der Vorfaktor 1/2 ist dabei aus der Physik motiviert.)

1. Zeigen Sie, dass
   $$L(\gamma)^2 \leq 2 \cdot (T_1 - T_0) \cdot E(\gamma),$$
   wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn die Funktion $\|\dot\gamma\|$ konstant ist.

   Hinweis. Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auf einem geeigneten Funktionenraum.
2. Was bedeutet das in der Praxis? (Zum Beispiel beim Autofahren ...)

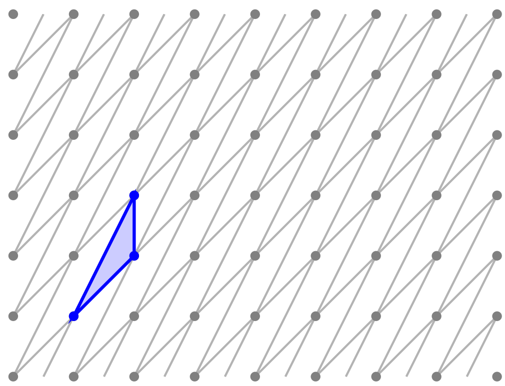
Aufgabe 3 (kleine Dreiecke)**.** Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten

$$\Delta(x, y, z) := \{t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0, 1], t_x + t_y + t_z = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nehmen an, dass $\Delta(x, y, z)$ außer x, y, z keine weiteren Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält. Zeigen Sie, dass

$$\bigl|\det(y - x, z - x)\bigr| = 1.$$

Hinweis. Warum ist $(y - x, z - x)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$?



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Winkel für Schüler)**.** Geben Sie mathematisch exakte Definitionen der folgenden Begriffe der ebenen euklidischen Geometrie und zwar so, dass ein Schüler der Klassen 5 bis 7 sie verstehen kann. Sie dürfen dabei Abstände zwischen Punkten als bekannt voraussetzen sowie Halbstrahlen.

1. Kreis

2. Winkel zwischen zwei Halbstrahlen.

Illustrieren Sie Ihre Erklärungen durch geeignete Bilder und Beispiele!
Hinweis. Es ist natürlich *nicht* davon auszugehen, dass Schüler der Klassen 5 bis 7 die trigonometrischen Funktionen cos bzw. arccos kennen.

Bonusaufgabe (Loch Ocht)**.** Der schottische See Loch Ocht ist kreisförmig mit einem Radius von einer Meile. Aufgrund des dichten Nebels ist überhaupt nur erkennbar, was weniger als eine Meile entfernt ist. In diesem See leben acht Ungeheuer (sogenannte Ochties), die ihren Hals und Kopf, ihrem großen Vorbild Nessie nacheifernd, aus dem See recken. Zeigen Sie, dass es dann zwei Ochties gibt, die sich sehen können.
Hinweis. Extremalprinzip!

Abgabe bis zum 3. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen