Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 3. Juni 2016

Aufgabe 1 (Translationen vs. Spiegelungen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

die Translation um a. Im folgenden betrachten wir Spiegelungen bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Man kann f in eine Komposition von genau 2016 Spiegelungen zerlegen.
2. Man kann f in eine Komposition von genau 2017 Spiegelungen zerlegen.

   Hinweis. „Determinante!" sagte die Tante, die alle Invarianten kannte.

Aufgabe 2 (Isometrien vs. Spiegelungen)**.**

1. Zu $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi]$ sei

   $$\begin{aligned} R_\alpha\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass man R_α als Komposition von Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$ (bzgl. Standardskalarprodukt) schreiben kann. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\operatorname{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ als Komposition von endlich vielen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. Standardskalarprodukt) geschrieben werden kann.

   Hinweis. Welche Normalformen/Spektralsätze für orthogonale Matrizen kennen Sie aus der Linearen Algebra?

Aufgabe 3 (Kongruenzsätze)**.**

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
2. Beweisen Sie den Kongruenzsatz SsW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 4 (Gleichseitigkeit für alle!)**.** Der imperiale Hofmathematiker Isosceles des Trigon Empire hat die auf der Rückseite abgedruckte Arbeit vorgelegt. Was ist schiefgelaufen? Erklären Sie genau, was korrekt ist und was nicht.

Bonusaufgabe (Lehrplan)**.** Finden Sie online den Lehrplan Mathematik für Gymnasien in Bayern und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie oft treten die Wörter „Beweis" und „Definition" im Lehrplan auf?
2. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für die Zukunft des Fachs „Mathematik" an Gymnasien?

Abgabe bis zum 10. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

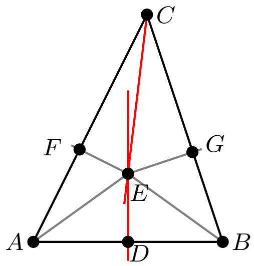
Satz (Großartiger Gleichseitigkeitssatz von Isosceles)**.** Jedes geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist gleichseitig, d.h.: Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei verschiedene Punkte, so gilt

$$\|A - B\|_2 = \|B - C\|_2 = \|C - A\|_2.$$

Beweis. Angenommen, die drei Seiten wären absurderweise nicht alle gleich lang, ohne Einschränkung etwa $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$.

Sei w die Winkelhalbierende an der Ecke C, d.h. w ist eine Gerade durch C und die Winkel zwischen w und $A - C$ bzw. zwischen w und $B - C$ sind gleich groß. Sei m die Mittelsenkrechte zu A und B, d.h. m ist orthogonal zu $B - A$ und geht durch $D := 1/2 \cdot (A + B)$.

Wegen $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$ haben m und w genau einen Schnittpunkt E. Sei F der Schnittpunkt der zu $A - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch A und C, und sei G der Schnittpunkt der zu $B - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch B und C.



Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

1. Nach Pythagoras ist $\|E - A\|_2 = \|E - B\|_2$, da m zu $B - A$ orthogonal ist und da $\|D - A\|_2 = 1/2 \cdot \|B - A\|_2 = \|D - B\|_2$.
2. Es gilt $\sphericalangle(G - E, C - E) = \sphericalangle(F - E, C - E)$; dies folgt aus der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken sowie der Konstruktion von w als Winkelhalbierende und von F bzw. G als Lotfußpunkte. Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir daher

$$\|F - C\|_2 = \|G - C\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|E - F\|_2 = \|E - G\|_2.$$

3. Mit den ersten beiden Schritten und Pythagoras folgt dann außerdem

$$\|A - F\|_2 = \|B - G\|_2.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

– Der Punkt E liegt innerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= \|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= \|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$

– Der Punkt E liegt außerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= -\|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= -\|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$

Es folgt also $\|A - C\|_2 = \|B - C\|_2$, im Widerspruch zu unserer grotesken Annahme. ■