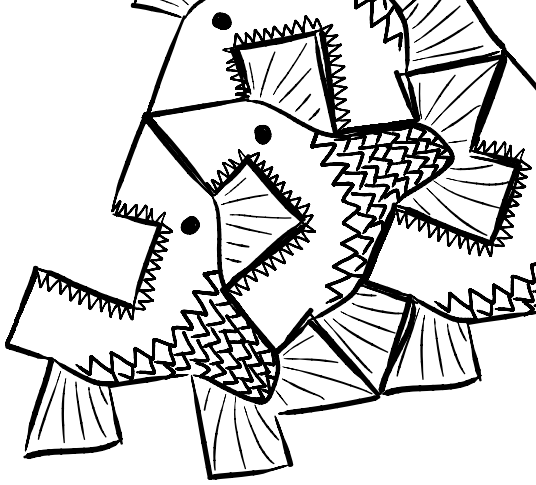
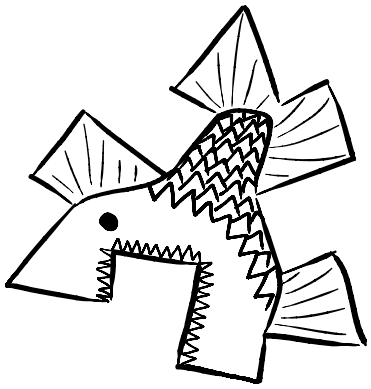
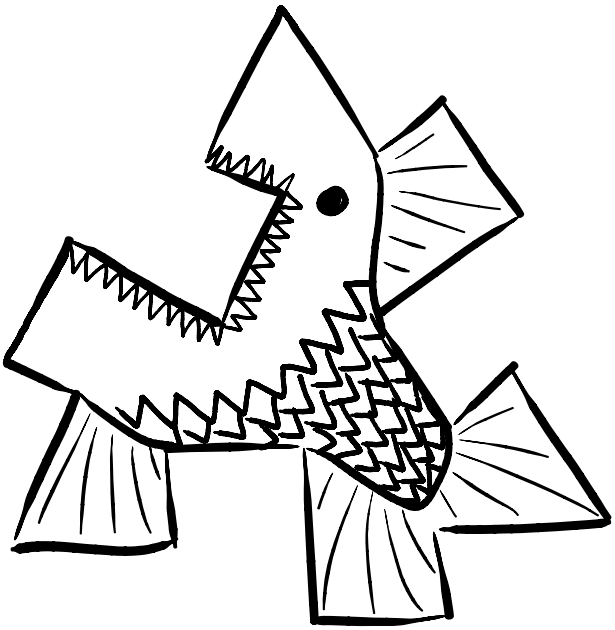




Geometrie

Lehramt Gymnasium
Sommersemester 2016

Clara Löh



Version vom 21. Juli 2016

clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise vii

0 Einführung: Was ist Geometrie? 1

1 Mini-Geometrie 5

1.1 Axiomatische Geometrie 6
1.2 Axiome der Mini-Geometrie 8
1.3 Axiome vs. Modelle 10
1.4 Symmetrie 14
1.5 Der geometrische Blickwinkel 17
1.5.1 Ramsey-Zahlen 18
1.5.2 Das Spiel SET 19
1.5.3 Strategie via Symmetrie 20
1.5.4 Der Heiratssatz 22
1.6 Der eulersche Polyedersatz 25
1.6.1 Geometrische Realisierung von Graphen 26
1.6.2 Der eulersche Polyedersatz 29
1.7 Ausblick 35

2 Metrische Geometrie 37

2.1 Metrische Räume 38
2.2 Geodäten 42
2.3 Länge von Kurven 46
2.4 Kreise und Konstruierbarkeit 49

2.5 Symmetrie 54
2.6 Das Extremalprinzip 56

3 Euklidische Geometrie 61
3.1 Normierte Räume und Skalarprodukte 62
3.1.1 Normierte Räume 62
3.1.2 Skalarprodukte 63
3.1.3 Orthogonalität 64
3.2 Kurven 67
3.2.1 Analytische Grundlagen 67
3.2.2 Länge von Kurven 68
3.2.3 Krümmung von Kurven 72
3.3 Winkel 75
3.4 Symmetrie 83
3.4.1 Winkeltreue 83
3.4.2 Die euklidische Isometriegruppe 85
3.4.3 Kongruenz 86
3.4.4 Reguläre Polygone und reguläre Polyeder 88
3.4.5 Das Banach-Tarski-Paradoxon 94
3.5 Pflasterungen der euklidischen Ebene 97
3.5.1 Reguläre Pflasterungen der Ebene 98
3.5.2 Aperiodische Pflasterungen der Ebene 99

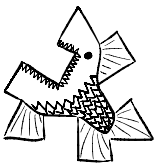
4 Elementare riemannsche Geometrie 103
4.1 Was ist riemannsche Geometrie? 104
4.1.1 Wozu riemannsche Geometrie? 104
4.1.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündel 105
4.1.3 Riemannsche Metriken 106
4.1.4 Metriken aus riemannschen Metriken 107
4.2 Konstruktion der hyperbolischen Ebene 108
4.3 Länge von Kurven 109
4.4 Symmetrie 114
4.4.1 Riemannsche Isometrien 114
4.4.2 Möbiustransformationen 115
4.4.3 Transitivität der Möbiustransformationen 119
4.4.4 Geodäten der hyperbolischen Ebene 121
4.4.5 Winkel 125
4.4.6 Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene 127
4.5 Hyperbolische Dreiecke 129
4.5.1 Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet 129
4.5.2 Hyperbolische Dreiecke sind dünn 137
4.6 Vergleich mit sphärischer Geometrie 140

5 Grobe Geometrie 147
5.1 Was ist grobe Geometrie? 148
5.1.1 Wozu grobe Geometrie? 148
5.2 Quasi-Isometrie 148
5.3 Hyperbolische metrische Räume 154

A Anhang A 1
A.1 Hilberts Axiomatik A 2
A.2 Kategorien A 6
A.3 Funktoren A 9
A.4 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus A 12
A.5 Penrose-Puzzle A 14
A.6 Der rote Faden A 17

B Übungsblätter B 1

Literaturverzeichnis C 1



Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Axiomatische Geometrie

- F. Borceux. *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy I*, Springer, 2013.
- Euklid. *Στοιχεῖα*.
  Altgriechisch: http://www.physics.ntua.gr/∼mourmouras/euclid/index.html
  Deutsche Übersetzung von J.F. Lorenz (1781, Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses):
  http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925_00005.html
- D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, fünfte Auflage, Vieweg+Teubner, 1922.

Graphentheorie

- R. Diestel. *Graph Theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.
- J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

Metrische und grobe Geometrie

- M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.
- M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1999.
- C. Löh. *Geometric Group Theory, an Introduction*, Vorlesungsskript, Universität Regensburg, 2015.
  http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/ggt_ws1415/lecture_notes.pdf

Hyperbolische Geometrie

- J. Andersen. *Hyperbolic Geometry*, zweite Auflage, Universitext, Springer, 2005.
- C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*, zweite Auflage, De Gruyter, 2010.
- R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer, 1992.

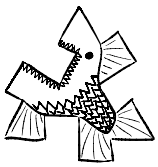
Grundlagen

- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
- P.J. Cameron. *Sets, Logic and Categories*, Universitext, Springer, 1998.
- R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010.

Weiterführende Literatur

- E.A. Abbott. *Flatland, A Romance of Many Dimensions*, Dover Publications, 1992.
- M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004.
- D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959–2009*, Problem Books in Mathematics, zweite Auflage, Springer, 2011.
- M.C. Escher. *M.C. Escher – The official website*,
  http://www.mcescher.com/

- D.R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, 20 anniversary edition, Basic Books, 1999.
- J.M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics, Band 176, Springer, 1997.
- Polytron Corporation. *FEZ*, Computerspiel
  http://fezgame.com/
- Ustwo. *Monument Valley*, Computerspiel
  http://www.monumentvalleygame.com/



0

Einführung: Was ist Geometrie?

Das Wort *Geometrie* besteht aus zwei, altgriechischen, Komponenten:

- $\gamma\widetilde{\eta}$: die Erde
- $\mu\varepsilon\tau\varrho\varepsilon\widetilde{\iota}\nu$: messen

Die Geometrie hat sich von ihren Ursprüngen in der Landvermessung zu einem außerordentlich vielseitigen mathematischen Gebiet entwickelt. Einerseits helfen Methoden aus der Analysis, Algebra, Topologie, ... geometrische Fragestellungen zu beantworten; andererseits sind geometrische Argumente oft der Schlüssel zur Lösung von Problemen aus anderen Gebieten der Mathematik; zum Beispiel trägt die sogenannte arithmetische Geometrie zur Lösung zahlentheoretischer Probleme bei.

Eine naheliegende Beschreibung von Geometrie wäre, dass Geometrie der Teil der Mathematik ist, der sich mit der Untersuchung geometrischer Objekte befasst. Aber was sind geometrische Objekte? Diese Frage führt zu vielen weiteren grundsätzlichen Fragen über die Fundamente der Mathematik und hat in der historischen Entwicklung der Geometrie eine Schlüsselrolle eingenommen. In der modernen Mathematik gibt es so viele Varianten von Theorien mit geometrischen Einflüssen, dass die Beantwortung dieser Frage immer vom Blickwinkel und vom Kontext des Betrachters abhängt. Zum Beispiel fällt die Untersuchung der Algebra der komplexwertigen stetigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum je nach Blickwinkel in die Analysis, in die Topologie, in die Algebra oder in die Geometrie.

In dieser Vorlesung werden wir verschiedene Facetten der Geometrie, ihre Bezüge zu anderen mathematischen Gebieten sowie ihre Anwendungen ken-

nenlernen. Insbesondere werden wir uns mit Symmetrien und lokalen und globalen Krümmungsphänomenen beschäftigen. Typische Fragen in der Geometrie sind:

- Was sind eigentlich Punkte, Geraden, Dreiecke, Winkel ...?
- In welchem Verhältnis können Geraden zueinander stehen?
- Wie einzigartig ist die euklidische Geometrie?
- Wie kann man die Ebene pflastern?
- Kann man längentreue ebene Landkarten zeichnen?
- Wie kann man mit geometrischen Methoden Spiele gewinnen?

Wie jede mathematische Theorie besitzt auch die Geometrie zwei natürliche Zugänge:

- einen axiomatischen Zugang und
- einen konkreten Zugang.

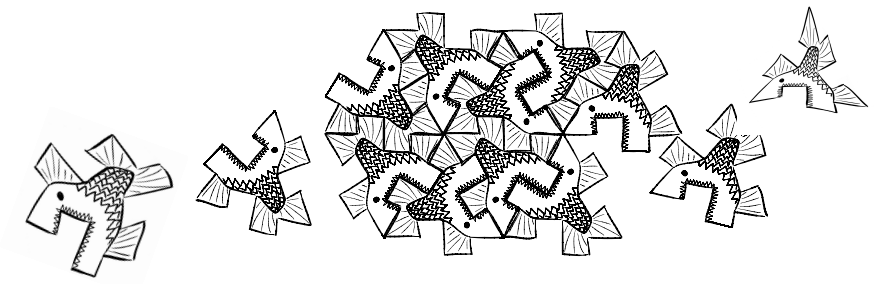
Im axiomatischen Zugang wird die klassische Geometrie ausgehend von wenigen Axiomen entwickelt; dieser Zugang geht auf das zusammenfassende Werk von Euklid zurück. Im konkreten Zugang wird die Geometrie in konkreten Modellen (zum Beispiel der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$) entwickelt. Während der axiomatische Zugang konzeptionell deutlicher macht, welche Phänomene auf welche Annahmen zurückzuführen sind, ist der konkrete Zugang unter Verwendung der modernen Methoden der Analysis und Algebra oft bequemer und besitzt andere Möglichkeiten der Verallgemeinerung (zum Beispiel in der riemannschen oder groben Geometrie).

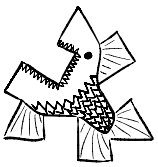
Wir werden in dieser Vorlesung einen Mittelweg gehen. Wir werden zunächst kurz auf die axiomatische Sichtweise eingehen und dann den Schwerpunkt auf die metrische Geometrie legen. Wir werden daher strukturell in folgender Reihenfolge vorgehen und die Anwendungen jeweils an geeigneter Stelle behandeln:

- axiomatische Geometrie und Mini-Geometrie
- metrische Geometrie
- normierte Geometrie
- elementare riemannsche Geometrie
- grobe Geometrie

Auf ganz natürliche Weise werden wir dabei Begriffen und Themen aus der Schulmathematik begegnen sowie auch Aspekten der Geometrie, die in Zukunft Bestandteil der Schulmathematik werden könnten. Wichtiger als die

Beherrschung des aktuellen Lehrplans ist es, ein solides Fundament der Geometrie zu erlernen, das es erlaubt, Geometrie inhaltlich korrekt, nachvollziehbar und souverän zu lehren und auf das der Unterricht im Rahmen des aktuellen und der zukünftigen Lehrpläne aufbauen kann.





1

Mini-Geometrie

Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion axiomatischer Geometrie und den Axiomen einer sehr übersichtlichen, kombinatorischen Geometrie, der Mini-Geometrie. Bereits an der Mini-Geometrie lassen sich viele zentrale Phänomene der Geometrie illustrieren: Zunächst werden wir den axiomatischen Standpunkt etwas ausbauen und Grundbegriffe der Modelltheorie einführen; mit der Sprache der Modelltheorie lässt sich insbesondere die historisch für die Entwicklung der Geometrie entscheidende Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms formulieren. Danach studieren wir den Begriff der Symmetrie. Wir werden erste Anwendungen kombinatorischer Geometrie kennenlernen, in denen der geometrischen Blickwinkel auf andere Gebiete eine tragende Rolle spielt. Zum Abschluss konzentrieren wir uns auf die eulersche Polyederformel – einem weitreichenden Satz aus der geometrischen Graphentheorie.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1	Axiomatische Geometrie	6
1.2	Axiome der Mini-Geometrie	8
1.3	Axiome vs. Modelle	10
1.4	Symmetrie	14
1.5	Der geometrische Blickwinkel	17
1.6	Der eulersche Polyedersatz	25
1.7	Ausblick	35

Schlüsselbeispiel. Vektorräume, Graphen

1.1 Axiomatische Geometrie

Im axiomatischen Zugang zur Geometrie wird die klassische ebene und räumliche Geometrie ausgehend von wenigen Axiomen entwickelt; dieser Zugang geht auf das zusammenfassende Werk von Euklid [20] (ca. 3. Jahrhundert vor Christus, Alexandria) zurück.

Euklids *Elemente* tragen bereits die charakteristische Struktur rigoroser mathematischer Texte: Sie bestehen systematisch aus

- Definitionen
- Postulaten, Axiomen
- Sätzen, die daraus hergeleitet werden.

Das Erste Buch beginnt wie folgt [20]:

Definitionen

1. *Ein Punkt ist, was keine Theile hat.*
2. *Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.*
3. *Enden einer Linie sind Punkte.*
4. *Eine gerade Linie ist, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt.*
5. *Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.*

⋮

13. *Grenze heißt, was das Ende eine Dinges ist;*

⋮

35. *Parallel sind gerade Linien in einer Ebne, die, so weit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.*

Besondere Beachtung verdient das *Parallelenaxiom* (in der Übersetzung von Lorenz Axiom 11; im Original wohl eher Postulat 5):

> *Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.*

Im Gegensatz zu den anderen Postulaten und Axiomen ist das Parallelenaxiom auffällig unhandlich. Es wurde daher lange versucht, die folgende Frage zu beantworten:

Frage 1.1.1 (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms)**.** Kann das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen/Postulaten von Euklid abgeleitet werden?

Erst mit der Konstruktion der hyperbolischen Geometrie (Anfang des 19. Jahrhunderts) konnte diese Frage endgültig (negativ) beantwortet werden.

Während viele Beweisgerüste in Euklids Werk noch heute verwendet werden, hält die Formulierung der Definitionen dem modernen Anspruch an eine präzise Formalisierung nicht stand.

Hilbert hat 1899 die *Grundlagen der Geometrie* [23, 40] neu organisiert und formalisiert. Hilberts Formalisierung beruht auf drei Klassen von Objekten, nämlich *Punkten*, *Geraden* und *Ebenen*. Im Gegensatz zu Euklid löst er sich von einer konkreten Beschreibung dieser Objekte und spezifiziert nur axiomatisch wie sich diese zueinander verhalten. Diesen Blickwinkel soll er selbst wie folgt illustriert haben [7]:

> *„Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.“*

Hilberts Axiome teilen sich in die folgenden Gruppen ein (Anhang A.1):

I. Axiome der Verknüpfung

...

II. Axiome der Anordnung

...

III. Axiom der Parallelen

In einer Ebene α lässt sich durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu a durch den Punkt A.

IV. Axiome der Congruenz

...

V. Axiom der Stetigkeit

...

Hilbert zeigt, dass die euklidische Geometrie in $\mathbb{R}^3$ durch diese Axiome (bis auf Isomorphie) eindeutig festgelegt wird. Außerdem weist er nach, dass diese Axiome unabhängig voneinander sind.

1.2 Axiome der Mini-Geometrie

Wir beginnen nun mit der Formulierung der Axiome einer sehr übersichtlichen, kombinatorischen Geometrie, der Mini-Geometrie. Die Mini-Geometrie formalisiert eine einfache Geometrie, die aus Punkten, Geraden, und dem Verhältnis zwischen Punkten und Geraden besteht:

Definition 1.2.1 (Mini-Geometrie-Axiome)**.** Die Sprache der Mini-Geometrie enthält *Punkte*, *Geraden* und die Beziehung *„liegt auf“* zwischen Punkten und Geraden sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Mini-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

MG 1 Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine Gerade, so dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen.

MG 2 Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

Die Logik erster Stufe enthält die üblichen logischen Verknüpfungen und Quantoren (erster Stufe); außerdem nehmen wir die gängigen Axiome für die Gleichheitsbeziehung an. Genau genommen bilden Punkte, Geraden und „liegt auf“ Prädikate; wir wollen diese Formalisierung an dieser Stelle nicht bis ins letzte Detail ausführen.

Aufbauend auf den Axiomen der obigen Mini-Geometrie können wir weitere zentrale geometrische Begriffe einführen:

Definition 1.2.2 (Schnittpunkte von Geraden)**.** Ein Punkt x in Mini-Geometrie ist ein *Schnittpunkt* der Geraden g und h, wenn x auf g liegt und x auf h liegt.

Definition 1.2.3 (parallel)**.** Zwei Geraden in Mini-Geometrie heißen *parallel*, wenn sie keine Schnittpunkte haben.

Definition 1.2.4 (Dreieck, Anti-Dreieck)**.**

- Ein *Dreieck* in Mini-Geometrie ist ein Tripel (x, y, z) von Punkten x, y, z mit der Eigenschaft, dass je zwei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen; die Punkte x, y, z heißen *Eckpunkte* des Dreiecks (x, y, z). Ein Dreieck (x, y, z) ist *entartet*, wenn die Eckpunkte nicht alle verschieden sind.

- Ein *Anti-Dreieck* in Mini-Geometrie ist ein Tripel (x, y, z) von Punkte x, y, z mit der Eigenschaft, dass keine zwei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen; die Punkte x, y, z heißen *Eckpunkte* des Anti-Dreiecks (x, y, z). Ein Anti-Dreieck (x, y, z) ist *entartet*, wenn die Eckpunkte nicht alle verschieden sind.

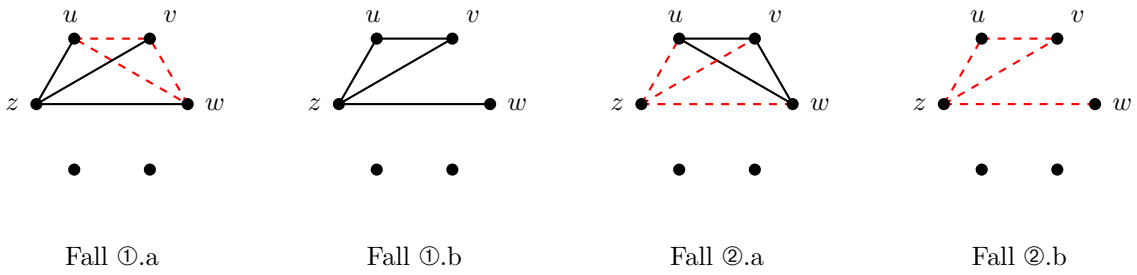


Abbildung 1.1.: Schematische Veranschaulichung der Situation in Beweis von Proposition 1.2.5; existente Geraden sind als schwarze Linien eingezeichnet, nicht-existente Geraden sind als rot gestrichelte Linien eingezeichnet.

Man beachte, dass in einem Dreieck in Mini-Geometrie die Seiten durch die Eckpunkte nach MG 1 bereits eindeutig bestimmt sind.

Zum Beispiel kann man den folgenden Satz über Dreiecke in Mini-Geometrie aus den Mini-Geometrie-Axiomen ableiten:

Proposition 1.2.5 (Mini-Ramsey)**.** *In Mini-Geometrie gilt: Es seien sechs verschiedene Punkte gegeben. Dann gibt es drei von diesen sechs Punkten, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden, oder es gibt drei von diesen sechs Punkten, die ein nicht-entartetes Anti-Dreieck bilden.*

Caveat 1.2.6. Man beachte, dass sich die beiden Alternativen im Mini-Ramsey-Satz *nicht* gegenseitig ausschließen! Eine Formulierung mit „entweder ... oder ...“ wäre also *nicht* korrekt.

Beweis. Sei z einer der sechs Punkte. Wir betrachten nun die Beziehung von z zu den fünf weiteren gegebenen Punkten. Nach dem Schubfachprinzip[1] (denn $5/2 > 2$) gibt es drei verschiedene Punkte u, v, w dieser fünf Punkte mit der Eigenschaft,

① dass jeder der Punkte u, v, w auf einer Geraden durch z liegt oder

② dass keiner der Punkte u, v, w auf einer Geraden durch z liegt.

Im Fall ① bilden entweder u, v, w ein Anti-Dreieck oder zwei dieser Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden, ohne Einschränkung seien dies u und v. Im letzteren Fall ist dann (z, u, v) ein nicht-entartetes Dreieck.

Im Fall ② bilden analog entweder u, v, w ein nicht-entartetes Dreieck oder es gibt zwei dieser Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen; zusammen mit z bilden diese beiden Punkte dann ein nicht-entartetes Anti-Dreieck. □

[1] Die einfachste Version des *Schubfachprinzips* lautet: Verteilt man $2 \cdot n + 1$ Objekte auf zwei Schubfächer, so enthält eines der beiden Schubfächer mindestens $n+1$ der Objekte.

Es ist verlockend, die Argumente im Beweis von Proposition 1.2.5 schematisch wie in Abbildung 1.1 zu veranschaulichen. Man muss sich jedoch dessen bewusst sein, dass Punkte und Geraden einer Mini-Geometrie im allgemeinen nichts mit klassischen Punkten und Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ zu tun haben (Bierseidel!) und diese Skizzen wirklich nur eine schematische Darstellung der Beziehung zwischen Punkten und Geraden sind.

1.3 Axiome vs. Modelle

Zentrale Fragen zu Axiomensystemen (nicht nur in der Geometrie) sind:

- Sind die Axiome erfüllbar? Auf wieviele Arten lassen sich die Axiome erfüllen?
- Welche Aussagen lassen sich aus den gegebenen Axiomen ableiten?
- Welche Aussagen gelten in allen Modellen, die die Axiome erfüllen? Ist das dieselbe Frage wie die vorige Frage?
- Braucht man wirklich alle dieser Axiome? Oder gibt es Abhängigkeiten zwischen den Axiomen?

Um diese Fragen diskutieren zu können, benötigen wir Grundbegriffe der Modelltheorie. Ein Modell eines Axiomensystems ist eine mengentheoretische Interpretation der Begriffe, die die geforderten Axiome erfüllt. Zum Beispiel sind Gruppen nichts anderes als mengentheoretische Modelle der Gruppenaxiome. Um den technischen Aufwand zu minimieren werden wir uns hier auf eine vereinfachte Version für Mini-Geometrie beschränken:

Definition 1.3.1 (Modell für Mini-Geometrie)**.** Ein *Modell für Mini-Geometrie* ist ein Tripel $(P, G, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge G und einer Relation $\sqsubset$ auf $P \times G$ mit folgender Eigenschaft: Interpretiert man die Elemente aus P als Punkte, die Elemente aus G als Geraden und die Relation $\sqsubset$ als „liegt auf“, so sind die Mini-Geometrie-Axiome aus Definition 1.2.1 erfüllt. Explizit bedeutet dies, dass $(P, G, \sqsubset)$ genau dann eine Mini-Geometrie ist, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

MG 1 Zu je zwei Punkten gibt es höchstens eine Gerade, so dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen, d.h.:

$$\forall_{x,y \in P} \quad \forall_{g,h \in G} \quad (x \neq y \wedge x \sqsubset g \wedge y \sqsubset g \wedge x \sqsubset h \wedge y \sqsubset h) \Longrightarrow g = h.$$

MG 2 Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte, d.h.:

$$\forall_{g \in G} \quad \exists_{x,y \in P} \quad x \neq y \wedge x \sqsubset g \wedge y \sqsubset g.$$

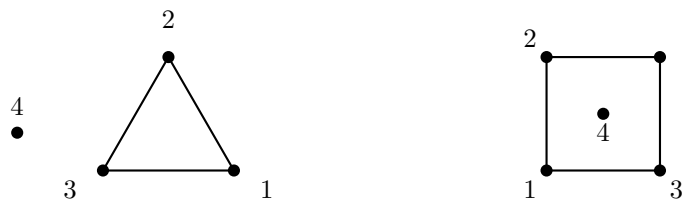


Abbildung 1.2.: Zwei schematische Darstellungen des folgenden Graphen: $\big(\{1,2,3,4\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}\big)$

In Modellen haben wir dann neben den Axiomen den gesamten Werkzeugkasten der Mengenlehre zur Verfügung. Zum Beispiel können wir dann definieren, dass eine Mini-Geometrie $(P, G, \sqsubset)$ *endlich* ist, wenn die Menge P endlich ist.

Die Frage nach der Erfüllbarkeit der Axiome ist nichts anderes als die Frage nach der Existenz von Modellen. Einige wichtige Beispiele für Mini-Geometrie-Modelle sind:

Beispiel 1.3.2 (affine Geraden in Vektorräumen)**.** Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Dann ist das durch

$$\big(V, \{v + U \mid U \subset V \text{ ist ein eindimensionaler } K\text{-Unterraum}, v \in V\}, \in\big)$$

definierte Tripel $A(V)$ eine Mini-Geometrie. Zum Beispiel erhält man so durch $A(\mathbb{R}^2)$ bzw. $A(\mathbb{R}^3)$ die gewöhnlichen Begriffe für Punkte und Geraden in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 1.3.3 (Graphen)**.** Ein *Graph* ist ein Paar $X = (V, E)$, wobei V eine Menge und E eine Menge von zwei-elementigen Teilmengen von V ist; wir nennen die Elemente von V *Knoten von* X und die Elemente von E *Kanten von* X. Graphen werden oft wie in Abbildung 1.2 veranschaulicht; essentiell ist jedoch immer nur die Kombinatorik der Knoten und Kanten, *nicht* die konkrete bildliche Darstellung.

Ist X ein Graph, so ist

$$(V, E, \in)$$

eine Mini-Geometrie. Genauer gesagt entsprechen Graphen genau den Mini-Geometrien, in denen jede Gerade genau zwei Punkte enthält.

Beispiel 1.3.4 (projektive Ebene)**.** Sei K ein Körper und

$$P^2(K) := \{K \cdot v \mid v \in K^3 \setminus \{0\}\}$$

die zugehörige projektive Ebene. Dann ist das durch

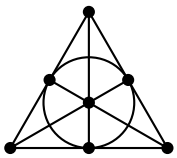


Abbildung 1.3.: Die Fano-Ebene, schematisch; jede Gerade in dieser Mini-Geometrie enthält genau drei Punkte

$$\big(P^2(K), \{U \subset K^3 \mid U \text{ ist ein zweidimensionaler } K\text{-Unterraum}\}, \subset\big)$$

definierte Tripel $P(K)$ eine Mini-Geometrie. Zum Beispiel ist $P(\mathbb{F}_2)$ die sogenannte *Fano-Ebene* (Abbildung 1.3).

Beispiel 1.3.5 (Großkreise)**.** Sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$ die zweidimensionale Sphäre. Kreise in $\mathbb{R}^3$ um 0, die ganz in S^2 liegen, heißen *Großkreise von* S^2 (Abbildung 1.4). Wir betrachten dann das folgende Tripel

$$\big(S^2, \text{Menge aller Großkreise in } S^2, \in\big).$$

Dieses Tripel bildet *keine* Mini-Geometrie, denn zum Beispiel gibt es unendlich viele verschiedene Großkreise, die durch den Nord- und den Südpol (d.h. durch $(0,0,1)$ und $(0,0,-1)$) gehen.

Da wir nun gesehen haben, dass es Modelle für Mini-Geometrie gibt, ist die Frage berechtigt, welche Aussagen über Mini-Geometrien aus den Axiomen folgen. Wir müssen nun zunächst zwischen zwei Arten von Folgerungen unterscheiden:

- Aussagen, die (syntaktische) logische Folgerungen aus den Mini-Geometrie-Axiomen aus Definition 1.2.1 sind.
- Aussagen, die in allen Mini-Geometrie-Modellen gelten.

Tatsächlich handelt es sich (da wir uns in Logik erster Stufe befinden) dabei um dieselbe Menge von Aussagen; dies ist Gegenstand des Gödelschen *Vollständigkeitssatzes*.

Definition 1.3.6 (Unabhängigkeit)**.** Sei A ein Axiomensystem und sei S ein Satz in der A unterliegenden Sprache. Dann ist S *unabhängig von* A, wenn weder S noch $\neg S$ aus A logisch folgt.

Bemerkung 1.3.7 (Unabhängigkeit in Mini-Geometrie)**.** Ein Satz S über Mini-Geometrie ist nach dem Vollständigkeitssatz also genau dann unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen, wenn es sowohl ein Mini-Geometrie-Modell gibt, in dem S erfüllt ist, als auch ein Mini-Geometrie-Modell gibt, in dem die Negation $\neg S$ erfüllt ist.

Großkreise *kein* Großkreis

Abbildung 1.4.: Großkreise auf S^2

Im Kontext der Mini-Geometrie lässt sich somit die Frage 1.1.1 nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms leicht beantworten:

Beispiel 1.3.8 (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms in Mini-Geometrie)**.** Der Satz

> Ist x ein Punkt und ist g eine Gerade mit $x \not\subset g$, so gibt es genau eine zu g parallele Gerade h mit $x \in h$.

ist unabhängig von den Axiomen der Mini-Geometrie, denn es gibt sowohl Mini-Geometrien, die diesen Satz erfüllen, als auch Mini-Geometrien, die diesen Satz nicht erfüllen:

- In der Mini-Geometrie $A(\mathbb{R}^2)$ ist das Parallelenaxiom erfüllt.
- In der Mini-Geometrie zu den Graphen

  $$\big(\{0,1,2\},\{\{0,1\}\}\big)$$

  bzw.

  $$\big(\{0,1,2,3,4\},\{\{0,1\},\{2,3\},\{2,4\}\}\big)$$

  ist das Parallelenaxiom *nicht* erfüllt (im ersten Fall gibt es nicht genug Parallelen, im zweiten Fall gibt es zuviele Parallelen).

Ausblick 1.3.9 (prominente Unabhängigkeiten)**.**

- Das *Auswahlaxiom* ist unabhängig von den anderen Axiomen der (Zermelo-Fraenkelschen) Mengenlehre.
- Die *Kontinuumshypothese* ist unabhängig von der Mengenlehre ZFC.
- Das *Parallelenaxiom* ist unabhängig von den anderen Axiomen Hilberts der Geometrie. Wir werden in Kapitel 4 genauer auf die Konstruktion einer Geometrie eingehen, die alle (ebenen) Hilbertschen Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt.

Ausblick 1.3.10 (Unvollständigkeit)**.** Neben der Unabhängigkeit stellt sich in der Modelltheorie auch die Frage danach, inwieweit es möglich ist, innerhalb eines Axiomensystems nachzuweisen, dass dieses Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Nach den Gödelschen *Unvollständigkeitssätzen* ist dies für kein Axiomensystem möglich, das stark genug ist, um Peano-Arithmetik zu modellieren.

Da sich die Peano-Arithmetik innerhalb der Mengenlehre ZFC modellieren lässt, ist es insbesondere (unter der Annahme, dass ZFC konsistent ist) nicht möglich, in ZFC zu beweisen, dass ZFC widerspruchsfrei ist(!).

Es bleibt noch die Frage nach der Eindeutigkeit der Erfüllbarkeit unserer Axiome zu beantworten. Die obigen Beispiele suggerieren, dass es viele Mini-Geometrie-Modelle gibt, die „essentiell verschieden“ sind; dies werden wir im nächsten Abschnitt präzisieren.

Die Hilbertsche Axiomatik der Geometrie ist in dieser Hinsicht vollständig: bis auf Isomorphie besitzt sie nur ein einziges Modell, nämlich die uns vertraute euklidische Geometrie in $\mathbb{R}^3$.

1.4 Symmetrie

Mathematische Theorien bestehen nicht nur aus den grundlegenden Objekten (z.B. Vektorräumen, Maßräumen, topologischen Räumen, ...), sondern auch aus strukturerhaltenden Morphismen zwischen diesen Objekten (z.B. linearen Abbildungen, messbaren Abbildungen, stetigen Abbildungen, ...). Mathematische Theorien bilden also sogenannte Kategorien (Anhang A.2). In diesem Rahmen lässt sich auch formulieren, wann Objekte im wesentlichen gleich (d.h. isomorph) sind und was die Symmetrien eines Objekts sein sollen.

Wir werden uns hier zunächst nur auf das Beispiel von Mini-Geometrie beschränken.

Definition 1.4.1 (Morphismen von Mini-Geometrien)**.** Seien $M = (P, G, \sqsubset)$ und $M' = (P', G', \sqsubset')$ Mini-Geometrien.

- Ein *Morphismus* $M \longrightarrow M'$ ist ein Paar $(f\colon P \longrightarrow P', F\colon G \longrightarrow G')$ von Abbildungen, die im folgenden Sinne strukturerhaltend sind:

$$\forall_{x\in P} \quad \forall_{g\in G} \quad x \sqsubset g \Longrightarrow f(x) \sqsubset' F(g).$$

- Sind $(f, F)\colon (P, G, \sqsubset) \longrightarrow (P', G', \sqsubset')$ und $(f', F')\colon (P', G', \sqsubset') \longrightarrow (P'', G'', \sqsubset'')$ Morphismen von Mini-Geometrien, so definieren wir die *Verknüpfung* durch

$$(f', F') \circ (f, F) := (f' \circ f, F' \circ F).$$

- Ist $M = (P, G, \sqsubset)$ eine Mini-Geometrie, so schreiben wir

$$\mathrm{id}_M := (\mathrm{id}_P, \mathrm{id}_G)$$

für den *Identitätsmorphismus* $M \longrightarrow M$.

- Mini-Geometrien M, M' sind *isomorph*, wenn es Morphismen $\varphi\colon M \longrightarrow M'$ und $\psi\colon M' \longrightarrow M$ mit

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{M'} \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$$

gibt. In diesem Fall sind φ und ψ *Isomorphismen* und wir schreiben kurz $M \cong_{\mathsf{MG}} M'$.

Man beachte, dass die Verknüpfung zweier Morphismen von Mini-Geometrien wieder einen Morphismus von Mini-Geometrien liefert, dass der Identitätsmorphismus neutral bezüglich Verknüpfung von Morphismen ist und dass die Verknüpfung assoziativ ist. Insbesondere bilden Mini-Geometrien somit tatsächlich eine Kategorie.

Beispiel 1.4.2 (Morphismen von Graphen)**.** Seien $X = (V, E)$ und $X' = (V', E')$ Graphen. Ein *Morphismus* $X \longrightarrow X'$ *von Graphen* ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow V'$, die mit der Kantenstruktur verträglich ist, d.h.

$$\forall_{\{x,y\} \in E} \quad \big\{f(x), f(y)\big\} \in E'.$$

Eine solche Abbildung $f\colon V \longrightarrow V'$ ist also genau dann ein Morphismus von Graphen, wenn (f, F) mit

$$\begin{aligned} F\colon E &\longrightarrow E' \\ \{x, y\} &\longmapsto \{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

einen Morphismus $(V, E, \in) \longrightarrow (V', E', \in)$ zwischen den zugehörigen Mini-Geometrien definiert.

Beispiel 1.4.3 (affin lineare Abbildungen)**.** Sei K ein Körper und seien V und V' Vektorräume über K. Ist $f\colon V \longrightarrow V'$ affin K-linear (d.h. die Abbildung $f - f(0)\colon V \longrightarrow V'$ ist K-linear), so ist (f, F) mit $F\colon v + U \mapsto f(v + U)$ genau dann ein Morphismus $A(V) \longrightarrow A(V')$ von Mini-Geometrien, wenn f injektiv ist.

Proposition 1.4.4 (Isomorphie und Kardinalität)**.** *Seien $M = (P, G, \sqsubset)$ und $M' = (P', G', \sqsubset')$ Mini-Geometrien mit $M \cong_{\mathsf{MG}} M'$. Dann folgt*

$$|P| = |P'| \quad \textit{und} \quad |G| = |G'|.$$

Beweis. Seien $(f, F)\colon M \longrightarrow M'$ und $(f', F')\colon M' \longrightarrow M$ zueinander inverse Mini-Geometrie-Isomorphismen. Dann sind insbesondere f und f' bzw. F und F' zueinander invers. Damit folgt $|P| = |P'|$ und $|G| = |G'|$. $\square$

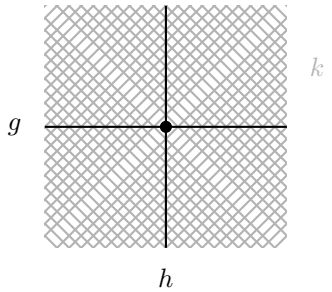


Abbildung 1.5.: Die „Ebene“ $E_M(g,h)$ in Mini-Geometrie, schematisch

Korollar 1.4.5. *Insbesondere gibt es unendlich viele paarweise nicht isomorphe Modelle von Mini-Geometrie.*

Beweis. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $M_n := (\{1,\dots,n\},\emptyset,\emptyset)$ ein Modell für Mini-Geometrie, das genau n Punkte enthält. Mit der vorigen Proposition folgt somit die Behauptung. □

Proposition 1.4.6 (Isomorphie linearer Mini-Geometrien)**.** *Sei K ein Körper und n, $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A(K^n) \cong_{\mathsf{MG}} A(K^m) \iff n = m.$$

Beweis. Ist $n = m$, so ist $\mathrm{id}_{A(K^n)}$ ein solcher Mini-Geometrie-Isomorphismus.

Ist $n \neq m$, so können wir wie folgt verfahren: Um die Notation übersichtlich zu halten behandeln wir nur den Fall, dass $n = 2$ und $m = 3$ ist (der allgemeine Fall lässt sich analog behandeln, s. Übungen).

Die Idee ist es, ein geeignetes Mini-Analogon von Ebenen zu betrachten: Zu einer Mini-Geometrie $M = (P,G,\sqsubset)$ und zwei Geraden $g,h \in G$, die genau einen Schnittpunkt besitzen, betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} E_M(g,h) := \big\{x \in P \,\big|\, &\exists_{k\in G} \quad x \sqsubset k \wedge \\ &(\exists_{y,z\in P} \quad y \neq z \wedge y \sqsubset k \wedge y \sqsubset g \wedge z \sqsubset k \wedge z \sqsubset h)\big\} \end{aligned}$$

aller Punkte, die auf Geraden liegen, die sowohl g als auch h schneiden – und zwar nicht nur im Schnittpunkt von g und h (Abbildung 1.5).

Seien nun g und h Geraden in $A(K^3)$, deren einziger Schnittpunkt 0 ist. Dann zeigt lineare Algebra, dass $E_{A(K^3)}(g,h)$ ein zweidimensionaler K-Unterraum von K^3 ist. Insbesondere gibt es einen Punkt x in $A(K^3)$, der *nicht* in $E_{A(K^3)}(g,h)$ liegt.

Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $(f,F)\colon A(K^3) \longrightarrow A(K^2)$ von Mini-Geometrien. Dann gilt

$$f\big(E_{A(K^3)}(g,h)\big) = E_{A(K^2)}\big(F(g),F(h)\big) =: E$$

und $f(x)$ liegt *nicht* in E. Andererseits ist E aber ein zweidimensionaler affiner K-Unterraum von K^2, und somit $E = K^2$, im Widerspruch zur Existenz von $f(x)$. Also ist $A(K^2) \not\cong_{\mathsf{MG}} A(K^3)$. $\square$

Wie im allgemeinen kategoriellen Kontext werden wir nun die Symmetriegruppe als Automorphismengruppe einführen:

Definition 1.4.7 (Symmetriegruppe einer Mini-Geometrie)**.** Sei M ein Modell für Mini-Geometrie. Die Menge aller Mini-Geometrie-Isomorphismen $M \longrightarrow M$ bildet bezüglich Verknüpfung eine Gruppe, die sogenannte *Symmetriegruppe* $\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M)$ *von* M.

Beispiel 1.4.8 (algebraische Symmetriegruppen als Symmetriegruppen von Mini-Geometrien)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M_n) \cong S_n,$$

wobei M_n die Mini-Geometrie aus dem Beweis von Korollar 1.4.5 ist und S_n die symmetrische Gruppe von Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Insbesondere ist $\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M_2) \cong \mathbb{Z}/2$ und $\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M_n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ *nicht* abelsch.

Beispiel 1.4.9 (Symmetriegruppen von kombinatorischen Drei- und Vierecken)**.** Sei $M^{\triangle}$ die Mini-Geometrie zum Graphen $(\{1,2,3\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\})$ und sei $M^{\square}$ die Mini-Geometrie zu $(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\})$. Dann gilt

$$\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M^{\triangle}) \cong S_3;$$

genauer besteht $\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M^{\triangle})$ aus der Identität, den beiden „Rotationen“ (1 2 3) und (3 1 2), sowie den „Spiegelungen“ (1 2), (2 3), (1 3).

Die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M^{\square})$ enthält genau acht Elemente; genauer ist

$$\mathrm{Aut}_{\mathsf{MG}}(M^{\square}) \cong \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2,$$

wobei das nicht-triviale Element aus $\mathbb{Z}/2$ durch Inversion auf $\mathbb{Z}/4$ operiert.

Mithilfe von Symmetriegruppen lässt sich zum Beispiel auch der Begriff von Gruppenoperationen auf Mini-Geometrien einführen.

1.5 Der geometrische Blickwinkel

Wir geben nun erste elementare Beispiele für Anwendungen kombinatorischer Geometrie, in denen der geometrische Blickwinkel eine tragende Rolle spielt. Themen dieser Art eignen sich zum Beispiel auch für Zulassungsarbeiten.

1.5.1 Ramsey-Zahlen

Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Kombinatorik, den sogenannten Ramsey-Zahlen. Einen einfachen Ramsey-Satz haben wir bereits in Proposition 1.2.5 kennengelernt.

Proposition 1.5.1 (Bekanntschaften)**.** *Unter sechs Personen gibt es immer drei, die sich gegenseitig alle kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.*

Beweis. Wir modellieren diese Situation wie folgt durch einen Graphen X:

- Die sechs Personen bilden die sechs Knoten von X.
- Es gibt genau dann eine Kante in X zwischen zwei Knoten, wenn sich die zugehörigen Personen kennen.

Wendet man nun Proposition 1.2.5 auf die zu X gehörige Mini-Geometrie an, so folgt die Behauptung. □

Die analoge Aussage für fünf Personen ist im allgemeinen *nicht* richtig; man kann leicht ein Gegenbeispiel angeben. Zusammen mit Proposition 1.2.5 folgt somit, dass die sogenannte Ramsey-Zahl $R(3,3)$ gleich 6 ist.

Definition 1.5.2 (Ramsey-Zahl)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *Ramsey-Zahl* $R(n,n)$ ist die kleinste natürliche Zahl R mit folgender Eigenschaft: Ist X ein Graph mit R Knoten, so gibt es n Knoten in X, die paarweise durch Kanten verbunden sind, oder es gibt n Knoten in X, von denen keine zwei durch eine Kante verbunden sind.

Ausblick 1.5.3 (der Satz von Ramsey)**.** Es ist bekannt, dass $R(n,n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich ist (nach dem *Satz von Ramsey*); im allgemeinen ist es jedoch äußerst schwierig, den genauen Wert $R(n,n)$ zu berechnen. Die einzigen(!) bekannten Werte sind:

$$R(2,2) = 2, \quad R(3,3) = 6, \quad R(4,4) = 18.$$

Es gibt vielfältige Varianten von Ramsey-Zahlen und des Satzes von Ramsey. Sie sind zum Beispiel ein beliebtes Hilfsmittel in kombinatorischen Aufgaben in Mathematik-Wettbewerben (LWM, BWM, IMO, ...).

Ausblick 1.5.4 (der Satz von Hales-Jewett)**.** Der *Satz von Hales-Jewett* ist eine Variante des Satzes von Ramsey mit folgender Anwendung [5]:

Für jede Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $d \in \mathbb{N}$, so dass für das Tic-Tac-Toe-Spiel auf dem Würfel $\{1,\ldots,n\}^d$ der erste Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

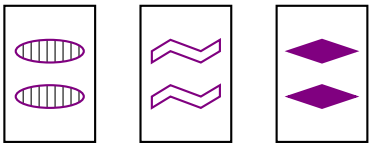
1.5.2 Das Spiel SET

Das Kartenspiel SET[2] wird mit 81 Karten gespielt. Jede der Karten zeigt vier Attribute, wobei die Attribute die folgenden Werte annehmen können:

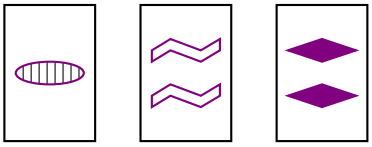
Typ	*mögliche Werte*
Anzahl	1, 2, 3
Schattierung	gefüllt, gestreift, leer
Farbe	rot, grün, violett
Form	Oval, Schlange, Raute

Zu jeder Werte-Kombination der vier Attribute gibt es genau eine Karte. Ziel des Spieles ist es, unter den ausliegenden Karten ein sogenanntes *SET* von drei Karten zu finden, d.h. drei Karten zu finden, so dass die Karten bezüglich jedem der vier Attribute entweder alle gleich oder alle unterschiedlich sind.

Beispiel 1.5.5. Die folgenden drei Karten bilden ein SET:



Andererseits bilden die folgende Karten *kein* SET:



Zu Beginn des Spiels werden zwölf Karten offen auf den Tisch gelegt. Alle Spieler betrachten diese Karten gleichzeitig; wer ein SET entdeckt, ruft „SET!“ und entfernt die entsprechenden drei Karten. Daraufhin werden die offenen Karten auf dem Tisch durch drei neue Karten ergänzt, etc.

Nun kann es aber passieren, dass es unter den ausliegenden Karten kein SET gibt. In diesem Fall werden so lange weitere offene Karten hinzugefügt bis ein SET auffindbar ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die folgende Frage:

Frage 1.5.6. Was ist die maximale Anzahl an Karten, die *kein* SET enthält?

[2]SET ist eine Trademark von SET Enterprises, Inc.

Wir geben nun eine Übersetzung dieser Frage in Mini-Geometrie an: Dazu betrachten wir die Mini-Geometrie $A(\mathbb{F}_3^4)$. Die vier Koordinaten-Achsen entsprechen dabei den vier Attributen, die Koordinaten-Einträge aus $\mathbb{F}_3$ den drei jeweils möglichen Werten des Attributs. Man stellt nun leicht fest, dass eine drei-elementige Teilmenge von $\mathbb{F}_3^4$ genau dann ein SET bildet, wenn sie ein affiner eindimensionaler $\mathbb{F}_3$-Unterraum von $\mathbb{F}_3^4$ ist, d.h., wenn sie eine Gerade in der Mini-Geometrie $A(\mathbb{F}_3^4)$ ist: Wir betrachten dazu eine einzelne Koordinate (d.h. ein Attribut). Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\{x + \mathbb{F}_3 \cdot y \mid x, y \in \mathbb{F}_3\} = \big\{\{x\} \;\big|\; x \in \mathbb{F}_3\big\} \cup \{\mathbb{F}_3\}$$

gilt. Der erste Teil der Menge auf der rechten Seite entspricht dann dem Fall, dass die Werte dieses Attributs bei allen drei Karten gleich sind; der zweite Teil entspricht dem Fall, dass die Werte des betrachteten Attributs bei allen drei Karten verschieden sind.

Frage 1.5.6 ist also äquivalent zur folgenden Frage:

Frage 1.5.7. Was ist die größte Anzahl von Punkten in $A(\mathbb{F}_3^4)$, die *keine* Gerade enthält?

Man kann mit elementaren Mitteln der linearen Algebra und der Kombinatorik zeigen, dass die Antwort auf diese Frage 20 ist [14]; die Formulierung als geometrisches Problem hilft in diesem Fall dabei, die Argumente übersichtlich zu organisiern. Je 21 SET-Karten enthalten also mindestens ein SET.

1.5.3 Strategie via Symmetrie

Wir zeigen nun an einem einfachen Beispiel wie der Symmetrie-Begriff in der Spieltheorie Verwendung findet:

Proposition 1.5.8 (Godzilla vs. King Kong [28, Aufgabe 5.3])**.** *Godzilla und King Kong treffen sich in Manhatten um folgendes Spiel zu spielen:*

- *Am Anfang stecken sie einen* 2016×2017 *Häuserblocks großen rechteckigen Bereich der Stadt ab. Wir gehen davon aus, dass alle Blocks gleich große Quadrate sind.*
- *Ein Zug besteht darin, einen zusammenhängenden Bereich an Blocks dem Erdboden gleichzumachen, der zwischen einem und* 2016 *Blocks groß ist.*
- *Godzilla und King Kong ziehen abwechselnd.*
- *Derjenige, der den letzten Häuserblock ausradiert, gewinnt.*
- *Godzilla beginnt die Verwüstung mit dem ersten Zug.*

Dann besitzt Godzilla eine Gewinn-Strategie.

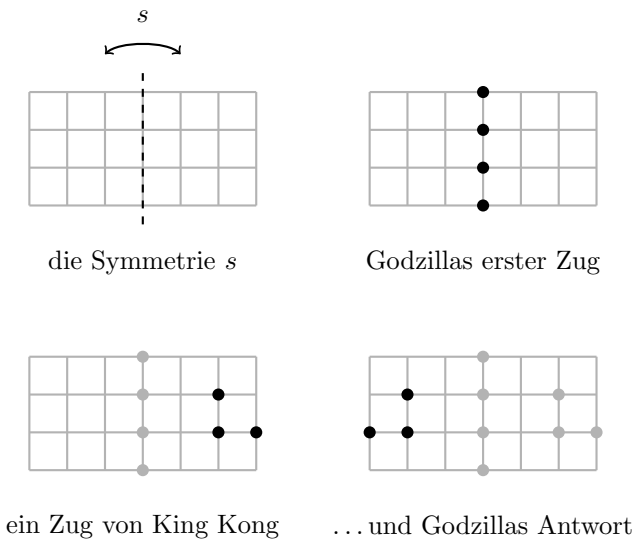


Abbildung 1.6.: Godzilla vs. King Kong

Beweis. Wir modellieren das entsprechende Spielbrett durch den folgenden Graphen $X = (V, E)$:

- Die Knotenmenge von X ist die Menge

$$\{-1008, \ldots, 1008\} \times \{1, \ldots, 2016\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

- Zwei Knoten (x, y) und (x', y') bilden genau dann eine Kante, wenn $x = x'$ und $|y - y'| = 1$ oder wenn $|x - x'| = 1$ und $y = y'$ ist.

Die Knoten entsprechen den Häuserblocks und die Wahl der Kanten stellt sicher, dass ein Bereich von Häuserblocks genau dann zusammenhängend ist, wenn die entsprechenden Knoten in X einen zusammenhängenden Untergraphen definieren (d.h. je zwei dieser Knoten sind durch einen Kantenweg innerhalb dieser Menge von Knoten verbunden).

Die Idee ist nun, den durch

$$\begin{aligned} s\colon V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y) \end{aligned}$$

definierten „Spiegelungs“-Automorphismus von X zu nutzen (Abbildung 1.6).

In seinem ersten Zug verwüstet Godzilla den Bereich $\{0\} \times \{1, \ldots, 2016\}$. Jeder noch unzerstörte zusammenhängende Bereich der Stadt liegt nun entweder in $\{-1008, \ldots, -1\} \times \{1, \ldots, 2016\}$ oder in $\{1, \ldots, 1008\} \times \{1, \ldots, 2016\}$.

Induktiv folgt nun: Jedesmal, wenn King Kong einen Zug durchführt, kann Godzilla einfach den mithilfe von s „gespiegelten“ Zug durchführen. Also wird Godzilla mit dieser Strategie die Gelegenheit haben, den letzten Block auszuradieren und gewinnt somit. □

Ausblick 1.5.9 (Nash-Gleichgewichte)**.** Auch in Nashs berühmten Beweis der Existenz sogenannter *Nash-Gleichgewichte* [32, 33] spielt der geometrische Blickwinkel eine wichtige Rolle: die Existenz dieser Gleichgewichte wird aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz (einem Satz aus der Topologie) gefolgert. Diese Arbeiten von Nash (und ihre Anwendungen) bilden die Grundlage für seinen Gewinn des Nobel-Preises.

1.5.4 Der Heiratssatz

Wir gehen nun auf den Heiratssatz und seine geometrische Variante bzw. seine Anwendungen ein.

Satz 1.5.10 (Heiratssatz)**.** *Seien F und M endliche Mengen und sei $T\colon F \longrightarrow P(M)$ eine Abbildung; dabei bezeichnet $P(M)$ die Potenzmenge von M. Die* Heiratsbedingung *für T lautet*

$$\forall_{A\subset F} \quad \Big|\bigcup_{f\in A} T(f)\Big| \geq |A|.$$

Dann gibt es genau dann eine injektive Abbildung $H\colon F \longrightarrow M$ mit

$$\forall_{f\in F} \quad H(f) \in T(f),$$

wenn T die Heiratsbedingung erfüllt; man bezeichnet H in diesem Fall als (F, M, T)-Heirat*.*

Die namensgebende Interpretation dieses Satzes ist, sich vorzustellen, dass F eine Menge von Frauen ist, M eine Menge von Männern ist, und für jede Frau $f \in F$, die Menge $T(f) \subset M$ die Menge der Traummänner von f ist. Der Satz gibt also ein Kriterium dafür, wie man jede Frau so mit einem Mann verheiraten kann, dass alle Frauen glücklich sind und keine zwei Frauen denselben Mann teilen müssen.

Es gibt viele Möglichkeiten, den Heiratssatz zu beweisen [15]. Wir übersetzen den Satz in die Graphentheorie und gehen dann per Induktion über die Anzahl der Elemente von F vor.

Definition 1.5.11 (Matching, perfektes Matching)**.** Sei $X = (V, E)$ ein Graph.

- Sei $F \subset V$. Ein *Matching für F in X* ist eine Menge $H \subset E$ von Kanten mit folgenden Eigenschaften: Jeder Knoten aus F ist in einer Kante aus H enthalten und

$$\forall_{e,e' \in H} \quad e \neq e' \Longrightarrow e \cap e' = \emptyset$$

(d.h. die Kanten aus H haben keine gemeinsamen Knoten).

- Ein *perfektes Matching für X* ist ein Matching für die ganze Knotenmenge V in X.

Betrachtet man im Heiratssatz den Graphen

$$\big(F \sqcup M, \{\{f, m\} \mid m \in T(f)\}\big)$$

und sieht man Matchings als Entsprechung zu injektiven Abbildungen an, so sieht man sofort, dass der Heiratssatz aus der folgenden graphentheoretischen Version folgt:

Satz 1.5.12 (graphentheoretischer Heiratssatz)**.** *Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph und sei $F \subset V$ mit der Eigenschaft, dass X keine Kante zwischen zwei Knoten in F enthält. Dann existiert genau dann ein Matching für F in X, wenn die* (graphentheoretische) Heiratsbedingung

$$\forall_{A \subset F} \quad |N_X(A)| \geq |A|$$

für F in X erfüllt ist. Dabei ist $N_X(A) := \{w \in V \mid \exists_{v \in A} \quad \{w, v\} \in E\}$ die Menge aller zu A benachbarten Knoten in X.

Es genügt also den graphentheoretischen Heiratssatz zu beweisen.

Beweis (von Satz 1.5.12). Es ist klar, dass die Heiratsbedingung notwendig ist für die Existenz eines Matchings.

Warum ist die Heiratsbedingung hinreichend? Ist $|F| \leq 1$, so gilt die Behauptung offensichtlich. Sei also $|F| \geq 2$ und die Heiratsbedingung sei in allen Fällen mit kleinerer „Frauenmenge“ bereits als hinreichend nachgewiesen. Dann ist sie auch für F hinreichend, denn:

Wir unterscheiden zwei Fälle:

① Es gelte die stärkere Heiratsbedingung

$$|N_X(A)| \geq |A| + 1$$

für alle nicht-leeren Teilmengen $A \subset F$ mit $A \neq F$. Wir wählen in diesem Fall eine Kante $\{f, m\} \in E$ mit $f \in F$ und betrachten den Graphen X', den wir aus X erhalten, indem wir die Knoten f, m und alle mit f oder m verbundenen Kanten aus X entfernen (Abbildung 1.7).

Jede nicht-leere Teilmenge $A \subset F \setminus \{f\}$ erfüllt dann

$$|N_{X'}(A)| \geq |N_X(A)| - 1 \geq |A|.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Matching H' für $F \setminus \{f\}$ in X'. Dann ist $H' \cup \{\{f, m\}\}$ ein Matching für F in X.

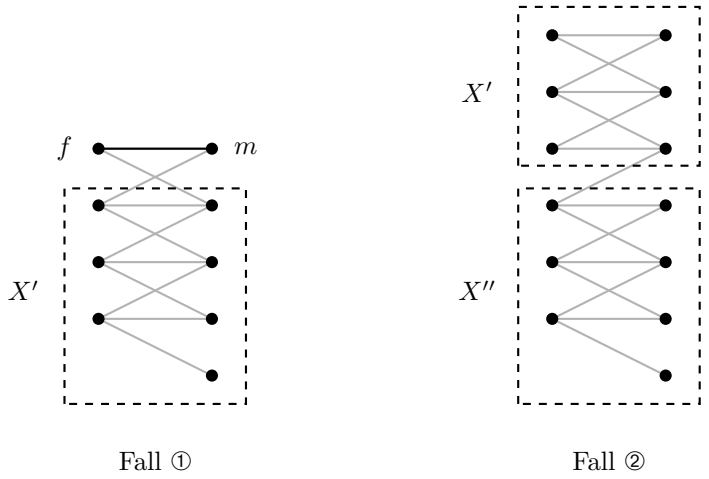


Abbildung 1.7.: Die beiden Fälle im Beweis des graphentheoretischen Heiratssatzes

② Es gebe eine nicht-leere Teilmenge $A \subset F$ mit $A \neq F$ und

$$|N_X(A)| = |A|.$$

Wir zerlegen nun X in die folgenden Graphen X' und X'' (Abbildung 1.7): Den Graphen X' konstruieren wir durch

$$X' := \big(A \cup N_X(A), \{\{f, m\} \mid f \in A, m \in N_X(A)\}\big),$$

den Graphen X'' konstruieren wir durch

$$\begin{aligned} X'' := \ & \big(F \setminus A \cup N_X(F \setminus A) \setminus N_X(A), \\ & \{\{f, m\} \mid f \in F \setminus A, m \in N_X(F \setminus A) \setminus N_X(A)\big). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung erfüllt X' die Heiratsbedingung für A. Außerdem erfüllt auch X'' die Heiratsbedingung für $F \setminus A$, denn gäbe es eine endliche Menge $B \subset F \setminus A$ mit $|N_{X''}(B)| < |B|$, so wäre

$$|N_X(B \cup A)| \leq |N_{X''}(B)| + |N_X(A)| < |B| + |A| = |B \cup A|,$$

im Widerspruch zur graphentheoretischen Heiratsbedingung. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt X' ein Matching für A und X'' ein Matching für $F \setminus A$. Zusammen ergeben diese Matchings ein Matching für F in X. □

Korollar 1.5.13 (Spielkartenauswahl)**.** *Wir betrachten ein gewöhnliches Kartenspiel mit* 52 *Karten (in vier Farben, in denen es jeweils Karten mit den Werten 2, . . . , 10, B, D, K, A gibt). Diese* 52 *Karten werden gemischt und auf* 13 *Stapel zu je vier Karten verteilt. Dann ist es möglich, so aus jedem Stapel eine Karte auszuwählen, dass die ausgewählten* 13 *Karten je genau eine mit dem Wert 2, . . . , 10, B, D, K, A enthalten.*

Beweis. Wir modellieren die Situation wie folgt:

- Wir setzen $F := \{2, \ldots, 10, \mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{K}, \mathrm{A}\}$; die Menge F ist also die Menge der möglichen Kartenwerte.
- Sei $M := \{1, \ldots, 13\}$; die Elemente von M repräsentieren die 13 Stapel.
- Als Abbildung $T\colon F \longrightarrow P(M)$ wählen wir die Abbildung, die jedem Kartenwert die Stapel zuordnet, in denen der Wert auftritt.

Warum ist die Heiratsbedingung für T erfüllt? Sei $A \subset F$. Wir setzen

$$n := |A| \quad \text{und} \quad m := \Big|\bigcup_{f \in A} T(f)\Big|$$

und betrachten die Anzahlen der involvierten Karten. Da jeder Kartenwert auf genau vier Karten auftritt, betrifft die Menge A genau $4 \cdot n$ Karten. Wegen T finden diese Platz in m Stapeln. Da jeder Stapel genau vier Karten enthält, ist also

$$4 \cdot n \leq 4 \cdot m,$$

und damit

$$|A| = n \leq m = \Big|\bigcup_{f \in A} T(f)\Big|.$$

Also erfüllt T die Heiratsbedingung. Nach dem Heiratssatz gibt es also eine (F, M, T)-Heirat. Nach Konstruktion liefert diese eine Auswahl von Karten aus jedem Stapel mit der gewünschten Eigenschaft. □

Ein weiteres klassisches Anwendungsbeispiel für den Heiratssatz ist die Vervollständigung von lateinischen Quadraten.

1.6 Der eulersche Polyedersatz

Wir werden uns nun mit der Frage beschäftigen, welche Graphen sich „überkreuzungsfrei in der Ebene zeichnen lassen“. Ein wichtiger Schritt bei der Beantwortung dieser Frage ist der eulersche Polyedersatz. Dieser hilft bei der Klassifikation regulärer Polyeder, bei Färbungsproblemen, sowie bei Problemen, die zunächst nicht aus der Graphentheorie stammen. In Kapitel 1.6.1

werden wir das Zeichnen eines Graphen in der Ebene präzisieren und in Kapitel 1.6.2 dann den eulerschen Polyedersatz beweisen und erste Anwendungen diskutieren.

1.6.1 Geometrische Realisierung von Graphen

Um zu präzisieren, was es bedeuten soll, einen Graphen überkreuzungsfrei in der Ebene zu zeichnen, benötigen wir den Begriff der geometrischen Realisierung eines Graphen. Die geometrische Realisierung eines Graphen übersetzt Graphen in topologische Räume und zwar so, dass Kanten durch ein Intervall modelliert werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall von Graphen mit endlicher Knotenmenge.

Definition 1.6.1 (geometrische Realisierung)**.** Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph. Dann definieren wir die *geometrische Realisierung* $X_{\mathbb{R}}$ *von* X als den topologischen Raum mit der unterliegenden Menge

$$X_{\mathbb{R}} := \{e_v \mid v \in V\} \cup \big\{\{v, w\}_{\mathbb{R}} \;\big|\; \{v, w\} \in E\big\} \subset \bigoplus_V \mathbb{R},$$

wobei $(e_v)_{v \in V}$ die Standardeinheitsvektoren von $\bigoplus_V \mathbb{R}$ sind und wir für Kanten $\{v, w\}$ die konvexe Hülle von $\{e_v, e_w\}$ in $\bigoplus_V \mathbb{R}$ mit

$$\{v, w\}_{\mathbb{R}} := \big\{t \cdot e_v + (1 - t) \cdot e_w \;\big|\; t \in [0, 1]\big\}$$

bezeichnen. Wir versehen $X_{\mathbb{R}}$ mit der Teilraumtopologie der Standardtopologie auf $\bigoplus_V \mathbb{R}$.

Beispiel 1.6.2 (geometrische Realisierung)**.** Die geometrischen Realisierungen von

$$X := \big(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}\}\big)$$

bzw.

$$X' := \big(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}\big)$$

sind in Abbildung 1.8 skizziert.

Ausblick 1.6.3 (geometrische Realisierung von unendlichen Graphen)**.** Analog lässt sich auch die geometrische Realisierung unendlicher Graphen definieren. Bei der Topologie ist jedoch Vorsicht geboten: Die „richtige“ Topologie ist dann die schwache Topologie, d.h. die Topologie, in der eine Menge genau dann offen ist, wenn ihre Durchschnitte mit den geometrischen Realisierungen aller endlichen Untergraphen offen sind (in den geometrischen Realisierungen der endlichen Untergraphen).

Die geometrische Realisierung ist im folgenden Sinne verträglich mit Morphismen von Graphen:

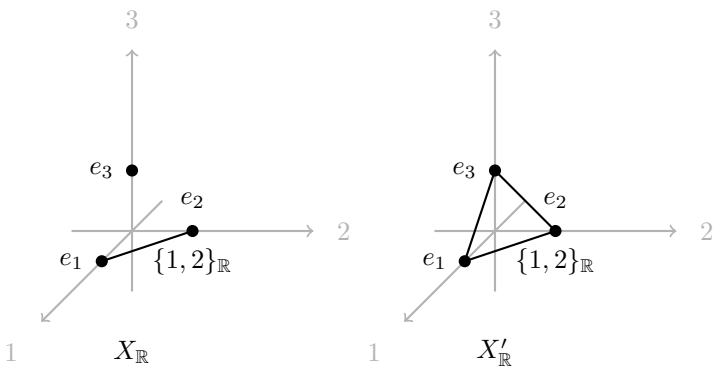


Abbildung 1.8.: Einfache geometrische Realisierungen

Proposition 1.6.4 (Funktorialität der geometrischen Realisierung)**.** *Seien $X = (V, E)$, $X' = (V', E')$ endliche Graphen und sei $f\colon X \longrightarrow X'$ ein Morphismus von Graphen (s. Beispiel 1.4.2).*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}\colon X_{\mathbb{R}} &\longrightarrow X'_{\mathbb{R}} \\ e_v &\longmapsto e_{f(v)} && \text{für } v \in V \\ t \cdot e_v + (1-t) \cdot e_w &\longmapsto t \cdot e_{f(v)} + (1-t) \cdot e_{f(w)} && \text{für } \{v, w\} \in E,\ t \in [0,1] \end{aligned}$$

   wohldefiniert und stetig.

2. *Diese Konstruktion ist funktoriell, d.h. es gilt*

$$(\mathrm{id}_X)_{\mathbb{R}} = (\mathrm{id}_V)_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{X_{\mathbb{R}}}$$

   und für alle Morphismen $f'\colon X' \longrightarrow X''$ von Graphen ist

$$(f' \circ f)_{\mathbb{R}} = f'_{\mathbb{R}} \circ f_{\mathbb{R}}.$$

In anderen Worten: die geometrische Realisierung liefert einen Funktor (Anhang A.3) von der Kategorie der endlichen Graphen in die Kategorie der topologischen Räume. Insbesondere haben isomorphe Graphen homöomorphe geometrische Realisierungen.

Beweis. 1. Nach Konstruktion ist $f_{\mathbb{R}}$ nichts anderes als die Einschränkung der auf den Basen $(e_v)_{v \in V}$ bzw. $(e_{v'})_{v' \in V'}$ von $\bigoplus_V \mathbb{R}$ bzw. $\bigoplus_{V'} \mathbb{R}$ durch f definierten $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\bigoplus_V \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_{V'} \mathbb{R}$ auf $X_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist $f_{\mathbb{R}}$ wohldefiniert und (da V und V' endlich-dimensional sind) stetig.

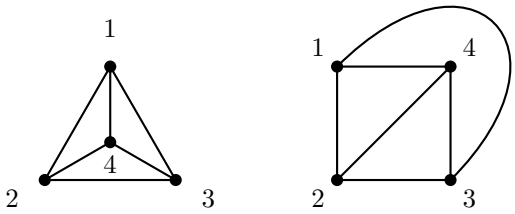


Abbildung 1.9.: Zwei planare Einbettungen von K_4

2. Die Verträglichkeitseigenschaften folgen durch einfaches Nachrechnen anhand der Definition (oder aus der im Beweis des ersten Teils gegebenen Beschreibung). □

Von besonderem Interesse sind Graphen, deren geometrische Realisierung als Teilraum von $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden kann, die also „überkreuzungsfrei in der Ebene gezeichnet werden können“:

Definition 1.6.5 (einbettbar, planar)**.** Sei X ein endlicher Graph.

- Ist Z ein topologischer Raum, so nennen wir eine injektive stetige Abbildung $X_{\mathbb{R}} \longrightarrow Z$ eine *Einbettung von X nach Z*. Falls eine solche Einbettung existiert, nennen wir *X in Z einbettbar*.
- Einbettungen von X nach $\mathbb{R}^2$ (mit der Standardtopologie) heißen *planare Einbettungen von X*. Der Graph X ist *planar*, wenn er nach $\mathbb{R}^2$ einbettbar ist.

Beispiel 1.6.6 (vollständige Graphen)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den *vollständigen Graphen*

$$K_n := \big(\{1, \ldots, n\}, \{\{j, k\} \mid j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k\}\big).$$

Offensichtlich sind K_1, K_2 und K_3 planar. Auch K_4 ist planar; Beispiele für planare Einbettungen von K_4 finden sich in Abbildung 1.9.

Proposition 1.6.7. *Ein endlicher Graph ist genau dann planar, wenn er in die Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^3, \|x\|_2 = 1\}$ eingebettet werden kann.*

Beweis. Sei X ein endlicher Graph.

Ist $f\colon X_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X, so liefert die Verknüpfung

$$i \circ f \colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow S^2$$

eine Einbettung von X nach S^2, wobei $i \colon \mathbb{R}^2 \hookrightarrow S^2$ die folgende, stetige, Einbettung von $\mathbb{R}^2$ als untere Hemisphäre von S^2 bezeichnet:

$$\begin{aligned} i \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \\ (x, y) &\longmapsto \big(s(x), s(y), \sqrt{1 - s(x)^2 - s(y)^2}\big) \end{aligned}$$

Dabei ist $s := 2/\pi \cdot \arctan \colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ die injektive Schrumpfungsfunktion.

Sei umgekehrt $f \colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow S^2$ eine Einbettung von X in S^2. Mit topologischen Hilfsmitteln folgt, dass f *nicht* surjektiv ist; ohne Einschränkung liege der Nordpol $N := (0, 0, 1)$ *nicht* in $f(X_{\mathbb{R}})$. Die *stereographische Projektion*

$$\begin{aligned} \sigma \colon S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \frac{1}{1 - x_3} \cdot (x_1, x_2) \end{aligned}$$

ist stetig und injektiv (sogar ein Homöomorphismus). Somit ist

$$\sigma \circ f \colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine planare Einbettung von X. □

Bemerkung 1.6.8 (Einbettbarkeit in $\mathbb{R}^3$)**.** Man kann zeigen, dass jeder endliche Graph in $\mathbb{R}^3$ einbettbar ist (z.B. über die Momentenkurve; Übungsaufgabe).

Ausprobieren legt die Vermutung nahe, dass der Graph K_5 nicht planar ist. Aber wie können wir zeigen, dass ein Graph *nicht* planar ist? Alle möglichen Abbildungen von der geometrischen Realisierung nach $\mathbb{R}^2$ zu überprüfen scheint nicht praktikabel zu sein. Ein wichtiges Hilfsmittel in diesem Zusammenhang ist die eulersche Polyederformel.

1.6.2 Der eulersche Polyedersatz

Der eulersche Polyedersatz stellt für planare Graphen eine Beziehung zwischen der Anzahl der Knoten, der Kanten und der Gebiete, in die die Ebene durch den Graphen „zerlegt“ wird her. Formal definieren wir diese Gebiete wie folgt:

Definition 1.6.9 (Facette einer planaren Einbettung)**.** Sei $f \colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung eines endlichen planaren Graphen X. Die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$ heißen *Facetten der Einbettung* f.

Beispiel 1.6.10 (Facetten)**.** In Abbildung 1.10 finden sich Beispiele für Facetten von planaren Einbettungen.

zwei Facetten eine Facette

Abbildung 1.10.: Facetten von planaren Einbettungen

Definition 1.6.11 (Weg, Kreis, zusammenhängend)**.** Sei $X = (V, E)$ ein Graph.

- Ein *Weg in* X ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_n)$ verschiedener Knoten in V mit
$$\forall_{j \in \{0,\ldots,n-1\}} \quad \{v_j, v_{j+1}\} \in E.$$
- Ein *Kreis in* X ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ in X mit $\{v_n, v_0\} \in E$.
- Der Graph X is *zusammenhängend*, wenn es für alle Knoten v, w von X einen Weg in X von v nach w gibt.

Bemerkung 1.6.12 (topologischer Zusammenhang)**.** Man kann leicht zeigen, dass ein endlicher Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn seine geometrische Realisierung im topologischen Sinne (weg)zusammenhängend ist.

Satz 1.6.13 (eulerscher Polyedersatz)**.** *Sei $X = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$ und sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung mit genau F Facetten. Dann gilt*
$$|V| - |E| + F = 2.$$
Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.

Für den Beweis benötigen wir die folgende Version des Jordanschen Kurvensatzes:

Satz 1.6.14 (Jordanscher Kurvensatz)**.**

1. *Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und wegzusammenhängend und ist $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv mit $f((0,1]) \subset U$, so ist $U \setminus f([0,1])$ wegzusammenhängend.*
2. *Ist $f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten und $f(S^1)$ bildet den Rand dieser beiden Wegzusammenhangskomponenten. Außerdem ist genau eine dieser beiden Komponenten beschränkt.*

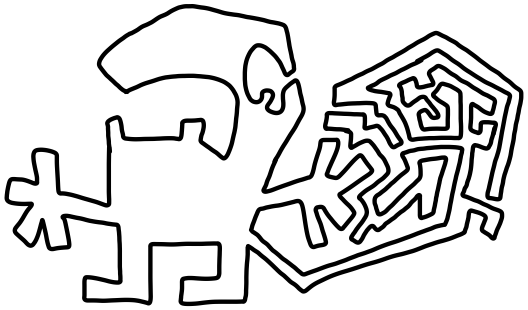


Abbildung 1.11.: Eine Einbettung von S^1 nach $\mathbb{R}^2$

Dieser Satz mag zunächst offensichtlich erscheinen. Man beachte jedoch, dass die Kurven auch vergleichsweise wild in $\mathbb{R}^2$ eingebettet sein können (Abbildung 1.11). Wir werden den Jordanschen Kurvensatz hier nicht beweisen, da dafür fortgeschrittenere Methoden aus der algebraischen Topologie oder der Analysis nötig sind.

Beweis (von Satz 1.6.13). Wir beweisen nun den eulerschen Polyedersatz per Induktion über die Anzahl der Kanten des planaren Graphen.

Ein zusammenhängender nicht-leerer Graph ohne Kanten besteht nur aus einem einzigen Knoten; solche Graphen sind planar und jede planare Einbettung besitzt offenbar genau eine Facette. Somit ist der eulersche Polyedersatz in diesem Fall erfüllt.

Sei nun $X = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph, der mindestens eine Kante enthält, und der eulersche Polyedersatz sei in allen Fällen mit kleinerer Kantenmenge bereits gezeigt. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

① Es gibt einen Knoten $v \in V$ vom Grad 1.[3] In diesem Fall bezeichnen wir die an v angrenzende Kante mit e und betrachten den Graphen

$$X' := \big(V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}\big).$$

Dann ist mit X auch X' ein endlicher zusammenhängender planarer Graph und $f' := f|_{X'_{\mathbb{R}}} \colon X'_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine planare Einbettung von X'. Wenden wir den ersten Teil des Jordanschen Kurvensatzes auf die Facette von f an, in der $f(e_v)$ enthalten ist, so folgt, dass auch f' genau F Facetten hat. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit, dass

[3] Der *Grad* eines Knoten $v \in V$ ist definiert durch $\deg v := |\{e \in E \mid v \in e\}|$.

$$\begin{aligned}|V| - |E| + F &= |V \setminus \{v\}| + 1 - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V \setminus \{v\}| - |E \setminus \{e\}| + F \\ &= 2,\end{aligned}$$

wie gewünscht.

② Es gibt keinen Knoten in X vom Grad 1. Da X mindestens eine Kante enthält, sieht man leicht, dass X mindestens einen Kreis enthält. Sei $e \in E$ eine Kante, die auf einem Kreis c in X liegt. Dann ist auch der Graph

$$X' := \big(V, E \setminus \{e\}\big)$$

zusammenhängend und als Untergraph von X endlich und planar. Außerdem ist $f' := f|_{X'_{\mathbb{R}}} \colon X'_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X'. Wieviele Facetten hat f' ? Wendet man f' auf die geometrische Realisierung des Kreises c an, so erhält man eine Einbettung von S^1 nach $\mathbb{R}^2$. Nach dem zweiten Teil des Jordanschen Kurvensatzes zerlegt diese $\mathbb{R}^2$ in zwei Wegzusammenhangskomponenten und $f(e_{\mathbb{R}})$ liegt auf dem Rand dieser beiden Wegzusammenhangskomponenten. Daraus folgt:

- Die Facetten von f, in deren Rand $f(e_{\mathbb{R}})$ nicht liegt, sind auch Facetten von f'
- und die beiden Facetten von f, in deren Rand $f(e_{\mathbb{R}})$ liegt, sind in einer Facette von f' enthalten.

Also hat f' genau $F-1$ Facetten und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}|V| - |E| + F &= |V| - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V| - |E \setminus \{e\}| + F - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Der eulersche Polyedersatz lässt sich leicht merken, indem man Knoten als nulldimensional ansieht, Kanten als eindimensional und Facetten als zweidimensional. Die Vorzeichen in der Wechselsumme entsprechen dann jeweils genau $(-1)^{\text{Dimension}}$.

Ausblick 1.6.15 (Euler-Charakteristik)**.** Der eulersche Polyedersatz ist der Prototyp des wichtigen Satzes aus der algebraischen Topologie, dass die sogenannte Euler-Charakteristik (eine höherdimensionale Version der Wechselsumme „$|V| - |E| + F$“) nicht von der gewählten Zerlegung des topologischen Raumes abhängt, sondern sogar nur vom sogenannten Homotopietyp des Raumes.

Wir geben nun erste klassische Anwendungen des eulerschen Polyedersatzes; weitere Anwendungen werden im Verlauf der Vorlesung folgen. Als erste Anwendung betrachten wir die folgende Frage:

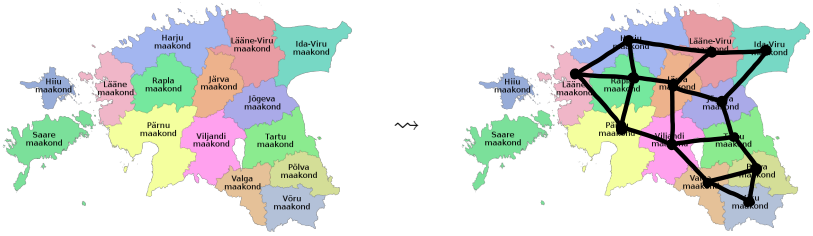


Abbildung 1.12.: Der duale Graph einer Landkarte (Estland; basierend auf Daten des Estonian Land Board (1.2006))

Frage 1.6.16. Wieviele Farben benötigt man höchstens um eine ebene Landkarte mit zusammenhängenden[4] Ländern so zu färben, dass aneinandergrenzende Länder verschiedene Farben haben?

Indem man den zur Landkarte dualen Graphen betrachtet, erhält man eine entsprechende Frage über die Knotenfärbbarkeit von planaren Graphen (Abbildung 1.12). Der eulersche Polyedersatz liefert dann eine erste Antwort:

Korollar 1.6.17 (Sechsfarbensatz)**.** *Sei $X = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender planarer Graph.*

1. *Ist $|V| \geq 3$, so gilt*
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$
2. *Insbesondere gibt es einen Knoten in X, der höchstens Grad 5 hat.*
3. *Also ist der Graph X mit sechs Farben färbbar, d.h. es gibt eine Abbildung $c\colon V \longrightarrow \{1, \ldots, 6\}$ mit*
$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

Beweis. 1. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X und sei ohne Einschränkung $|V| \geq 4$. Nach dem eulerschen Polyedersatz (Satz 1.6.13) erfüllt dann die Anzahl F der Facetten von f die Gleichung
$$F = 2 - |V| + |E|.$$
Da im Fall $|V| \geq 4$ jede Facette von mindestens drei Kanten begrenzt wird und jede Kante im Rand von höchstens zwei Facetten liegt, folgt

[4] Tatsächlich finden sich in der Praxis auch viele unzusammenhängende Gebiete in Landkarten, z.B. sind einige Kantone der Schweiz nicht zusammenhängend, und die Grenze zwischen Indien und Bangladesh beinhaltet viele Enklaven (bis zum 1. August 2015 auch die Enklave dritter Ordnung(!) *Dahala Khabgrabari*)

Abbildung 1.13.: Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$

$$\frac{2 \cdot |E|}{3} \geq F = 2 - |V| + |E|.$$

Somit erhalten wir $|E| \leq 3 \cdot |V| - 3 \cdot 2$, wie behauptet.

2. Hätten alle Knoten Grad mindestens 6, so wäre

$$6 \cdot |V| \leq \sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|,$$

im Widerspruch zum ersten Teil.

3. Der Sechsfarbensatz folgt nun per Induktion aus dem zweiten Teil (Übungsaufgabe). □

Ausblick 1.6.18 (Fünffarbensatz und Vierfarbensatz)**.** Man kann mit elementaren Mitteln und dem Jordanschen Kurvensatz den Beweis des Sechsfarbensatzes zu einem Beweis des *Fünffarbensatzes* (d.h., dass jeder endliche planare Graph 5-färbbar ist) verbessern [15]. Tatsächlich gilt sogar der *Vierfarbensatz*; für diesen ist jedoch kein kurzer Beweis bekannt und alle bekannten Beweise beruhen auf Computerunterstützung.

Eine weitere wichtige Anwendung des eulerschen Polyedersatzes ist der Beweis der Nicht-Planarität gewisser Graphen:

Die wesentlichen Beispiele sind hierbei K_5 (s. Beispiel 1.6.6) und der Graph

$$K_{3,3} := \big(\{(1,0),\ldots,(3,0),(1,1),\ldots,(3,1)\}, \{\{(j,0),(k,1)\} \mid j,k \in \{1,2,3\}\}\big),$$

s. Abbildung 1.13.

Korollar 1.6.19 (Nicht-Einbettbarkeit von K_5 und $K_{3,3}$)**.** *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind* nicht *planar.*

Beweis. Wir geben hier nur den Beweis für K_5; der Fall von $K_{3,3}$ geht ähnlich. *Angenommen*, K_5 ist planar. Nach Korollar 1.6.17 gilt dann

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

was nicht sein kann. Also ist K_5 *nicht* planar. □

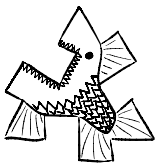
Ausblick 1.6.20 (der Satz von Kuratowski)**.** Der *Satz von Kuratowski* [15] zeigt, dass K_5 und $K_{3,3}$ die Wurzel aller nicht-planaren Graphen sind, d.h. jeder nicht-planare Graph enthält eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Untergraph. Analoge Sätze über verbotene Untergraphen gelten auch für die Einbettbarkeit in kompliziertere Flächen als $\mathbb{R}^2$ bzw. S^2, z.B. für den Torus [31].

Ausblick 1.6.21 (der Satz von Fary-Wagner)**.** Nach dem *Satz von Fary-Wagner* kann jeder endliche planare Graph auch so nach $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden, dass die Kanten des Graphen als gerade Strecken eingebettet werden [15]. Dieses Phänomen wird zum Beispiel auch im *Entangled Game* [38] verwendet.

1.7 Ausblick

In den folgenden Kapiteln werden wir weitere Geometrien genauer untersuchen. Dabei werden wir uns ähnlich zu unserer Betrachtung der Mini-Geometrie an den folgenden fundamentalen Fragen orientieren:

- Wie können wir Geometrien mit zusätzlicher Struktur wie z.B. Längen, Winkel, Flächeninhalte, Krümmung, ... beschreiben?
- Was sind in solchen Geometrien „Geraden“?
- Was können wir über Symmetrien solcher Geometrien aussagen?
- Welche Anwendungen besitzen diese Geometrien?
- Welche Bezüge bestehen zur Schulmathematik?



2

Metrische Geometrie

Im vorigen Kapitel haben wir uns im wesentlichen mit kombinatorischen Geometrien befasst. Wir werden nun damit beginnen, Geometrien mit zusätzlicher Struktur zu untersuchen. Als ersten Schritt in diese Richtung betrachten wir Geometrie mit einem Abstandsbegriff, d.h. die Geometrie metrischer Räume. Insbesondere werden wir uns mit der Länge von Kurven, mit Kreisen und mit Isometrien beschäftigen. Dabei werden wir auch kurz auf Konstruierbarkeitsfragen und auf das sogenannte Extremalprinzip eingehen.

Dieser Ansatz wird im folgenden Kapitel, mit der Einführung von Winkeln, vertieft und erweitert.

Überblick über dieses Kapitel.

2.1	Metrische Räume	38
2.2	Geodäten	42
2.3	Länge von Kurven	46
2.4	Kreise und Konstruierbarkeit	49
2.5	Symmetrie	54
2.6	Das Extremalprinzip	56

Schlüsselbeispiel. euklidische Räume als metrische Räume, Graphen als metrische Räume

2.1 Metrische Räume

Wir beginnen mit einer Erinnerung an den Begriff der metrischen Räume und an klassische Beispiele metrischer Räume. Ein metrischer Raum ist eine Menge zusammen mit einem Abstandsbegriff für Punkte dieser Menge:

Definition 2.1.1 (metrischer Raum)**.** Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften ist:

- Für alle $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$ ist.
- *Symmetrie.* Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
- *Dreiecksungleichung.* Für all $x, y, z \in X$ gilt
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

In diesem Fall nennt man d eine *Metrik* auf der Menge X.

Beispiel 2.1.2 ($\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \end{aligned}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die *euklidische Metrik auf* $\mathbb{R}^n$. Wir werden diese Metrik auch als *Standardmetrik auf* $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Insbesondere erbt auch jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ durch Einschränkung der Standardmetrik eine Metrik.

Andere häufig auftretende Metriken auf $\mathbb{R}^n$ sind die *Taxi-Metrik* (oder ℓ^1*-Metrik*)

$$\begin{aligned} d_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \end{aligned}$$

und die *Maximumsmetrik* (oder ℓ^∞*-Metrik*)

$$\begin{aligned} d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |x_j - y_j|. \end{aligned}$$

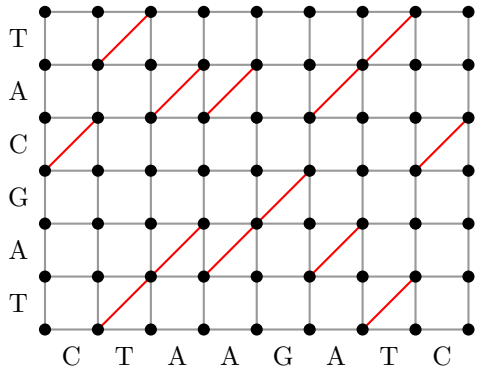


Abbildung 2.1.: Vergleich zweier DNA-Sequenzen $a = \text{CTAAGATC}$ und $b = \text{TAGCAT}$; die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge ist 5, eine solche Teilfolge ist TAGAT.

Außerdem können wir jeden zusammenhängenden Graphen mit der durch die Kombinatorik induzierten Metrik ausstatten, die in vielen Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik auftritt:

Beispiel 2.1.3 (Graphen als metrische Räume)**.** Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann definiert

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (v, w) &\longmapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt einen Weg } (v_0, \ldots, v_n) \text{ in } X \text{ von } v \text{ nach } w\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf der Knotenmenge V.

Beispiel 2.1.4 (längste gemeinsame Teilfolge)**.** Gegeben seien zwei endliche Folgen $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_m)$ über einer gemeinsamen Menge M. Gesucht ist die Länge der *längsten gemeinsamen Teilfolgen* von a und b, d.h. gesucht ist die größte Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass es $i_1 < \cdots < i_r \in \{1, \ldots, n\}$ und $j_1 < \cdots < j_r \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\forall_{k \in \{1, \ldots, r\}} \quad a_{i_k} = b_{j_k}$$

gibt. Diese Länge kann man zum Beispiel wie folgt mihilfe eines Graphen bestimmen: Wir betrachten dazu den Graphen $X_{a,b}$ mit der Knotenmenge

$$V_{a,b} := \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\}$$

und der Kantenmenge

$$\begin{aligned} E_{a,b} := &\big\{\{(i,j),(i+1,j)\} \;\big|\; (i,j) \in \{0,\dots,n-1\} \times \{0,\dots,m\}\big\} \\ &\cup \big\{\{(i,j),(i,j+1)\} \;\big|\; (i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{0,\dots,m-1\}\big\} \\ &\cup \big\{\{(i,j),(i+1,j+1)\} \;\big|\; (i,j) \in V_{a,b} \text{ und } a_{i+1} = b_{j+1}\big\}; \end{aligned}$$

d.h. stimmen die Symbole in den Folgen a und b an den entsprechenden Indizes überein, so fügen wir eine Abkürzung ein. Die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von a und b ist dann genau

$$n + m - d\big((0,0),(n,m)\big),$$

wobei d die von $X_{a,b}$ induzierte Metrik auf $V_{a,b}$ bezeichnet. Der Abstand zwischen Knoten in Graphen kann zum Beispiel mit dem *Algorithmus von Dijkstra* bestimmt werden; damit erhält man insbesondere also eine algorithmische Lösung dieses Teilfolgenproblems.

Zum Beispiel kann man auf diese Weise DNA-Sequenzen vergleichen (Abbildung 2.1); in diesem Fall besteht M aus den Symbolen A, C, G, T. Eine weitere typische Anwendung ist zum Beispiel das UNIX-Kommando diff, das Dateien auf Unterschiede überprüft.

Beispiel 2.1.5 (Zauberwürfel)**.** Wie kompliziert können optimale Lösungen des Zauberwürfels (Rubik's Cube[1]) sein? Wir betrachten dazu den folgenden Graphen X:

- Die Knotenmenge von X ist die Menge aller Positionen des Zauberwürfels, die von der Grundposition (in der alle Seiten des Würfels einfarbig sind) erreichbar sind.
- Wir verbinden zwei Knoten in X genau dann durch eine Kante, wenn die zugehörigen Poisitionen durch eine Vierteldrehung einer der Würfelseiten auseinander hervorgehen.

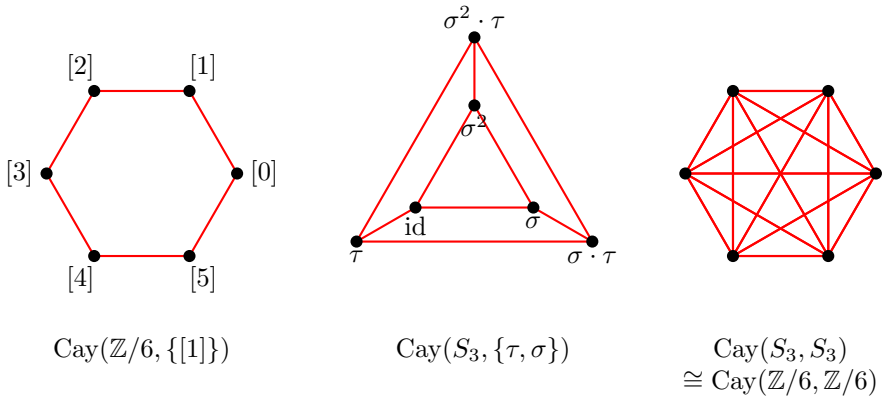
Der Abstand eines Knotens von der Grundposition in der von X induzierten Metrik gibt dann an, wieviele Züge (d.h. Vierteldrehungen von Würfelseiten) nötig sind, um aus dieser Position die Grundposition zu erreichen.

Im Jahr 2014 konnte (mithilfe von ausgiebigen Computerberechnungen) nachgewiesen, dass der maximale Abstand von der Grundposition 26 ist (http://www.cube20.org/qtm/).

Analog konnte 2010 gezeigt werden, dass der maximale Abstand von der Grundposition 20 beträgt, wenn man in jedem Zug nicht nur Vierteldrehungen einer Seite, sondern beliebige Drehungen einer Seite durchführen darf (http://www.cube20.org/).

Beispiel 2.1.6 (Gruppen als metrische Räume)**.** Ist G eine Gruppe und ist $S \subset G$ eine Erzeugendensystem von G (d.h. jedes Element von G kann als Produkt von Elementen aus $S \cup S^{-1}$ geschrieben werden), so definiert man den zugehörigen *Cayley-Graphen* $\mathrm{Cay}(G,S)$ durch

[1] Rubik's Cube ist eine Trademark von *Rubik's Brand Ltd*



$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6, \{[1]\})$ $\mathrm{Cay}(S_3, \{\tau, \sigma\})$ $\mathrm{Cay}(S_3, S_3) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/6)$

Abbildung 2.2.: Beispiele für Cayley-Graphen von kleinen Gruppen; dabei ist $\sigma = (1\ 2\ 3)$ und $\tau = (1\ 2)$

$$\mathrm{Cay}(G, S) := \big(G, \{\{g, g \cdot s\} \mid s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}\big).$$

D.h. der Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ hat die Gruppenelemente von G als Knoten und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich durch ein Element aus $S \cup S^{-1} \setminus \{e\}$ (via Rechtsmultiplikation) unterscheiden.

Insbesondere erbt dann die Gruppe G als Knotenmenge von $\mathrm{Cay}(G, S)$ eine Metrik $d_{G,S}$, die sogenannte *Wortmetrik von G bezüglich S*. Man kann Gruppen somit als geometrische Objekte auffassen; dieser Blickwinkel spielt in der *Geometrischen Gruppentheorie* [27] eine wichtige Rolle.

Beispiele für Cayley-Graphen finden sich in Abbildung 2.2.

Ein weiteres wichtiges Konstruktionsprinzip metrischer Räume sind sogenannte riemannsche Mannigfaltigkeiten; im Zusammenhang mit der Konstruktion der hyperbolischen Ebene (Kapitel 4) werden wir genauer darauf eingehen.

Zwischen metrischen Räumen gibt es mehrere verschiedene interessante Begriffe von Morphismen. Wir werden uns zunächst auf isometrische Einbettungen beschränken:

Definition 2.1.7 (isometrische Einbettung, Isometrie, Isometriegruppe)**.** Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Abbildung.

- Die Abbildung f ist eine *isometrische Einbettung*, wenn

$$\forall_{x,y \in X} \quad d'\big(f(x), f(x')\big) = d(x, x').$$

- Die Abbildung f ist eine *Isometrie*, wenn f eine isometrische Einbettung ist und es eine isometrische Einbettung $f'\colon X' \longrightarrow X$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{X'}$ gibt.

- Wir bezeichnen die Gruppe aller Isometrien $X \longrightarrow X$ (bezüglich Komposition) als *Isometriegruppe von* (X, d) oder *Symmetriegruppe von* (X, d) und schreiben dafür $\mathrm{Isom}(X, d)$.

Eine isometrische Einbettung ist also genau dann eine Isometrie, wenn sie bijektiv ist. Nach Definition ist die Isometriegruppe gerade die Automorphismengruppe in der Kategorie der metrischen Räume und isometrischen Einbettungen.

Beispiel 2.1.8. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

sind Isometrien. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

ist jedoch *keine* isometrische Einbettung.

Beispiel 2.1.9 (Gruppen als Untergruppen von Isometriegruppen)**.** Ist G eine Gruppe und ist $S \subset G$ ein Erzeugendensystem von G, so ist

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathrm{Cay}(G, S)) \\ g &\longmapsto \big(h \mapsto g \cdot h\big) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter injektiver Gruppenhomomorphismus (denn die Linkstranslation mit einem Gruppenelement liefert einen Automorphismus des Graphen $\mathrm{Cay}(G, S)$ und jeder Graphenautomorphismus ist eine Isometrie bezüglich der Graphenmetrik). Auf diese Weise können wir jede Gruppe als Untergruppe einer Isometriegruppe ansehen. Dies ist also eine metrische Version des *Satzes von Cayley*.

2.2 Geodäten

Ein zentraler Baustein für Mini-Geometrie sind neben den Punkten die Geraden. Es stellt sich daher die folgende Frage:

Frage 2.2.1. Was sind „Geraden“ in metrischen Räumen?

Eine naheligende Definition für Geraden in metrischen Räumen ist, dass sie ein metrisches Abbild der reellen Geraden sind; dies führt zum Begriff der Geodäten.

Definition 2.2.2 (metrische Geodäte)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine *Geodäte in X der Länge L* ist eine isometrische Einbettung $[0, L] \longrightarrow X$. Eine isometrische Einbettung $[0, \infty) \longrightarrow X$ bezeichnen wir auch als *geodätischen Strahl*, eine isometrische Einbettung $\mathbb{R} \longrightarrow X$ auch als *geodätische Gerade*. In all diesen Fällen betrachten wir die Standardmetrik auf $[0, L]$, $[0, \infty)$ und $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.3 (Geodäten und Isometrien)**.** *Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume, sei $f\colon X \longrightarrow X'$ eine isometrische Einbettung und sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gilt: Ist $\gamma\colon I \longrightarrow X$ eine Geodäte, so ist auch $f \circ \gamma\colon I \longrightarrow X'$ eine Geodäte.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Komposition isometrischer Einbettungen eine isometrische Einbettung ist. □

Im euklidischen Fall erhalten wir so genau die linearen Geraden:

Proposition 2.2.4 (euklidische Geodäten)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$. Dann gibt es genau eine Geodäte in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik, die in x beginnt und in y endet, nämlich*

$$\begin{aligned} [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + \frac{t}{L} \cdot (y - x). \end{aligned}$$

wobei $L := d_2(x, y)$.

Für den Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 2.2.5. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x, z, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ Punkte mit $z \neq \overline{z}$ und $d_2(x, z) = d_2(x, \overline{z})$. Dann gilt*

$$d_2\Big(x, \frac{1}{2}(z + \overline{z})\Big) < d_2(x, z) = d_2(x, \overline{z}).$$

Beweis. Indem wir die Situation um $-x$ verschieben, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x = 0$ ist (denn die Translation um $-x$ ist eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n, d_2)$).

Sei $m := 1/2 \cdot (z + \overline{z})$. Mit der Definition der euklidischen Metrik d_2 folgt dann

$$\begin{aligned}
d_2(0,z)^2 &= d_2\big(0, m + (z-m)\big)^2 \\
&= d_2(0,m)^2 + d_2(0,z-m)^2 + \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot m_j \cdot (z_j - m_j) \\
&= d_2(0,m)^2 + d_2(0,z-m)^2 + \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j + \overline{z}_j) \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j - \overline{z}_j) \\
&= d_2(0,m)^2 + d_2(0,z-m)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} (z_j^2 - \overline{z}_j^2) \\
&= d_2(0,m)^2 + d_2(0,z-m)^2 + \frac{1}{2} \cdot \big(d_2(0,z)^2 - d_2(0,\overline{z})^2\big) \\
&= d_2(0,m)^2 + d_2(0,z-m)^2 + 0.
\end{aligned}$$

Wegen $z \neq \overline{z}$ ist $z - m \neq 0$. Somit liefert die obige Rechnung also

$$d_2(0,z)^2 > d_2(0,m)^2,$$

wie behauptet. □

Beim Beweis dieses Lemmas handelt es sich natürlich um eine verkappte Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Da wir die Struktur des Skalarprodukts aber an dieser Stelle noch nicht nutzen wollen (sondern nur die metrische Struktur), haben wir den Beweis anders formuliert.

Beweis (von Proposition 2.2.4). Offenbar ist die in der Proposition angegebene Abbildung $\gamma\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Geodäte in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ von x nach y.

Sei $\overline{\gamma}\colon [0,\overline{L}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Geodäte von x nach y; insbesondere ist dann $\overline{L} = d_2(x,y) = L$. *Angenommen,* $\overline{\gamma} \neq \gamma$. Dann existiert ein $t \in (0,L)$ mit

$$\overline{z} := \overline{\gamma}(t) \neq \gamma(t) =: z.$$

Da γ und $\overline{\gamma}$ Geodäten sind, folgt

$$d_2(x,z) = d_2(x,\overline{z}) \quad \text{und} \quad d_2(y,z) = d_2(y,\overline{z}).$$

Sei nun $m := 1/2 \cdot (z + \overline{z})$. Mit Lemma 2.2.5 erhalten wir

$$d_2(x,m) < d_2(x,z) \quad \text{und} \quad d_2(y,m) < d_2(y,z).$$

Also folgt mit der Tatsache, dass γ eine Geodäte ist und der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned}
L = d_2(x,y) &\leq d_2(x,m) + d_2(m,y) \\
&< d_2(x,z) + d_2(z,y) = d_2\big(\gamma(0),\gamma(t)\big) + d_2\big(\gamma(t),\gamma(L)\big) \\
&= t + (L-t) = L
\end{aligned}$$

(Abbildung 2.3), was nicht sein kann. Dies zeigt die Eindeutigkeit von γ. □

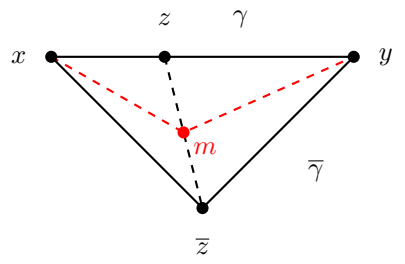


Abbildung 2.3.: Eindeutigkeit euklidischer Geodäten

Bemerkung 2.2.6 (euklidische geodätische Geraden)**.** Mit Proposition 2.2.4 bzw. den im Beweis verwendeten Methoden folgt analog: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine geodätische Gerade in $(\mathbb{R}^n, d_2)$, so gilt

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \quad \gamma(t) = \gamma(0) + t \cdot \big(\gamma(1) - \gamma(0)\big).$$

Bemerkung 2.2.7 (metrische Räume und Mini-Geometrie)**.** Nicht jeder metrische Raum bildet bezüglich der Menge aller Geodäten zwischen je zwei Punkten eine Mini-Geometrie, da es zwischen zwei Punkten mehr als eine Geodäte geben kann. Metrische Räume, bei denen je zwei Punkte durch genau eine Geodäte verbunden werden können, nennt man *eindeutig geodätische Räume*. Metrische Räume, bei denen je zwei Punkte durch eine Geodäte verbunden werden können, nennt man *geodätische metrische Räume*.

Beispiel 2.2.8.

- Der Raum $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der Einschränkung der euklidischen Metrik ist *nicht* geodätisch; dies kann man aus Proposition 2.2.4 folgern.
- Der Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist geodätisch aber *nicht* eindeutig geodätisch. Beispiele für Geodäten von $(0,0)$ nach $(1,1)$ sind in Abbildung 2.4 dargestellt; dies erklärt auch den Namen Taxi-Metrik, wenn man sich vorstellt, dass man mit einem Taxi in einer US-amerikanischen Stadt auf kürzestem Wege von einem Punkt zum anderen gelangen möchte.

Mithilfe von Geodäten erhalten wir auch einen vernünftigen Begriff von Dreiecken in metrischen Räumen:

Definition 2.2.9 (geodätisches Dreieck)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck in* (X, d) ist ein Tripel $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ bestehend aus drei Geodäten $\gamma_0\colon [0, L_0] \longrightarrow X$, $\gamma_1\colon [0, L_1] \longrightarrow X$ und $\gamma_2\colon [0, L_2] \longrightarrow X$ mit

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

Dabei bezeichnen wir $\gamma_0(0)$, $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0)$ als die *Eckpunkte* des geodätischen Dreiecks $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$.

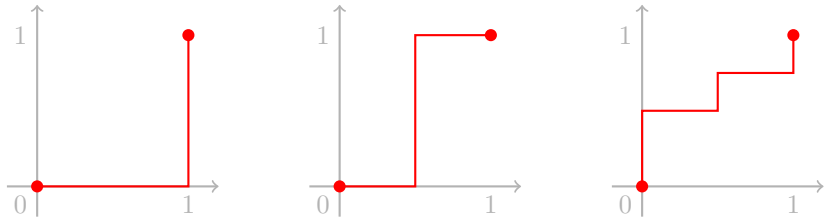


Abbildung 2.4.: Geodäten $[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in der Taxi-Metrik (jeweils mit der offensichtlichen gleichförmigen Parametrisierung)

Caveat 2.2.10. Im Gegensatz zu Mini-Geometrie-Dreiecken sind geodätische Dreiecke im allgemeinen *nicht* durch ihre Eckpunkte eindeutig bestimmt.

Auch Graphen mit der Graphenmetrik sind *nicht* geodätisch (wenn sie mehr als einen Knoten haben). Man kann aber die geometrische Realisierung kompatibel mit einer metrischen Struktur versehen.

2.3 Länge von Kurven

Als nächsten Schritt wollen wir den Abstandsbegriff nutzen, um einen allgemeinen Längenbegriff für Kurven zu erhalten.

Definition 2.3.1 (rektifizierbar, Länge einer Kurve)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 \leq T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0,T_1] \longrightarrow X$ stetig. Die *Länge von* γ ist definiert als

$$L(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ und } t_0, \dots, t_n \in [T_0,T_1] \text{ mit } t_0 \leq t_q \leq \dots \leq t_n \right\}$$

$$\in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Wir nennen γ *rektifizierbar*, wenn $L(\gamma) \neq \infty$ ist.

Mit diesem Längenbegriff für Kurven sieht man, dass Geodäten als kürzeste Wege angesehen werden können:

Proposition 2.3.2 (Länge von Geodäten)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $\gamma\colon [0,L] \longrightarrow X$ eine stetige Kurve.*

1. *Dann ist $L(\gamma) \geq d\big(\gamma(0), \gamma(L)\big)$.*

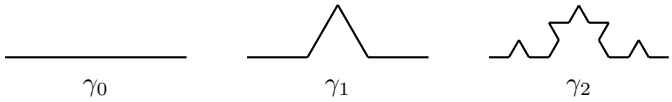


Abbildung 2.5.: Iterative Konstruktion der Koch-Kurve

2. Ist γ eine Geodäte, so ist $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(L)) = L$.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Da der Längenbegriff für Kurven rein metrischer Natur ist, ist er natürlich mit isometrischen Einbettungen verträglich:

Proposition 2.3.3 (Länge und Isometrien)**.** *Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume, sei $f\colon X \longrightarrow X'$ eine isometrische Einbettung und sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gilt: Ist $\gamma\colon I \longrightarrow X$ eine rektifizierbare Kurve, so ist auch die Komposition $f \circ \gamma\colon I \longrightarrow X'$ eine rektifizierbare Kurve und*

$$L(f \circ \gamma) = L(\gamma).$$

Beweis. Da f als isometrische Einbettung stetig ist, ist auch $f \circ \gamma$ stetig. Mit der Definition der Länge und der Voraussetzung, dass f eine isometrische Einbettung ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&L(f \circ \gamma) \\
&= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d\big(f \circ \gamma(t_j), f \circ \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \cdots \leq t_n \in [T_0, T_1] \right\} \\
&= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \cdots \leq t_n \in [T_0, T_1] \right\} \\
&= L(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun ein klassisches Beispiel für eine stetige Kurve, die nicht rektifizierbar ist:

Beispiel 2.3.4 (Koch-Kurve)**.** Wir konstruieren die *Koch-Kurve* in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ wie folgt iterativ aus einer Folge stückweise linearer Kurven: Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
\gamma_0\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
t &\longmapsto (t, 0).
\end{aligned}$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist die stückweise lineare Kurve $\gamma_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bereits konstruiert, so erhalten wir $\gamma_{n+1}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folgendermaßen: Wir ersetzen

jedes maximale gerade Segment von γ_n durch das „nach oben weisende“ Zick-Zack

wobei jedes der neuen geraden Segmente genau ein Drittel der Länge des Ausgangssegments besitzt und die offensichtliche gleichmäßige Parametrisierung besitzt. Dies liefert die in Abbildung 2.5 skizzierte Iteration.

Man sieht leicht, dass die Funktionenfolge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist[2] und somit eine Grenzfunktion $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt. Da die einzelnen Folgenglieder stetig sind, ist auch γ stetig.

Welche Länge hat γ ? Nach Konstruktion besteht γ aus vier Teilen, die jeweils isometrisch zur um den Faktor $1/3$ skalierten Kurven γ sind. Damit erhalten wir

$$L(\gamma) = \frac{4}{3} \cdot L(\gamma).$$

Wegen $L(\gamma) \geq 1 > 0$ folgt somit, dass $L(\gamma)$ *nicht* endlich ist.

Ähnliche Phänomene treten in der Natur zum Beispiel bei Küstenlängen (Norwegen!) auf.

Beispiel 2.3.5 ($\sqrt{2} = 2$?!)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Gerade für angehende Lehrer ist es wichtig zu erkennen, ob eine plausibel erscheinende Argumentation (z.B. eines Schülers!) tatsächlich korrekt ist bzw. was der Fehler ist und die unterliegenden Probleme präzise und verständlich erklären zu können.

Behauptung. Es gilt $\sqrt{2} = 2$.

Beweis. Wir betrachten die folgenden stetigen Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\gamma_n\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Treppenkurve mit n Stufen mit Stufentiefe und Stufenhöhe $1/n$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$, mit der offensichtlichen gleichmäßigen Parametrisierung (Abbildung 2.6).

Dann konvergiert die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto 1/2 \cdot (t,t). \end{aligned}$$

Also ist

$$L(\gamma) = L\big(\lim_{n\to\infty} \gamma_n\big) = \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) = 2.$$

Andererseits ist natürlich $L(\gamma) = \sqrt{2}$. Somit folgt $\sqrt{2} = 2$.

[2] Für den Fall, dass der Begriff *gleichmäßige Konvergenz* in Vergessenheit geraten sein sollte, ist dies nun eine gute Gelegenheit, das Wissen nochmal aufzufrischen.

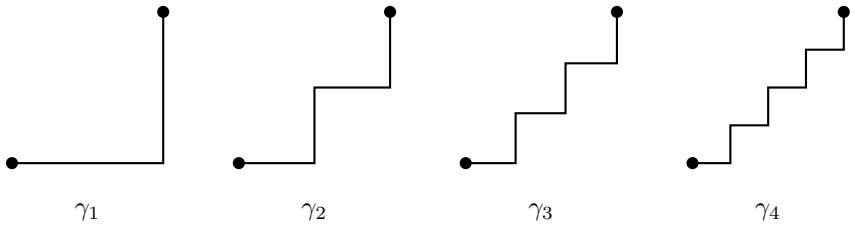


Abbildung 2.6.: Approximation der Diagonalen

Dass Längen von Kurven im allgemeinen keine rationalen Zahlen sind, war bereits den Griechen in der Antike bekannt. Während die Arithmetik damals nur die rationalen Zahlen umfasste, wurde in der Geometrie bereits auch mit irrationalen Größen erfolgreich gearbeitet. Eine Formalisierung der reellen Zahlen, so wie wir sie heute kennen, war damals aber noch außer Reichweite.

Im Zusammenhang mit der Länge von Kurven stellt sich auch die folgende praktische Frage:

Frage 2.3.6. Kann man längenerhaltende Landkarten von Gebieten der Erdoberfläche zeichnen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir jedoch zunächst die Geometrie der Erdoberfläche genauer verstehen (Kapitel 4.6).

2.4 Kreise und Konstruierbarkeit

Über die Metrik können wir natürlich auch Kreise, Sphären und Kugeln definieren:

Definition 2.4.1 (Sphäre, Ball, Kreis)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $x \in X$ und sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Die *Sphäre um x mit Radius r in* (X, d) wird definiert als

$$S_x^{(X,d)}(r) := \{y \in X \mid d(y, x) = r\}.$$

- Der *Ball um x mit Radius r in* (X, d) wird definiert als

$$B_x^{(X,d)}(r) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

- Sphären in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ bezeichnet man auch als *Kreise*.

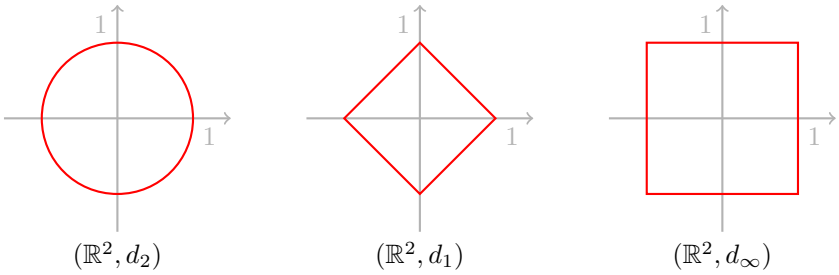


Abbildung 2.7.: Sphären vom Radius 1 um 0 in $\mathbb{R}^2$

Beispiel 2.4.2 (Sphären in $\mathbb{R}^2$)**.** Sphären in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ sind gewöhnliche euklidische Kreise, Sphären in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ sind Quadrate, deren Ecken auf den Koordinatenachsen liegen und Sphären in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ sind Quadrate, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind (Abbildung 2.7).

Bemerkung 2.4.3 (Winkel)**.** In $\mathbb{R}^2$ könnte man nun über Kreise und die Länge von Kurven auch Winkel von Hand definieren. Wir ziehen es aber vor, Winkel über das Skalarprodukt zu beschreiben (weil sich diese Betrachtung auch auf den riemannschen Fall übertragen lässt) und verschieben daher die Diskussion von Winkeln auf das nächste Kapitel.

Beispiel 2.4.4 (Sphären und Bälle in Graphen)**.** Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann nimmt die von X induzierte Metrik auf V nur ganzzahlige Werte an; Sphären mit einem Radius, der in $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$ liegt, sind also leer.

Ist der Graph X zusätzlich *lokal endlich* (d.h. jeder Knoten von X hat endlichen Grad), so enthält jeder Ball in V bezüglich der von X induzierten Metrik endlich viele Knoten. Zum Beispiel enthält der Ball um 0 in $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ vom Radius $r \in \mathbb{N}$ genau $2 \cdot r + 1$ Knoten. Bälle in $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ wachsen also linear im Radius.

Ausblick 2.4.5 (Wachstum in der geometrischen Gruppentheorie)**.** Ist G eine Gruppe und ist $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem, so ist der Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ zusammenhängend und lokal endlich. Das Wachstumsverhalten der Funktion

$$\begin{aligned} \beta_{G,S} \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ r &\longmapsto \left| B_e^{\mathrm{Cay}(G,S)}(r) \right| \end{aligned}$$

spielt eine wichtige Rolle in der *geometrischen Gruppentheorie*. Insbesondere ergeben sich überraschende Zusammenhänge zwischen diesem (geometrischen!) Wachstumsverhalten und algebraischen Eigenschaften der Grup-

pe: Nach dem *Polynomialen Wachstumssatz* von Gromov hat diese Funktion $\beta_{G,S}$ nämlich genau dann polynomiales Wachstum, wenn die Gruppe G eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index besitzt.

Eine klassische wichtige Frage in der Geometrie ist es, welche geometrischen Objekte bzw. welche Punkte sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Indem wir das Lineal durch (geodätische) Geraden und den Zirkel durch Kreise/Sphären modellieren erhalten wir den folgenden Konstruierbarkeitsbegriff:

Definition 2.4.6 (Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, wobei wir die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ betrachten. Dann schreiben wir

$$K(M) := K_1(M) \cup K_2(M) \cup K_3(M),$$

wobei die elementaren Konstruktionsschritte K_1, K_2, K_3 wie folgt definiert sind: Sei $G(M)$ die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$, die zwei verschiedene Punkte aus M enthalten; sei $C(M)$ die Menge aller Kreise in $\mathbb{R}^2$, deren Mittelpunkt in M liegt und deren Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus M ist. Wir schreiben

- $K_1(M)$ für die Menge aller Schnittpunkte zweier verschiedener Geraden aus $G(M)$,
- $K_2(M)$ für die Menge aler Schnittpunkte von Geraden aus $G(M)$ mit Kreisen aus $C(M)$,
- $K_3(M)$ für die Menge aller Schnittpunkte zweier verschiedener Kreise aus $C(M)$.

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist *aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbar*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in K^{\circ n}(M)$ gibt.

Bemerkung 2.4.7 (Verallgemeinerte Zirkel und Lineale)**.** Dieser Konstruierbarkeitsbegriff lässt sich natürlich auch auf allgemeinere metrische Räume verallgemeinern; es bietet sich in diesem Fall an, sich auf eindeutig geodätische metrische Räume zu beschränken und zusätzlich zu verlangen, dass der Raum *eindeutig geodätisch vollständig* ist, d.h., dass jede Geodäte zu einer eindeutigen geodätischen Geraden verlängert werden kann. Man beachte jedoch, dass sich diese Verallgemeinerung sehr exotisch verhalten kann, da es im allgemeinen zum Beispiel sehr viele Schnittpunkte zwischen zwei verschiedenen Sphären geben kann.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen noch heute in der Schulmathematik eine wichtige Rolle. Daher wollen wir ein Beispiel im Detail ansehen. Die Grundstruktur bei Konstruktionsproblemen ist immer dieselbe:

- Beschreibung des Konstruktionsproblems.

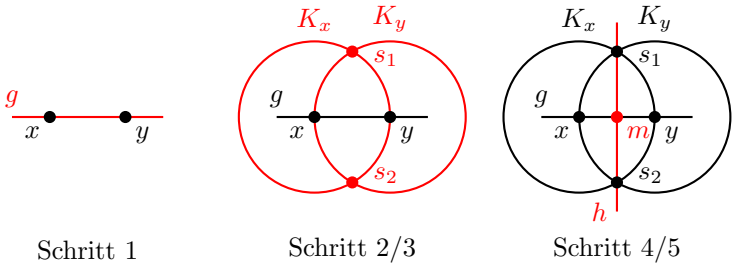


Abbildung 2.8.: Konstruktion des Mittelpunktes von x und y

- Beschreibung einer Konstruktion, die das gegebene Konstruktionsproblem löst.
- Beweis, dass die angegebene Konstruktion tatsächlich so durchgeführt werden kann und das Konstruktionsproblem löst.

Beispiel 2.4.8 (Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke in $\mathbb{R}^2$)**.**

Konstruktionsproblem. Gegeben seien zwei Punkte x, $y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq y$. Gesucht ist eine Konstruktion des Mittelpunkts $m := 1/2 \cdot (x+y) \in \mathbb{R}^2$ von x und y.

Konstruktion. (s. Abbildung 2.8)

1. Wir zeichnen die Gerade g durch x und y.
2. Wir zeichnen den Kreis K_x um x mit Radius $r := d_2(x, y)$ und den Kreis K_y um y mit Radius r.
3. Wir bezeichnen die beiden Schnittpunkte von K_x und K_y mit s_1 und s_2.
4. Wir zeichnen die Gerade h durch s_1 und s_2.
5. Der Schnittpunkt von g und h ist dann der gesuchte Punkt m.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion. Wir zeigen Schritt für Schritt, dass die Konstruktionsschritte durchgeführt werden können und dass die Konstruktion das gewünschte leistet:

1. Da $x \neq y$ ist, gibt es tatsächlich genau eine Gerade g in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, die x und y enthält.
2. Wegen $x \neq y$ ist $r = d_2(x, y) > 0$. Insbesondere gibt es somit eindeutige Kreise K_x und K_y um x bzw. y vom Radius r.
3. Es gilt $|K_x \cap K_y| = 2$, denn: Nachrechnen (durch Auflösen der entsprechenden quadratischen Gleichungen) zeigt: Wegen

$$r - r < d_2(x, y) < r + r$$

haben K_x und K_y genau zwei Schnittpunkte. Andererseits zeigt Einsetzen, dass die Punkte

$$s_1 := m + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A \cdot (y - x)$$
$$s_2 := m - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A \cdot (y - x)$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $K_x \cap K_y$ liegen.

4. Nach dem letzten Schritt ist $s_1 \neq s_2$. Es gibt also genau eine Gerade h in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, die s_1 und s_2 enthält.
5. Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt, nämlich m, denn: Da s_1 und s_2 offenbar nicht auf g liegen, ist $g \neq h$. Also haben g und h höchstens einen Schnittpunkt und es genügt somit zu zeigen, dass m auf g und h liegt. Offensichtlich gilt $m \in g$. Außerdem ist auch $m \in h$, denn

$$m = \frac{1}{2} \cdot (s_1 + s_2).$$

Ausblick 2.4.9 (Konstruierbarkeit und Galoistheorie)**.** Ein einfaches Abzählargument zeigt, dass ausgehend von den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 0)$ nur abzählbar viele Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Da $\mathbb{R}^2$ überabzählbar ist, gibt es also insbesondere Punkte in $\mathbb{R}^2$, die *nicht* aus diesen beiden Anfangspunkten mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Eine genauere Analyse der Gleichungen für Geraden und Kreise zeigt, dass nur ganz bestimmte algebraische Zahlen in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ konstruiert werden können. Mithilfe von Galoistheorie erhält man dann die folgende Charakterisierung [29]:

Satz 2.4.10 (Konstruierbarkeit und Galoistheorie)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine Teilmenge mit $0, 1 \in M$ und zei $z \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Punkt z kann aus M mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.*
2. *Es gibt eine Galois-Erweiterung L von $\mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$, deren Grad eine Zweierpotenz ist, mit $z \in L$.*

Konkrete Beispiele sind:

- Im allgemeinen ist die Drittelung eines gegebenen Winkels *nicht* mit Zirkel und Lineal möglich.
- Die Kantenlänge eines Würfel mit Volumen 2 ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ konstruierbar.
- Das reguläre Siebeneck mit Radius 1 ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ konstruierbar.
- Die Kantenlänge eines Quadrats mit demselben Flächeninhalt wie der Einheitskreis ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ konstruierbar.

Ausblick 2.4.11 (Origami)**.** Analog kann man auch die Reichweite anderer Konstruktionsprinzipien mit algebraischen Methoden studieren, z.B. die Konstruktion mithilfe von Origami (d.h. durch Falten von Papier).

2.5 Symmetrie

Bereits in Kapitel 1.5.3 haben wir ein einfaches Beispiel kennengelernt, in dem Symmetrien eine wichtige Rolle gespielt haben. Allgemein gehört zur Untersuchung eines geometrischen Objekts auch die Untersuchung seiner Symmetriegruppe, im metrischen Fall also der Isometriegruppe.

Im euklidischen Fall gilt das folgende Starrheitsresultat. Als *Starrheit* bezeichnet man in der Geometrie Phänomene, bei denen Abbildungen mehr Struktur erhalten als eigentlich zu erwarten ist; in diesem Falle bezieht sich dies auf die Tatsache, dass Isometrien (also Abbildungen, die nur die metrische Struktur erhalten) euklidischer Räume bereits affin linear sind. Insbesondere greifen dann die Methoden der linearen Algebra.

Satz 2.5.1 (Starrheit euklidischer Isometrien)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$. Dann ist f affin linear, d.h. $f - f(0)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-linear. Insbesondere können wir die Untergruppe*

$$\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) := \big\{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \;\big|\; f(0) = 0 \big\}$$

als Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *auffassen.*

Beweis. Die Idee des Beweises ist es, den bereits hergestellten Zusammenhang zwischen euklidischen Geodäten und der linearen Struktur zu nutzen. Sei $f_0 := f - f(0)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Wir zeigen nun, dass f_0 linear ist: Nach Konstruktion ist auch f_0 eine Isometrie und $f_0(0) = f(0) - f(0) = 0$.

① Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $d_2(0,x) = 1$. Dann gilt $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$, denn: Wegen $d_2(0,x) = 1$ ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

eine geodätische Gerade in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Also ist auch $f_0 \circ \gamma$ eine geodätische Gerade mit $f_0 \circ \gamma(0) = f_0(0) = 0$ und mit Bemerkung 2.2.6 folgt

$$f_0(\lambda \cdot x) = f_0 \circ \gamma(\lambda) = \lambda \cdot f_0 \circ \gamma(1) = \lambda \cdot f_0(x).$$

①' Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$, denn: Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$. Mit dem ersten Schritt folgt dann für $x' := 1/d_2(0,x) \cdot x$, dass

$$\begin{aligned} f_0(\lambda \cdot x) &= f_0\big(\lambda \cdot d_2(0,x) \cdot x'\big) = \lambda \cdot d_2(0,x) \cdot f_0(x') \\ &= \lambda \cdot f_0\big(d_2(0,x) \cdot x'\big) = \lambda \cdot f_0(x). \end{aligned}$$

② Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$, denn: Nach dem vorigen Schritt können wir ohne Einschränkung $x \neq y$ annehmen. Wir betrachten die Geodäte

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,L] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + \frac{t}{L} \cdot (y - x) \end{aligned}$$

von x nach y, wobei $L := d_2(x,y)$. Also ist $f_0 \circ \gamma$ eine/die Geodäte von $f_0(x)$ nach $f_0(y)$; mit dem vorigen Schritt und Proposition 2.2.4 folgt somit

$$\begin{aligned} f_0(x+y) &= f_0\Big(2 \cdot \Big(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} y\Big)\Big) \\ &= 2 \cdot f_0 \circ \gamma\Big(\frac{L}{2}\Big) \\ &= 2 \cdot \Big(f_0(x) + \frac{1}{2} \cdot \big(f_0(y) - f_0(x)\big)\Big) \\ &= f_0(x) + f_0(y). \end{aligned}$$

Also ist f_0 linear. □

Ein wichtiger Begriff, der auf den Symmetrien aufbaut, ist die Kongruenz; anschaulich gesprochen sind Teilmengen eines metrischen Raumes kongruent, wenn sie sich so innerhalb des metrischen Raums „bewegen“ lassen, dass sie übereinstimmen.

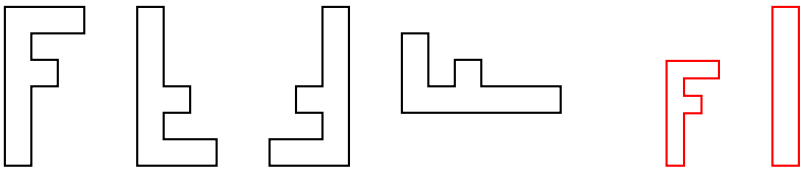


Abbildung 2.9.: (Nicht-)Beispiele für Kongruenzen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

Definition 2.5.2 (Kongruenz)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subset X$ heißen *kongruent*, wenn es eine Isometrie $f \in \mathrm{Isom}(X, d)$ mit $f(A) = B$ gibt.

Beispiel 2.5.3 (Kongruenzen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$)**.** Die linken vier Figuren in Abbildung 2.9 sind in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kongruent zueinander. Die rechten beiden Figuren sind *nicht* kongruent zu diesen Figuren.

Um zu bestimmen, welche Teilmengen eines metrischen Raumes kongruent zueinander sind, ist es also essentiell, zunächst die Isometriegruppe zu bestimmen. Im euklidischen Fall ist Satz 2.5.1 ein erster Schritt; wir werden im nächsten Kapitel noch eine genauere Beschreibung geben (mithilfe von linearer Algebra).

Die genaue Kenntnis der Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ – und den davon abgeleiteten Kongruenzsätzen – spielt in der elementaren ebenen Geometrie eine zentrale Rolle.

2.6 Das Extremalprinzip

Das sogenannte Extremalprinzip ist eine relativ allgemeine Lösungsstrategie für viele mathematische Probleme [17], die insbesondere in der elementaren Geometrie schöne Anwendungen besitzt.

Die Grundidee des *Extremalprinzips* besteht darin, Objekte zu betrachten, die sich dadurch auszeichnen, dass sie gewisse Größen maximieren oder minimieren.

Naheliegende Fragen bei der Lösung von geometrischen Problemen sind nach dem Extremalprinzip also:

- Welche Punkte haben den größten bzw. kleinsten Abstand voneinander?
- Welche Punkte haben den größten bzw. kleinsten Abstand von einem anderen geometrischen Objekt?

Eine schöne Anwendung des Extremalprinzips ist zum Beispiel der Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai:

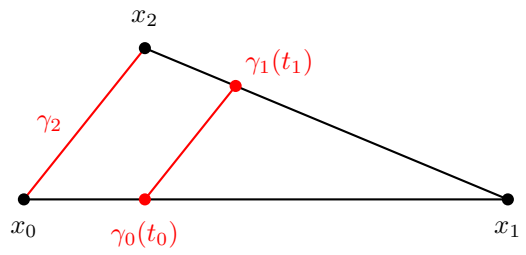


Abbildung 2.10.: Abschätzung des Abstands zwischen Punkten und Seiten

Satz 2.6.1 (Satz von Sylvester-Gallai)**.** *Sei M eine endliche Menge von Punkten in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgender Eigenschaft: Führt eine Gerade g in $\mathbb{R}^2$ durch zwei verschiedene Punkte aus M, so liegt auch ein dritter Punkt aus M auf g. Dann folgt bereits, dass alle Punkte aus M auf einer gemeinsamen Geraden liegen.*

Im Beweis werden wir auf die folgende Eigenschaft von euklidischen Dreiecken zurückgreifen (Abbildung 2.10):

Lemma 2.6.2. *Sei $(\gamma_0\colon [0, L_1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1\colon [0, L_1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2\colon [0, L_2] \to \mathbb{R}^2)$ ein geodätisches Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Ecken $x_0 := \gamma_0(0)$, $x_1 := \gamma_1(0)$ und $x_2 := \gamma_2(0)$; diese Ecken seien alle verschieden. Sei $t_0 \in (0, L_0)$. Dann gibt es ein $t_1 \in (0, L_1)$ mit*

$$d_2\big(\gamma_0(t_0), \gamma_1(t_1)\big) < d_2(x_0, x_2).$$

Beweis. Dies ist eine einfache Variante des Strahlensatzes: Wir betrachten dazu $t_1 := L_1 - L_1 \cdot t_0/L_0 \in (0, L_1)$. Mit Proposition 2.2.4 folgt

$$\gamma_1(t_1) = x_1 + \frac{t_1}{L_1} \cdot (x_2 - x_1) = x_2 + \frac{t_0}{L_0}(x_1 - x_2)$$

und damit

$$\begin{aligned} d_2\big(\gamma_0(t_0), \gamma_1(t_1)\big) &= d_2\Big(x_0 + \frac{t_0}{L_0}(x_1 - x_0), x_2 + \frac{t_0}{L_0}(x_1 - x_2)\Big) \\ &= d_2\Big(0, \Big(1 - \frac{t_0}{L_0}\Big) \cdot (x_0 - x_2)\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{t_0}{L_0}\Big) \cdot d_2(0, x_0 - x_2) \\ &= \Big(1 - \frac{t_0}{L_0}\Big) \cdot d_2(x_0, x_2) \\ &< d_2(x_0, x_2), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

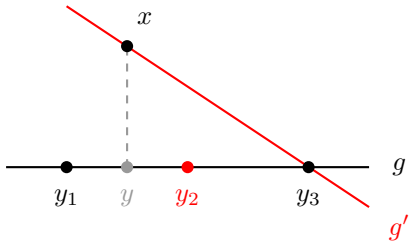


Abbildung 2.11.: Anordnung der Punkte im Satz von Sylvester-Gallai

Beweis (von Satz 2.6.1). Ohne Einschränkung sei $M \neq \emptyset$. *Angenommen,* die Punkte aus M liegen *nicht* alle auf einer Geraden. Wir setzen nun mit dem Extremalprinzip an: Sei G die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$, die mindestens zwei Punkte aus M enthalten. Da M endlich ist, ist somit auch G endlich. Also gibt es ein Paar $(x, g) \in M \times G$ mit folgenden Eigenschaften:

- Der Punkt x liegt nicht auf g und
- der Abstand von x zu g unter all solchen Paaren ist minimal.

Der *Abstand* von x zu g ist dabei als

$$d_2(x, g) := \inf\bigl\{d_2(x, y) \bigm| y \in g\bigr\}$$

definiert; ein einfaches topologisches Argument zeigt, dass dieses Infimum tatsächlich ein Minimum ist. Sei $y \in g$ ein Punkt mit $d_2(x, g) = d_2(x, y)$.

Nach Definition von G und der Annahme über M gibt es drei verschiedene Punkte $y_1, y_2, y_3 \in M$, die auf g liegen. Mindestens zwei dieser Punkte liegen auf „derselben Seite“ von y. Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass die Punkte wie in der schematischen Abbildung 2.11 angeordnet sind.

Sei g' die Gerade durch x und y_3. Wenden wir nun Lemma 2.6.2 auf das durch die Punkte (y, y_3, x) bestimmte geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und den Punkt y_2 auf der Geodäten von y nach y_3 an, so sehen wir, dass

$$d_2(y_2, g') < d_2(y, x) = d_2(x, g)$$

ist, im Widerspruch zur extremalen Wahl des Paares (x, g). Bei der Anwendung des Lemmas haben wir implizit $y \neq y_2$ verwendet; im Fall, dass $y = y_2$ ist, kann man zum Beispiel mithilfe der Kreise um $y = y_2$ und um x vom Radius $d_2(x, y)$ leicht feststellen, dass $d_2(y_2, g') < d_2(x, y)$ ist, was denselben Widerspruch liefert.

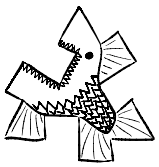
Also liegen die Punkte aus M alle auf einer gemeinsamen Geraden. $\square$

Korollar 2.6.3. *Die Fano-Ebene kann nicht nach $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik oder als Mini-Geometrie) geradlinig eingebettet werden, d.h. es gibt* keine *Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ von sieben Punkten, so dass*

1. *je drei verschiedene Punkte aus M auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und*
2. *jede Gerade höchstens drei Punkte aus M enthält.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine solche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ von sieben Punkten. Wegen der ersten Eigenschaft erfüllt M die Bedingungen aus dem Satz von Sylvester-Gallai. Nach diesem Satz liegen dann aber alle Punkte aus M auf einer gemeinsamen Geraden, im Widerspruch zur zweiten Eigenschaft von M. Also kann die Fano-Ebene *nicht* geradlinig in $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden. □

Eine weitere schöne Anwendung des Extremalprinzips ist die Existenz von Fixpunkten bei Operationen endlicher Gruppen auf Bäumen (Übungsaufgabe).



3

Euklidische Geometrie

Wir werden uns nun auf eine spezielle metrische Geometrie konzentrieren, die euklidische Geometrie in $\mathbb{R}^n$ als Geometrie des Standardskalarprodukts. Das Skalarprodukt wird es uns insbesondere erlauben, Winkel und Volumina etc. zu definieren und die Symmetriegruppe von $(\mathbb{R}^n, d_2)$ genau zu beschreiben. Wir werden uns dann darauf aufbauend eingehend mit verschiedenen Symmetriephänomenen beschäftigen, unter anderem mit Kongruenz, Regularität und mit Pflasterungen der Ebene.

Das Verständnis dieser Beschreibung der euklidischen Geometrie in $\mathbb{R}^n$ bildet außerdem die Grundlage für die riemannsche Geometrie, die wir zur Konstruktion und Untersuchung der hyperbolischen Ebene im nächsten Kapitel nutzen werden.

Überblick über dieses Kapitel.

3.1	Normierte Räume und Skalarprodukte	62
3.2	Kurven	67
3.3	Winkel	75
3.4	Symmetrie	83
3.5	Pflasterungen der euklidischen Ebene	97

Schlüsselbeispiel. euklidische Räume als Räume mit Skalarprodukt

3.1 Normierte Räume und Skalarprodukte

Eine systematische, algebraische, Quelle für Metriken auf Vektorräumen sind Skalarprodukte: Skalarprodukte induzieren Normen und Normen induzieren Metriken. Wir erinnern in diesem Abschnitt an grundlegende Begriffe und Resultate aus der linearen Algebra [8, 25] zu normierten Räumen und Skalarprodukten.

3.1.1 Normierte Räume

Wir beginnen mit normierten Räumen:

Definition 3.1.1 (Norm, normierter Raum)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Norm auf* V ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $x \in V \setminus \{0\}$ ist $\|x\| > 0$.
2. *Homogenität.* Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, wobei $|\lambda|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag von λ bezeichnet.
3. *Dreiecksungleichung.* Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

In diesem Fall bezeichnet man das Paar $(V, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum.*

Proposition 3.1.2 (Norm $\rightsquigarrow$ Metrik)**.** *Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so ist*

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (v, w) &\longmapsto \|v - w\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf V, die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

Beispiel 3.1.3 (euklidische Norm, 1-Norm, ∞-Norm)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Metriken d_2, d_1, d_∞ werden von den folgenden Normen auf $\mathbb{R}^n$ induziert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \\ \|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j| \end{aligned}$$

Diese Normen verallgemeinern sich zu entsprechenden Normen auf Funktionenräumen; die zugehörige Geometrie dieser unendlich-dimensionalen Vektorräume ist unter anderem Gegenstand der *Funktionalanalysis*.

Wie wir bereits im letzten Kapitel gesehen haben, liefern verschiedene Normen auf $\mathbb{R}^n$ sehr unterschiedliche Geometrien. Die induzierte Topologie ist jedoch immer dieselbe:

Satz 3.1.4 (Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Fall)**.** *Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ Normen auf V, so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ bereits* äquivalent*, d.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\forall_{x\in V} \quad \frac{1}{C}\cdot\|x\| \leq \|x\|' \leq C\cdot\|x\|.$$

Insbesondere induzieren $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ dieselbe Topologie auf V.

3.1.2 Skalarprodukte

Als nächsten Verfeinerungsschritt betrachten wir Normen, die von Skalarprodukten induziert sind.

Definition 3.1.5 (Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum)**.** Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle \colon V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Symmetrie.* Für alle $x, y \in V$ ist $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. *Positive Definitheit.* Für alle $x \in V \setminus \{0\}$ ist $\langle x, x\rangle > 0$.

In diesem Fall bezeichnet man das Paar $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ als *euklidischen Vektorraum.*

Proposition 3.1.6 (Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ Norm)**.** *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und sei*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. *Für alle $x, y \in V$ gilt*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

und Gleichheit liegt genau dann vor, wenn x und y linear abhängig sind.

2. *Die Abbildung* $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf* V.

3. Polarisierung. *Für alle* $x, y \in V$ *gilt*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big).$$

Beispiel 3.1.7 (Standardskalarprodukt)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Das *Standardskalarprodukt* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j. \end{aligned}$$

Die von $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist die euklidische Metrik d_2.

Beispiel 3.1.8. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann sind die Metriken d_1 und d_∞ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ *nicht* von einem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induziert (Übungsaufgabe).

Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es bekanntlich – bis auf Koordinatentransformation – nur ein Skalarprodukt; dies lässt sich zum Beispiel mit dem Gramschen Orthonormalisierungsverfahren zeigen:

Satz 3.1.9 (Klassifikation der Skalarprodukte)**.** *Seien* $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ *und* $(V', \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle')$ *euklidische Vektorräume derselben endlichen Dimension. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus* $f \colon V \longrightarrow V'$ *mit*

$$\forall_{x,y \in V} \quad \big\langle f(x), f(y)\big\rangle' = \langle x, y\rangle.$$

Insbesondere ist f *dann eine Isometrie bezüglich der von den Skalarprodukten induzierten Normen und Metriken.*

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, eine koordinatenfreie Beschreibung der euklidischen Geometrie zur Verfügung zu haben; daher ist es sinnvoll, Definitionen, Eigenschaften und Sätze in der Sprache der euklidischen Vektorräume zu formulieren – und nicht nur für das Standardskalarprodukt. Dies spielt insbesondere in der riemannschen Geometrie eine wichtige Rolle.

Die genaue Beschreibung der Isometriegruppen von euklidischen Vektorräumen diskutieren wir in Kapitel 3.4.

3.1.3 Orthogonalität

Skalarprodukte liefern insbesondere einen Begriff von Orthogonalität. Wir erinnern kurz an die Definition:

Definition 3.1.10 (orthogonal)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen *orthogonal*, falls $\langle x, y \rangle = 0$; in diesem Fall schreiben wir auch

$$x \perp y.$$

Allgemeiner nennen wir Teilmengen $A, B \subset V$ *orthogonal* (und schreiben dann $A \perp B$), wenn

$$\forall_{x \in A} \quad \forall_{y \in B} \quad x \perp y.$$

Ist $A \subset V$, so nennen wir $A^\perp := \{y \in V \mid \forall_{x \in A} \quad x \perp y\}$ das *orthogonale Komplement von A.*

Die Wichtigkeit des Orthogonalitätsbegriffs liegt in der folgenden einfachen Beobachtung, dass sozusagen der Satz des Pythagors bereits in die Definition des Skalarprodukts integriert ist:

Bemerkung 3.1.11 (Orthogonalität und Abstände)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und seien $x, y \in V$ mit $x \perp y$. Dann gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Diese Beobachtung ist auch der unterliegende Grund dafür, dass Abstandsminimierung oft durch sogenannte orthogonale Projektionen erreicht wird. Gerade im Zusammenhang mit dem Extremalprinzip ist dies ein wichtiges Hilfsmittel. Wir illustrieren dies am folgenden Beispiel:

Proposition 3.1.12 (lange Vektoren [17, 3.19])**.** *Es seien* 2016 *Vektoren in der Ebene gegeben. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel:*

- *Ein Zug besteht darin, einen der gegebenen Vektoren auszuwählen. Dieser Vektor steht dann in den folgenden Zügen nicht mehr zur Verfügung.*
- *Die Spieler A und B ziehen abwechselnd.*
- *Das Spiel endet, wenn keine Vektoren mehr zur Verfügung stehen.*
- *Es verliert derjenige Spieler, bei dem die Summe der Vektoren die kleinere (euklidische) Länge hat.*
- *Spieler A beginnt.*

Dann besitzt Spieler A eine Strategie, mit der er nicht *verliert.*

Was ist eine gute Strategie? Es genügt sicher nicht, in jedem Zug einfach nur einen Vektor maximaler Länge auszuwählen, da die Länge von Vektoren ja im allgemeinen *nicht* additiv ist. Die Idee ist daher, die Länge nur in einer gewissen Richtung zu optimieren.

Beweis. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ das Standardskalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und die davon induzierte euklidische Norm $\| \cdot \|_2$. Sei $s \in \mathbb{R}^2$ die Summe der gegebenen

2016 Vektoren; wir betrachten zunächst nur den Fall, dass $s \neq 0$ ist. Sei P die Koordinate der orthogonale Projektion auf $\mathbb{R} \cdot s$, d.h.

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\langle x, s\rangle}{\|s\|_2^2}, \end{aligned}$$

und sei Q die dazu komplementäre Abbildung

$$Q := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - P \cdot s\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere gilt $P(x) \cdot s \perp Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Spieler A wählt nun in jedem Zug einen Vektor x aus, der unter unter den verbliebenen Vektoren die Größe $P(x)$ maximiert.

Warum verliert Spieler A mit dieser Strategie nicht? Seien $a_1, \ldots, a_{1008}$ bzw. $b_1, \ldots, b_{1008}$ die von den Spielern A bzw. B gewählten Vektoren und seien $s_A := \sum_{j=1}^{1008} a_j$ bzw. $s_B := \sum_{j=1}^{1008} b_j$ die entsprechenden Summen. Die Strategie von A liefert dann

$$P(s_A) = P\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n} P(b_j) = P(s_B)$$

und

$$P(s_A) + P(s_B) = P(s_A + s_B) = P(s) = 1.$$

Daraus folgt mit einer einfachen Fallunterscheidung $|P(s_A)| \geq |P(s_B)|$, und damit

$$\big\|P(s_A) \cdot s\big\|_2 = \big|P(s_A)\big| \geq \big|P(s_B)\big| = \big\|P(s_B) \cdot s\big\|_2.$$

Nach Konstruktion ist außerdem

$$Q(s_A) = Q(s - s_B) = Q(s) - Q(s_B) = 0 - Q(s_B).$$

Somit erhalten wir insgesamt wegen der Orthogonalität, dass

$$\begin{aligned} \|s_A\|_2^2 &= \big\|P(s_A) \cdot s + Q(s_A)\big\|_2^2 \\ &= \big\|P(s_A) \cdot s\big\|_2^2 + \big\|Q(s_A)\big\|_2^2 \\ &\geq \big\|P(s_B) \cdot s\big\|_2^2 + \big\|Q(s_B)\big\|_2^2 \\ &= \big\|P(s_B) \cdot s + Q(s_B)\big\|_2^2 \\ &= \|s_B\|_2^2. \end{aligned}$$

Also verliert Spieler A mit dieser Strategie nicht.

Ist $s = 0$, so betrachtet man statt der orthogonalen Projektion auf $\mathbb{R} \cdot s$ die orthogonale Projektion auf $\mathbb{R} \cdot e_1$. Alle wesentlichen Ungleichungen gelten auch in diesem Fall und man erhält analog die Behauptung. $\square$

3.2 Kurven

Wir werden uns nun genauer mit (parametrisierten) Kurven in normierten Räumen bzw. euklidischen Räumen beschäftigen. Metrische Räume, deren Metrik von einer Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum induziert wird, erben auch eine glatte Struktur; wir erhalten somit insbesondere einen Differenzierbarkeitsbegriff für Kurven in normierten Räumen und können versuchen, geometrische Eigenschaften von Kurven durch analytische Größen auszudrücken. Um uns an den koordinatenfreien Standpunkt und allgemeine Abstraktionsmechanismen zu gewöhnen, werden wir diese Sachverhalte in größerer Allgemeinheit als der gewöhnlichen mehrdimensionalen Differentialrechnung formulieren.

3.2.1 Analytische Grundlagen

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung an analytische Grundbegriffe, die wir im folgenden verwenden werden. Die zentralen grundlegenden Konzepte der Analysis sind Konvergenz und Vollständigkeit. Wir werden daher im folgenden immer annehmen, dass die betrachteten Räume vollständig sind.

- Normierte Räume, die bezüglich der von der Norm induzierten Metrik vollständig sind, heißen *Banachräume*.
- Euklidische Räume, die bezüglich der von der Skalarprodukt induzierten Norm vollständig (also Banachräume) sind, heißen *Hilberträume*.

Man kann nun den (mehrdimensionalen) Differenzierbarkeitsbegriff ohne Schwierigkeiten so verallgemeinern, dass er auf banachraumwertige Funktionen anwendbar ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist (man könnte aber stattdessen auch eine (offene) Teilmenge eines Banachraums verwenden). Wie im klassischen Fall ist die grundlegende Idee der Differenzierbarkeit, die gegebene Abbildung in einem Punkt möglichst gut linear zu approximieren:

Definition 3.2.1 (differenzierbar)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x \in I^\circ$ ein Punkt im Inneren von I. Eine Abbildung $\gamma\colon I \longrightarrow V$ ist *im Punkt x differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $D\colon \mathbb{R} \longrightarrow V$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine Abbildung $E\colon U \longrightarrow V$ gibt mit

$$\forall_{h\in U} \quad \gamma(x+h) = \gamma(x) + D(h) + E(h)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \cdot E(h) = 0.$$

Bemerkung 3.2.2 (Ableitung)**.** In der obigen Situation ist D im differenzierbaren Fall eindeutig bestimmt, man nennt dann D die *Ableitung von γ an der Stelle x* und schreibt $D\gamma(x) := D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V)$ bzw. $\dot{\gamma}(x) := D(1) \in V$. Wie im klassischen Fall kann man $\dot{\gamma}(x)$ auch als Differentialquotient beschreiben, da der Definitionsbereich eindimensional ist.

Man beachte an dieser Stelle, dass äquivalente Normen auf demselben Banachraum denselben Differenzierbarkeitsbegriff und dieselben Ableitungen liefern. Insbesondere spielt also die gneaue Wahl der Norm im endlich-dimensionalen Fall keine entscheidende Rolle (Satz 3.1.4). Im endlich-dimensionalen Fall stimmt diese Definition natürlich mit der gewöhnlichen Definition aus der mehrdimensionalen Analysis überein und Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung lassen sich für Kurven einfach über die partiellen Ableitungen beschreiben.

Wie im klassischen Fall nennen wir eine Abbildung *differenzierbar*, wenn sie auf eine offene Umgebung des Definitionsbereichs fortgesetzt werden kann und dort in jedem Punkt differenzierbar ist. Wir nennen eine Abbildung $\gamma\colon I \longrightarrow V$ mit Werten in einem Banachraum $(V, \|\cdot\|)$ *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar ist und die Abbildung $\dot{\gamma}\colon I \longrightarrow V$ stetig ist (man beachte, dass $\dot{\gamma}$ auch auf Randpunkten von I wohldefiniert ist). Analog definiert man *zweimal differenzierbar* und *zweimal stetig differenzierbar*.

Die erste und zweite Ableitung von parametrisierten Kurven haben dieselbe Interpretation wie im klassischen Fall:

Analysis	Physik	Geometrie
Ableitung	Geschwindigkeit	Richtung
zweite Ableitung	Beschleunigung	Krümmung (s.u.)

3.2.2 Länge von Kurven

Im stetig differenzierbaren Fall können wir nun eine analytische Beschreibung der Länge von Kurven in Banachräumen geben:

Satz 3.2.3 (Länge von Kurven, analytisch)**.** *Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$, sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$L(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \left\|\dot{\gamma}(t)\right\| \, dt.$$

Ausblick 3.2.4 (Metriken aus riemannschen Metriken)**.** Dieser Satz erlaubt es also, die Länge von glatten Kurven durch lokale Größen auszudrücken. In der riemannschen Geometrie geht man diesen Gedanken rückwärts: man nutzt lokale Daten um Längen zu definieren und konstruiert dann daraus eine Metrik (Kapitel 4).

Im wesentlichen beruht der Beweis des Satzes auf der folgenden Beobachtung (die man mit elementaren analytischen Mitteln beweisen kann), die einen Erstaz für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert:

Lemma 3.2.5 (mittelwertsatzartige Abschätzung). *Seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$, sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\gamma\colon [s,t] \longrightarrow V$ differenzierbar. Dann gilt*

$$\inf_{x\in[s,t]} \|\dot\gamma(x)\| \cdot (t-s) \le \big\|\gamma(t) - \gamma(s)\big\| \le \sup_{x\in[s,t]} \|\dot\gamma(x)\| \cdot (t-s).$$

Beweisskizze (von Satz 3.2.3). Den Bezug zwischen metrischer Länge und Integral über die Norm der Geschwindigkeit werden wir mithilfe von Ober- und Untersummen herstellen. Daher führen wir zunächst etwas Notation ein: Sei $P = (t_1, \dots, t_n)$ eine *Partition* von $[T_0, T_1]$, d.h. $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in [T_0, T_1]$ mit $t_1 \le t_1 \le \dots \le t_n$. Dann schreiben wir

$$L(\gamma; P) := \sum_{j=1}^{n-1} \big\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big\|$$

für die zugehörige Längenapproximation und

$$\overline{S}(P) := \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{x\in[t_j,t_{j+1}]} \|\dot\gamma(x)\| \cdot (t_{j+1} - t_j),$$
$$\underline{S}(P) := \sum_{j=1}^{n-1} \inf_{x\in[t_j,t_{j+1}]} \|\dot\gamma(x)\| \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

für die entsprechenden Ober- und Untersummen.

Aus Lemma 3.2.5 erhalten wir für alle Partitionen P von $[T_0, T_1]$ das Ungleichungssandwich

$$\underline{S}(P) \le L(\gamma; P) \le \overline{S}(P).$$

Daraus schließen wir auf die entsprechenden Abschätzungen für die Ober- bzw. Unterintegrale:

① *Unterintegral.* Aus der obigen Ungleichungskette folgt insbesondere

$$\sup_{P \text{ Partition}} \underline{S}(P) \le \sup_{P \text{ Partition}} L(\gamma; P) = L(\gamma).$$

② *Oberintegral.* Eine einfache Rechnung zeigt: Ist die Partition Q eine Verfeinerung der Partition P von $[T_0, T_1]$, so folgt mit der Dreiecksungleichung bzw. mit den Eigenschaften des Supremums, dass

$$L(\gamma; P) \le L(\gamma; Q) \le \overline{S}(Q) \le \overline{S}(P).$$

Zusammen mit dem obigen Sandwich können wir daraus schließen, dass $L(\gamma) \le \inf_{P \text{ Partition}} \overline{S}(P)$ gilt.

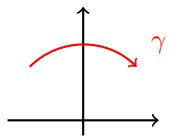


Abbildung 3.1.: Ein „Viertel“ der euklidischen Einheitskreislinie

Da $\dot{\gamma}$ stetig ist, ist auch $\|\dot{\gamma}\|$ stetig und somit auf $[T_0, T_1]$ Riemann-integrierbar; insbesondere stimmen das Oberintegral und das Unterintegral mit dem Integral $\int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt$ überein, woraus für die dazwischen eingeklemmte Länge $L(\gamma)$ die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 3.2.6 (Kreislänge)**.** Sei $I := [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ und sei

$$\begin{aligned} \gamma\colon I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(t, \sqrt{1-t^2}\big). \end{aligned}$$

Dann parametrisiert γ ein „Viertel“ der euklidischen Einheitskreislinie (Abbildung 3.1) und für alle $t \in I^\circ$ gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \Big(1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\Big).$$

Somit liefern Satz 3.2.3 und die üblichen Tricks (Substitution mit trigonometrischen Funktionen!) aus der Analysis für die Länge von γ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

$$\begin{aligned} L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma) &= \int_I \big\|\dot{\gamma}(t)\big\|_2 \; dt = \int_I \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} \; dt = \int_I \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \; dt \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t \; dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei gehen ganz entscheidend die analytischen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ein.

Was passiert bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$? Für alle $t \in I^\circ$ ist

$$\Big|-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\Big| \leq 1,$$

und damit $\|\dot{\gamma}(t)\|_\infty = 1$. Also folgt mit Satz 3.2.3, dass

$$L_{(\mathbb{R}^2,d_\infty)}(\gamma) = \int_I \big\|\dot{\gamma}(t)\|_\infty \; dt = \int_I 1 \; dt = \sqrt{2}.$$

Die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

induzierte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_2 und bezüglich d_∞ isometrisch. Also erhalten wir durch Anwenden von f, f^2, f^3 für die euklidische Länge des euklidischen Einheitskreises $2 \cdot \pi$ und für die d_∞-Länge des euklidischen Einheitskreises $4 \cdot \sqrt{2}$.

Wir haben bisher Kurven immer als parametrisierte Kurven, also als Abbildungen, verstanden. In vielen Fällen interessiert man sich jedoch im wesentlichen nur für das Bild der Kurve – und hat dann die Freiheit, sich eine auf den jeweiligen Untersuchungszweck angepasste Parametrisierung zu wählen. Man führt daher die folgenden Begriffe ein:

Definition 3.2.7 (Äquivalenz von Kurven)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und seien $\gamma\colon I \longrightarrow V$ und $\eta\colon I \longrightarrow V$ Kurven. Dann sind γ und η *äquivalent*, kurz $\gamma \sim \eta$, wenn es einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon I \longrightarrow J$ mit $\gamma = \eta \circ \varphi$ gibt[1].

Proposition 3.2.8 (Invarianz der Länge)**.** *Äquivalente Kurven in Banachräumen haben dieselbe Länge.*

Beweis. Da äquivalente Kurven dieselbe Bildmenge besitzen und die Anordnung der Bildpunkte (bis auf die Durchlaufrichtung des Intervalls) erhalten bleibt, folgt dies direkt aus der Definition der Länge (Definition 2.3.1). Alternativ kann man dies im stetig differenzierbaren Fall auch über Satz 3.2.3 mit dem Transformationssatz nachrechnen. □

In vielen Fällen ist es günstig, die Parametrisierung an die Länge anzupassen:

Definition 3.2.9 (nach Bogenlänge parametrisiert)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Man nennt eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon I \longrightarrow V$ *nach Bogenlänge* parametrisiert, wenn folgendes gilt: Für alle $t \in I^\circ$ ist

$$\|\dot\gamma(t)\| = 1.$$

Beispiel 3.2.10 (Länge vs. Bogenlänge)**.** Ist $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einem Banachraum $(V, \|\cdot\|)$ so folgt mit Satz 3.2.3 für alle $t \in [T_0, T_1]$, dass

$$L(\gamma|_{[T_0,t]}) = t - T_0.$$

Dies rechtfertigt den Namen „nach Bogenlänge parametrisiert.“ Außerdem sieht man leicht mithilfe von Satz 3.2.3, dass jede stetig differenzierbare (metrische) Geodäte nach Bogenlänge parametrisiert ist.

[1] Ein C^1-*Diffeomorphismus* ist eine stetig differenzierbare Abbildung, die ein stetig differenzierbares Inverses besitzt.

Wie im klassischen Fall zeigt man Existenz und Eindeutigkeit von Parametrisierungen nach Bogenlänge durch Betrachten der Längen-/Integralfunktion in Abhängigkeit vom Endpunkt des Intervalls:

Satz 3.2.11 (Existenz und Eindeutigkeit der Parametrisierung nach Bogenlänge)**.** *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $I \subset \mathbb{R}$ und sei $\gamma\colon I \longrightarrow V$ eine stetig differenzierbare Kurve, die* regulär *ist, d.h., die $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ erfüllt.*

1. *Dann gibt es eine zu γ äquivalente Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist.*
2. *Sind $\gamma_1\colon I_1 \longrightarrow V$ und $\gamma_2\colon I_2 \longrightarrow V$ zu γ äquivalente nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \{1, -1\}$ mit $I_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid \varepsilon \cdot t + c \in I_1\}$ und*

$$\forall_{t \in I_2} \quad \gamma_2(t) = \gamma_1(\varepsilon \cdot t + c).$$

Caveat 3.2.12. Man beachte jedoch, dass nicht jede stetig differenzierbare Kurve regulär ist! Da Regularität unter Äquivalenz erhalten bleibt und nach Bogenlänge parametrisierte Kurven notwendigerweise regulär sind, kann auf die Regularitätsbedingung im obigen Satz *nicht* verzichtet werden.

3.2.3 Krümmung von Kurven

Wir untersuchen nun die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung von Kurven. Anschaulich gesprochen ist im nach Bogenlänge parametrisierten Fall die zweite Ableitung die Änderung der Richtung der Kurve und misst somit wie stark und in welche Richtung sich die Kurve krümmt.

Definition 3.2.13 (Krümmung)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\gamma\colon I \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Ist $t \in I^\circ$, so nennt man

$$\kappa_\gamma(t) := \ddot\gamma(t) \in V$$

die *Krümmung von γ an der Stelle t*.[2]

Mit genug Geduld lässt sich natürlich auch eine Darstellung für die Krümmung finden, falls die betrachtete Kurve nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Eine wichtige Eigenschaft der Krümmung ist, dass sie einen analytischen Zugang zu Geodäten in Hilberträumen ermöglicht. Anschaulich gesprochen sind also Geodäten solche Kurven, die im analytischen Sinne ungekrümmt, d.h. gerade, sind.

[2] Oft wird auch $\|\kappa_\gamma(t)\|$ als Krümmung bezeichnet. Wir werden im folgenden aber immer die gerichtete Version verwenden.

Proposition 3.2.14 (Krümmung vs. Geodäten). *Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Kurve γ ist eine metrische Geodäte.*
2. *Es ist $\kappa_\gamma = 0$.*

Beweis. Wir schreiben $\|\cdot\|$ für die von $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V und $x := \gamma(0)$, $y := \gamma(L)$.

Sei γ eine metrische Geodäte; insbesondere ist $L = \|y - x\|$. Ähnlich wie im Fall von Proposition 2.2.4 kann man zeigen, dass Geodäten in Hilberträumen linear sind (das Analogon von Lemma 2.2.5 kann man zum Beispiel mit dem verallgemeinerten Satz von Pythagoras (Bemerkung 3.1.11) zeigen). Also ist

$$\forall_{t \in [0,L]} \quad \gamma(t) = x + \frac{t}{L} \cdot (y - x).$$

Dann ist $\dot\gamma = 1/L \cdot (y - x)$ konstant, und damit $\kappa_\gamma = \ddot\gamma = 0$.

Es gelte umgekehrt $\kappa_\gamma = 0$. Mit Lemma 3.2.5 folgt daraus, dass $\dot\gamma$ konstant ist; sei $v \in V$ diese Konstante. Wendet man Lemma 3.2.5 erneut (geschickt) an, so sieht man, dass

$$\forall_{t \in [0,L]} \quad \gamma(t) = x + t \cdot v.$$

Da wir γ als nach Bogenlänge parametrisiert angenommen haben, ist $\|v\| = 1$. Also folgt aus der obigen Darstellung, dass γ eine Geodäte ist. □

Ausblick 3.2.15 (riemannsche Geodäten). Diese Beschreibung von metrischen Geodäten kann man mithilfe geeigneter Ableitungsbegriffe (der sogenannten kovarianten Ableitung) auch auf riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern; da es sich dabei um lokale Beschreibungen handelt, werden solche, riemannschen, Geodäten jedoch nicht mehr global längenminimierend sein, sondern nur noch lokal.

Proposition 3.2.16 (Richtung $\perp$ Krümmung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $\gamma\colon I \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Dann gilt für alle $t \in I^\circ$, dass*

$$\dot\gamma(t) \perp \ddot\gamma(t).$$

Beweis. Eine einfache Rechnung mit allgemeinen Skalarprodukten zeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} S\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \big\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \big\rangle \end{aligned}$$

differenzierbar ist mit

$$\forall_{t \in I^\circ} \quad \dot{S}(t) = 2 \cdot \big\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \big\rangle.$$

Da aber γ nach Bogenlänge parametrisiert ist und daher $S = \|\dot{\gamma}\|^2 = 1$ konstant ist, folgt somit für alle $t \in I^\circ$, dass

$$0 = \dot{S}(t) = 2 \cdot \big\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \big\rangle,$$

wie behauptet. □

Beispiel 3.2.17 (Krümmung in der euklidischen Ebene)**.** Wir wissen bereits, dass Geodäten in Hilberträumen Krümmung 0 haben. Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir nun in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma \colon [0, 2\pi \cdot r] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto r \cdot \Big(\cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r}\Big). \end{aligned}$$

Wie aus der Analysis bekannt ist (s. Anhang A.4), liefert diese Kurve eine Parametrisierung der Kreislinie vom Radius r um 0 und für alle $t \in [0, 2\pi \cdot r]$ gilt

$$\big\|\dot{\gamma}(t)\big\|_2 = \Big\| \frac{r}{r} \cdot \Big(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r}\Big) \Big\|_2 = 1.$$

Also ist γ nach Bogenlänge parametrisiert. Als Krümmung erhalten wir für alle $t \in (0, 2\pi \cdot r)$:

$$\kappa_\gamma(t) = \ddot{\gamma}(t) = -\frac{1}{r} \cdot \Big(\cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r}\Big).$$

Je kleiner der Radius r ist, desto länger ist also der Krümmungsvektor. Dies entspricht der Anschauung, dass kleine Kreise stärker gekrümmt sind als große.

Wir spezialisieren uns nun auf den Fall von Kurven in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$. In diesem Fall kann man die Krümmung in eine skalare Größe (mit Vorzeichen) umwandeln: Da der Krümmungsvektor orthogonal zur Richtung der Kurve ist, können wir den Krümmungsvektor einfach mit dem Einheitsnormalenvektor vergleichen (Abbildung 3.2).

Definition 3.2.18 (Einheitsnormalenvektor, signierte Krümmung)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\gamma \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Sei $t \in I^\circ$.

- Dann nennen wir

  $$\nu_\gamma(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$$

  den *Einheitsnormalenvektor von γ an der Stelle t*. (Nach Konstruktion gilt tatsächlich $\nu_\gamma(t) \perp \gamma(t)$ und $\|\nu_\gamma(t)\|_2 = 1$.)

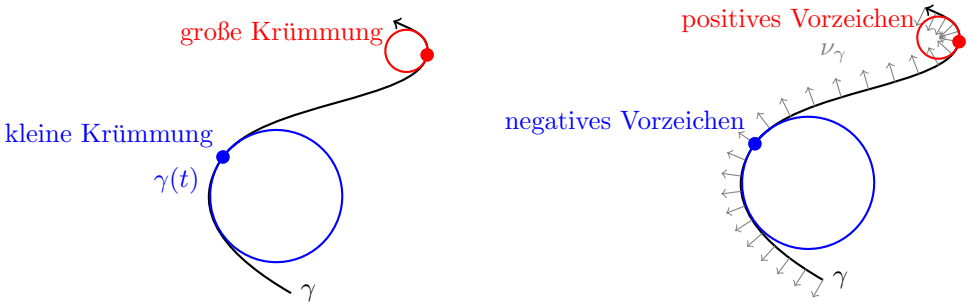


Abbildung 3.2.: (Signierte) Krümmung von Kurven, schematisch

- Wir nennen
$$\widetilde{\kappa}_\gamma(t) := \big\langle \kappa_\gamma(t), \nu_\gamma(t) \big\rangle \in \mathbb{R}$$
die *signierte Krümmung von γ an der Stelle t*. (Nach Konstruktion gilt somit $\kappa_\gamma(t) = \widetilde{\kappa}_\gamma(t) \cdot \nu_\gamma(t)$.)

Beispiel 3.2.19 (signierte Krümmung der Kreislinie)**.** Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\gamma\colon [0, 2\pi \cdot r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kreislinie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ wie in Beispiel 3.2.17. Dann gilt für alle $t \in (0, 2\pi \cdot r)$, dass
$$\widetilde{\kappa}_\gamma(t) = \frac{1}{r}.$$
Die Kurve γ hat also konstante, positive, Krümmung. Ändert man die Umlaufrichtung, so erhält man konstante, negative, Krümmung.

Ausblick 3.2.20 (Torsion von Raumkurven)**.** Die (signierte) Krümmung ebener Kurven misst, wie stark sich die Kurve von der durch den Richtungsvektor gegebenen Geraden wegkrümmt. Analog kann man für Kurven in $(\mathbb{R}^3, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ messen, wie stark sich die Kurve von der von Richtungsvektor und Krümmungsvektor aufgespannten Ebene entfernt. Dies liefert die sogenannte *Torsion* von Raumkurven. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigt dann, dass Raumkurven durch Krümmung und Torsion (bis auf Umparametrisierungen und euklidische Isometrien) eindeutig bestimmt sind.

3.3 Winkel

Wir werden nun die relative Lage von Vektoren zueinander genauer betrachten. Mithilfe von analytischen Methoden erhält man aus Skalarprodukten

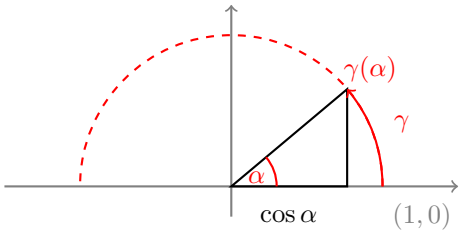


Abbildung 3.3.: Winkel, Bogenlänge und Ankathete

nicht nur den bereits diskutierten Begriff der Orthogonalität, sondern auch eine Definition von Winkeln:

Definition 3.3.1 (Winkel)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und seien $x, y \in V$ mit $\|x\| \neq 0$ und $\|y\| \neq 0$. Dann ist der *Winkel zwischen x und y* definiert als

$$\sphericalangle(x,y) := \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0,\pi].$$

Dabei bezeichnet $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ (Anhang A.4). Man beachte, dass das Argument von arccos in der obigen Definition nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung tatsächlich im Intervall $[-1,1]$ liegt.

Bemerkung 3.3.2 (klassische Anschauung)**.** Wir erklären nun den Zusammenhang zwischen der obigen Definition von Winkeln und der klassischen Anschauung von Winkeln über Bogenlängen: Dazu betrachten wir in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ (bezüglich Standardskalarprodukt) die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(\cos t, \sin t\big). \end{aligned}$$

Dann gilt nach Satz 3.2.3 für alle $\alpha \in [0,\pi]$ einerseits

$$L(\gamma|_{[0,\alpha]}) = \int_0^\alpha \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt = \alpha$$

und andererseits nach der obigen Definition des Winkels (wegen $\alpha \in [0,\pi]$)

$$\sphericalangle\big((1,0),\gamma(\alpha)\big) = \arccos\Big(\frac{\cos\alpha + 0}{1\cdot 1}\Big) = \alpha.$$

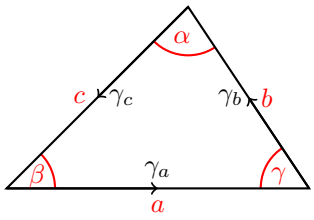


Abbildung 3.4.: Winkelsumme in euklidischen Dreiecken

Außerdem erhalten wir so die Beschreibung von $\cos\alpha$ als „Ankathete geteilt durch Hypotenuse“ (Abbildung 3.3). Analog bekommt man die entsprechende Beschreibung für $\sin\alpha$.

Über die Ableitung können wir den Winkelbegriff auch auf Kurven, die in einem gemeinsamen Punkt beginnen verallgemeinern:

Definition 3.3.3 (Winkel zwischen Kurven)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein Hilbertraum und seien $\gamma_1\colon [0, L_1] \longrightarrow V$ und $\gamma_2\colon [0, L_2] \longrightarrow V$ differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. Dann definieren wir

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle\big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\big).$$

Eine der zentralen Eigenschaften euklidischer geodätischer Dreiecke ist die Invarianz der Winkelsumme:

Satz 3.3.4 (Winkelsumme in euklidischen Dreiecken)**.** *Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $(\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c)$ ein geodätisches Dreieck in V (bezüglich der von $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ induzierten Metrik) dessen Ecken $\gamma_a(0), \gamma_b(0), \gamma_c(0)$ alle verschieden sind. Seien*

$$\alpha := \sphericalangle(\gamma_c, \overline{\gamma}_b), \qquad \beta := \sphericalangle(\gamma_a, \overline{\gamma}_c), \qquad \gamma := \sphericalangle(\gamma_b, \overline{\gamma}_a)$$

die zugehörigen Winkel (wobei $\overline{\gamma}_j$ die Geodäte ist, die man erhält, indem man die Geodäte γ_j rückwärts durchläuft). Dann gilt (Abbildung 3.4)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Wegen $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ genügt es zu zeigen, dass die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma).$$

Wir schreiben

$$a := \gamma_b(0) - \gamma_a(0), \qquad b := \gamma_c(0) - \gamma_b(0), \qquad c := \gamma_a(0) - \gamma_c(0).$$

Insbesondere ist $a + b + c = 0$. Mit der Charakterisierung euklidischer Geodäten (Proposition 2.2.4 bzw. der Hilbertraumversion davon) folgt

$$\alpha = \sphericalangle(c, -b), \qquad \beta = \sphericalangle(a, -c), \qquad \gamma = \sphericalangle(b, -a).$$

Wir werden nun mithilfe der Additionstheoreme nachweisen, dass die obigen beiden Gleichungen für $\cos(\alpha + \beta)$ bzw. $\sin(\alpha + \beta)$ erfüllt sind:

Es gilt nach Definition (und unter Verwendung von $c = -a - b$)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\langle c, -b\rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} = \frac{\langle -a-b, -b\rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} = \frac{\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} \\
\cos\beta &= \frac{\langle a, -c\rangle}{\|a\| \cdot \|c\|} = \frac{\langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|c\|}
\end{aligned}$$

und (wegen $\alpha, \beta \in (0, \pi)$)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{\langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2}}{\|c\| \cdot \|b\|} \\
\sin\beta &= \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{\sqrt{\langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2}}{\|a\| \cdot \|c\|}
\end{aligned}$$

Also erhalten wir mit den Additionstheoremen für sin bzw. cos, dass

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\
&= \frac{(\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle) \cdot (\langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle)}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} - \frac{\sqrt{\left(\langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2\right)^2}}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} \\
&= \frac{\langle a, b\rangle \cdot \langle a, a\rangle + 2 \cdot \langle a, b\rangle^2 + \langle b, b\rangle \cdot \langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} \\
&= \frac{\langle c, c\rangle \cdot \langle b, a\rangle}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} = -\cos\gamma \\
&= \cos(\pi - \gamma);
\end{aligned}$$

man beachte bei der Auflösung der Wurzel, dass der Term $\langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2$ nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung tatsächlich nicht negativ ist. Eine analoge Rechnung zeigt

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\pi - \gamma),$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 3.3.5 (Sinussatz)**.** Die Berechnungen im Beweis des obigen Satzes zeigen auch den sogenannten *Sinussatz*: In der Situation des Satzes gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\|a\|}{\|b\|} = \frac{\left\|\gamma_b(0) - \gamma_a(0)\right\|}{\left\|\gamma_c(0) - \gamma_b(0)\right\|}.$$

Ausblick 3.3.6 (Winkel in metrischen Räumen)**.** Durch Vergleich mit euklidischen Dreiecken können wir den Winkelbegriff wie folgt auf andere metrische Räume verallgemeinern: Wir stellen dazu zunächst fest, dass wir einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ mit induzierter Metrik d den Winkel $\sphericalangle(x,y)$ zwischen Vektoren $x, y \in V \setminus \{0\}$ aufgrund von Polarisierung auch ganz durch die Metrik ausdrücken lässt:

$$\sphericalangle(x,y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \arccos \frac{d(x,0)^2 + d(y,0)^2 - d(x,y)^2}{2 \cdot d(x,0) \cdot d(y,0)}.$$

Sind $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow V$, $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow V$ Geodäten mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$, so rechnet man leicht nach, dass

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t_1, t_2 \to 0} \arccos \frac{t_1^2 + t_2^2 - d\big(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)\big)^2}{2 \cdot t_1 \cdot t_2}$$

gilt. Diese Gleichung eignet sich nun in allgemeinen metrischen Räumen als Definition für den Winkel zwischen zwei Geodäten (vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert tatsächlich existiert) und dieser Winkelbegriff wird dann auch unter Isometrien invariant sein. Im Kontext der hyperbolischen und der sphärischen Geometrie werden wir nochmal genauer auf diesen Aspekt eingehen (Kapitel 4.4.5).

Winkel treten auch auf natürliche Weise bei der Berechnung von Flächeninhalten von euklidischen Dreiecken auf:

Bemerkung 3.3.7 (Fläche über Winkel)**.** Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ drei verschiedene Punkte und sei

$$\Delta(x,y,z) := \{t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0,1],\ t_x + t_y + t_z = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Menge der Punkte, die innerhalb des von x, y, z aufgespannten geodätischen Dreiecks liegen. Dann ist $\mu(\Delta(x,y,z))$ der Flächeninhalt dieses Dreiecks, wobei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$\mu\big(\Delta(x,y,z)\big) = \frac{1}{2} \cdot \|y - x\| \cdot \|z - x\| \cdot \sin \sphericalangle(y - x, z - x)$$

gilt. Eine einfache Rechnung (die auch im Beweis des Transformationssatzes eingeht) zeigt, dass dies auch wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\mu\big(\Delta(x,y,z)\big) = \frac{1}{2} \cdot \big|\det(y - x, z - x)\big|.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch eine schöne Berechnung von Flächeninhalten von Polygonen mit ganzzahligen Eckpunkten:

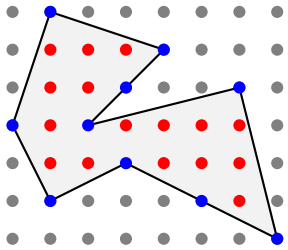


Abbildung 3.5.: Ein Polygon mit ganzzahligen Ecken und die eingeschlossenen Gitterpunkte (rot) sowie die Gitterpunkte auf dem Rand (blau)

Definition 3.3.8 (Polygon)**.** Ein *Polygon* in einem metrischen Raum (X, d) ist eine stückweise[3] isometrische Abbildung $P\colon [0, L] \longrightarrow X$, wobei $L \in \mathbb{R}_{>0}$ ist, mit der Eigenschaft, dass $P(L) = P(0)$ ist und dass $P|_{[0,L)}$ injektiv ist. Ist $t \in [0, L]$ ein Randpunkt eines maximalen Intervalls, auf dem P isometrisch ist, so nennen wir $P(t)$ eine *Ecke von* P; ist $I \subset [0, L]$ ein maximales Intervall, auf dem P isometrisch ist, so nennen wir $P|_I$ eine *Kante von* P.

Definition 3.3.9 (Flächeninhalt eines Polygons)**.** Sei $P\colon [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Wir schreiben dann $\operatorname{im} P := P([0, L]) \subset \mathbb{R}^2$. Nach dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 1.6.14) hat $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{im} P$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten – eine beschränkte und eine unbeschränkte; wir nennen die beschränkte Komponente das *Innere von* P und schreiben dafür P°. Der *Flächeninhalt von* P ist dann durch

$$\mu(P) := \mu(P^\circ)$$

definiert.

Satz 3.3.10 (Satz von Pick)**.** *Sei P ein Polygon in $\mathbb{R}^2$, dessen Ecken alle in $\mathbb{Z}^2$ liegen. Dann gilt*

$$\mu(P) = n^\circ + \frac{1}{2} \cdot n - 1,$$

wobei $n^\circ := |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$ die Anzahl der von P eingeschlossenen Gitterpunkte und $n := \operatorname{im} P \cap \mathbb{Z}^2$ die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von P ist (Abbildung 3.5).

Die Grundidee des Beweises ist, die Polygonfläche in kleine Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunkten aufzuteilen, den Flächeninhalt dieser kleinen Dreiecke zu berechnen und dann geschickt die Anzahl dieser Dreiecke zu bestimmen.

[3] wir erlauben nur endlich viele Abschnitte

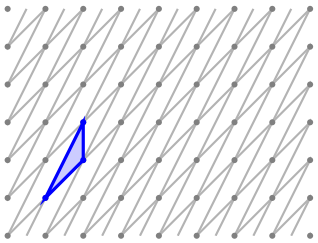


Abbildung 3.6.: Kleine Dreiecke liefern $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbb{Z}^2$

Lemma 3.3.11 (Flächeninhalt kleiner Dreiecke). *Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gelte $\Delta(x, y, z) \cap \mathbb{Z}^2 = \{x, y, z\}$ (d.h. das von x, y, z aufgespannte Dreieck enthält keine weiteren Gitterpunkte). Dann ist*

$$\mu\big(\Delta(x, y, z)\big) = \frac{1}{2}.$$

Beweis. Man kann sich überlegen, dass $(y - x, z - x)$ in diesem Fall eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$ sein muss (Abbildung 3.6), und verwendet dann die Determinantendarstellung von $\mu\big(\Delta(x, y, z)\big)$ (Bemerkung 3.3.7). (Übungsaufgabe) □

Lemma 3.3.12 (ganzzahlige Triangulierbarkeit). *Sei P ein Polygon in $\mathbb{R}^2$, dessen Ecken alle in $\mathbb{Z}^2$ liegen. Dann kann man $P^\circ \cup \operatorname{im} P$ so triangulieren, dass die Eckpunkte der Dreiecke alle in $\mathbb{Z}^2$ liegen und dass alle Punkte aus $(P^\circ \cup \operatorname{im} P) \cap \mathbb{Z}^2$ als Eckpunkte von Dreiecken auftreten.*

Beweis. Jedes Polygon in $\mathbb{R}^2$ hat mindestens drei Ecken.

Man zeigt nun zunächst die Behauptung für den Fall, dass P genau drei Ecken hat, per Induktion über die Anzahl der Gitterpunkte in $P^\circ \cup \operatorname{im} P$. Sind dies nur die drei Ecken von P, so bildet P selbst die gewünschte Triangulierung. Gibt es weitere Gitterpunkte, so verbindet man diese mit den drei Ecken von P und erhält dadurch Gitterdreiecke mit weniger Gitterpunkten. Induktiv erhält man so die gewünschte Triangulierung.

Hat P mehr als drei Ecken, so gibt es zwei Ecken von P, deren Verbindungsstrecke ganz in P° liegt, denn: Wir betrachten drei aufeinanderfolgende Ecken x, y, z von P. Nun betrachten wir alle geraden Strahlen, die von y ausgehen. Falls es keinen solchen Strahl gibt, der eine weitere Ecke von P trifft und dazwischen P° nicht verlässt, so ist die gerade Verbindung von x nach z ganz in P° enthalten.

Man zerlegt nun P mithilfe einer solchen Diagonalen, die in P° liegt, in zwei Gitterpolygone mit weniger Ecken. Induktiv kann man sich so auf den Fall von Gitterpolygonen mit drei Ecken herunterhangeln, wofür die Behauptung bereits gezeigt ist. □

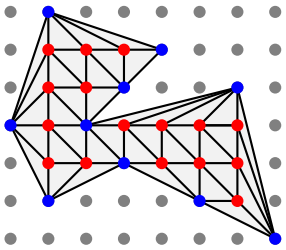


Abbildung 3.7.: Ein Triangulierung eines Polygons mit ganzzahligen Ecken wie in Lemma 3.3.12

Beweis des Satzes von Pick. Wir triangulieren das Polygon P wie in Lemma 3.3.12 in $D \in \mathbb{N}$ kleine ganzzahlige Dreiecke (Abbildung 3.7). Nach Konstruktion erfüllen diese Dreiecke die Bedingung aus Lemma 3.3.11. Also erhalten wir

$$\mu(P) = D \cdot \frac{1}{2}.$$

Es genügt also, die Anzahl D der Dreiecke zu bestimmen.

Die Triangulierung liefert einen Graphen $X = (V, E)$, dessen Knotenmenge die Menge $(\operatorname{im} P \cup P^\circ) \cap \mathbb{Z}^2$ ist und dessen Kanten genau den Kanten der Triangulierungsdreiecke entsprechen.

Es gibt den folgenden Zusammenhang zwischen D und $|E|$: Sei e die Anzahl der Kanten der Triangulierung, die in $\operatorname{im} P$ liegen, und sei e° die Anzahl der restlichen Kanten der Triangulierung. Die e Randkanten treten nur in genau einem Dreieck auf, die e° inneren Kanten treten in genau zwei der D Dreiecke auf. Da jedes Dreieck genau drei Kanten besitzt, folgt

$$3 \cdot D = e + 2 \cdot e^\circ,$$

und damit

$$e^\circ = \frac{3}{2} \cdot D - \frac{1}{2} \cdot e.$$

Andererseits liefert die konstruierte Triangulierung eine planare Einbettung von X. Die Anzahl der Facetten dieser planaren Einbettung ist genau $D+1$ (die zusätzliche Facette ist die äußere Komponente von $\operatorname{im} P$). Mit der eulerschen Polyederformel (Satz 1.6.13) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} D &= 2 - |V| + |E| - 1 = 1 - |V| + |E| = 1 - (n^\circ + n) + |E| \\ &= 1 - (n^\circ + n) + e^\circ + e \\ &= 1 - (n^\circ + n) + \frac{3}{2} \cdot D - \frac{1}{2} \cdot e + e. \end{aligned}$$

Da P genau so viele Ecken wie Kanten hat, ist $e = n$. Indem wir die obige Gleichung nach D auflösen, folgt daher

$$D = 2 \cdot n^\circ + n - 2$$

bzw. $\mu(P) = D/2 = n^\circ + n/2 - 1$, wie gewünscht. □

3.4 Symmetrie

Wir werden nun die Isometriegruppe euklidischer Räume genauer studieren. Wir beginnen mit allgemeinen Betrachtungen zu Isometrien in Hilberträumen und werden uns dann auf den Fall des euklidischen $\mathbb{R}^n$ spezialisieren.

3.4.1 Winkeltreue

Zunächst stellen wir fest, dass Isometrien von euklidischen Vektorräumen winkeltreu sind.

Proposition 3.4.1 (Starrheit des Skalarprodukts). *Seien $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$, $(V', \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle')$ euklidische Vektorräume und sei $f\colon V \longrightarrow V'$ eine Isometrie bezüglich der von den Skalarprodukten induzierten Metriken mit $f(0) = 0$. Dann gilt*

$$\forall_{x,y\in V} \quad \big\langle f(x), f(y)\big\rangle' = \langle x, y\rangle.$$

Jede Isometrie zwischen euklidischen Vektorräumen, die 0 auf 0 abbildet, ist also winkeltreu.

Beweis. Da f mit den Metriken verträglich ist, ist f nach Definition der Metriken auch normerhaltend. Mit der Polarisierungsgleichung folgt dann die Behauptung. Genauer: Wegen Polarisierung gilt wie in Ausblick 3.3.6 für alle $x, y \in V$

$$\begin{aligned}
\big\langle f(x), f(y)\big\rangle' &= \frac{1}{2} \cdot \big(\|f(x)\|'^2 + \|f(y)\|'^2 - \|f(x) - f(y)\|'^2\big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(d'(0, f(x))^2 + d'(0, f(y))^2 - d'(f(x), f(y))^2\big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(d(0, x)^2 + d(0, y)^2 - d(x, y)^2\big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big) \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

□

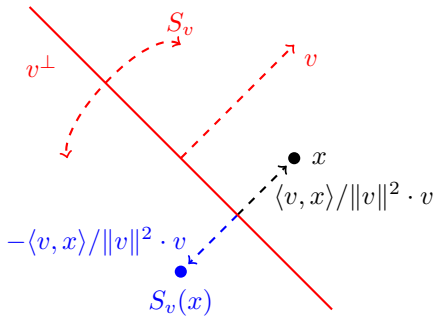


Abbildung 3.8.: Spiegelung an einer Hyperebene

Bemerkung 3.4.2 (Kosinussatz)**.** Dieselbe Polarisierungsrechnung wie im obigen Satz zeigt auch den sogenannten *Kosinussatz*: In der Notation (des Beweises) des Satzes 3.3.4 gilt in geodätischen Dreiecken in Hilberträumen die Gleichung

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \cos\gamma \cdot \|a\| \cdot \|b\|.$$

Umgekehrt können wir das Skalarprodukt nutzen, um eine spezielle Klasse von Isometrien einfach zu beschreiben, die sogenannten Spiegelungen:

Definition 3.4.3 (Spiegelung)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $v \in V \setminus \{0\}$. Dann definieren wir die *Spiegelung an der durch v gegebenen Hyperebene $v^\perp$* durch

$$\begin{aligned} S_v \colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

Ist $a \in V$, so definieren wir die *Spiegelung an der durch v und a gegebenen Hyperebene $v^\perp + a$* durch

$$\begin{aligned} S_{v,a} \colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto a + S_v(x - a). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass Spiegelungen tatsächlich Isometrien sind.

Bemerkung 3.4.4 (Anschauung der Spiegelungsdefinition)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei $v \in V \setminus \{0\}$ und sei $x \in V$. Dann ist

$$S_v(x) = x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

und

$$\Big(x - \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v\Big) \perp \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v.$$

Die rechte Seite ist dabei die orthogonale Projektion von x auf $\mathbb{R} \cdot v$ und die linke Seite der dazu orthogonale Anteil von x (also der Anteil, der in der Hyperebene $v^\perp$ liegt). Durch das Minuszeichen wird der v-Anteil an $v^\perp$ „umgeklappt“, was anschaulich der „Spiegelung“ von x an $v^\perp$ entspricht (Abbildung 3.8).

3.4.2 Die euklidische Isometriegruppe

Wir können nun die Isometriegruppe euklidischer Vektorräume beschreiben: Wie in Satz 2.5.1 kann man für euklidische Vektorräume zeigen, dass Isometrien zwischen euklidischen Vektorräumen linear sind; außerdem wissen wir nach Proposition 3.4.1, dass Isometrien zwischen euklidischen Vektorräumen winkeltreu sind. Dies liefert eine einfache Beschreibung aller Isometrien euklidischer Vektorräume. Der Einfachheit und Konkretheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den Fall $(\mathbb{R}^n, d_2)$:

Satz 3.4.5 (euklidische Isometriegruppe). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} O(n) &\longrightarrow \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \\ A &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x) \\ \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) &\longleftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

zueinander inverse Gruppenhomomorphismen.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir wie gewöhnlich mit

$$O(n) := \big\{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \;\big|\; A^{-1} = A^T\big\}$$

die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen und wir schreiben $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ für die Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ aller Isometrien f mit $f(0) = 0$.

Beweis. Die angegebene Abbildung $O(n) \longrightarrow \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist offenbar ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Auch die angegebene Abbildung $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \longrightarrow O(n)$ ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus: Sei $f \in \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$. Nach Satz 2.5.1 ist f linear. Sei $A := (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Matrix von f bezüglich der Standardbasis (diese Zuordnung ist mit den Gruppenstrukturen verträglich). Nach Proposition 3.4.1 gilt

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \quad \langle A^T \cdot A \cdot x, y\rangle = \langle A \cdot x, A \cdot y\rangle = \big\langle f(x), f(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass dies zu $A^T = A^{-1}$ bzw. $A \in O(n)$ äquivalent ist.

Nach Konstruktion sind die beiden Abbildungen invers zueinander. □

Bemerkung 3.4.6 (gesamte euklidische Isometriegruppe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Untegruppe der Translationen isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{R}^n$, diese ist ein Normalteiler in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \rtimes O(n) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \\ (a, A) &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x + a) \\ \big(f(0), (f(e_1) - f(0), \ldots, f(e_n) - f(0))\big) &\longleftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Gruppenhomomorphismen; die Gruppenstruktur des semi-direkten Produkts ist dabei durch die Konjugationsoperation von $O(n)$ auf der Translationsuntergruppe bzw. durch Matrixmultiplikation von $O(n)$ auf $\mathbb{R}^n$ gegeben, d.h.:

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{R}^n \rtimes O(n)\big) \times \big(\mathbb{R}^n \rtimes O(n)\big) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \\ \big((a, A), (b, B)\big) &\longmapsto (A \cdot b + a, A \cdot B) \end{aligned}$$

Korollar 3.4.7 (Erzeugung durch Spiegelungen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann wird die Gruppe* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ *von Spiegelungen erzeugt, d.h. jede Isometrie kann als Produkt von Spiegelungen geschrieben werden.*

Beweis. Jede Translation kann als Komposition von Spiegelungen geschrieben werden (Übungsaufgabe). Es genügt daher zu zeigen, dass $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ von Spiegelungen erzeugt ist. Nach Satz 3.4.5 ist $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \cong O(n)$. Mit den klassischen Normalformensätzen für orthogonale Matrizen kann man sich dann auf den Fall von $O(2)$ bzw. $O(1)$ zurückziehen. Da man Drehungen als Produkt von Spiegelungen schreiben kann (Übungsaufgabe), folgt daraus die Behauptung (Übungsaufgabe). □

3.4.3 Kongruenz

Nachdem wir nun die euklidische Isometriegruppe bestimmt haben, können wir leicht die klassischen Kongruenzsätze für euklidische Dreiecke ableiten.

Wir erinnern daran, dass zwei Teilmengen A und B in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *kongruent* sind, wenn es eine Isometrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit $f(A) = B$ gibt (Definition 2.5.2). Im Rahmen der Schulmathematik wird Kongruenz in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ manchmal auch so eingeführt, dass Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ genau dann kongruent sind, wenn sie sich durch Kompositionen von Spiegelungen (und Drehungen) ineinander überführen lassen. Nach Korollar 3.4.7 stimmt dies mit dem gewöhnlichen metrischen Kongruenzbegriff überein.

Wir führen außerdem die folgende Notation ein: Ist $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein nicht-entartetes geodätisches Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ (d.h. die Ecken liegen nicht auf einer gemeinsamen geodätischen Geraden), so schreiben wir $\operatorname{im}\Delta := \operatorname{im}\gamma_0 \cup \operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ für die Menge aller Bildpunkte der Geodäten des Dreiecks. Wir nennen dann die Differenzen $\gamma_1(0)-\gamma_0(0), \gamma_2(0)-\gamma_1(0), \gamma_0(0)-\gamma_2(0)$ auch *Seiten* von Δ und wir nennen $\sphericalangle(\gamma_2, \overline{\gamma}_1)$ den *gegenüberliegenden* Winkel der Seite $\gamma_1(0)-\gamma_0(0)$, etc..

Satz 3.4.8 (Kongruenzsätze für Dreiecke). *Seien Δ und Δ' nicht-entartete geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Seiten $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ bzw. a', b', c' und den gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ bzw. α', β', γ'. Dann folgt: Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so sind $\operatorname{im}\Delta$ und $\operatorname{im}\Delta'$ kongruent.*

SWS *Es gilt $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\gamma = \gamma'$ und $\|b\|_2 = \|b'\|_2$.*

SSS *Es gilt $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ und $\|c\|_2 = \|c'\|_2$.*

WSW *Es gilt $\beta = \beta'$, $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ und $\gamma = \gamma'$.*

SsW *Es gilt $\|a\|_2 = \|a'\|_2 \geq \|b\|_2 = \|b'\|_2$ und $\alpha = \alpha'$.*

Beweis. Wir zeigen als erstes den Kongruenzsatz SWS: Da Translationen Isometrien sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die erste Ecke von Δ bzw. Δ' jeweils 0 ist. Da die Dreiecke nicht-entartet sind, sind (a, b) und (a', b') Basen von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$f(a) = a' \qquad \text{und} \qquad f(b) = b'$$

gegeben ist. Dann ist f eine Isometrie, denn: Wegen $\gamma = \gamma'$ ist

$$\frac{\langle b, -a\rangle}{\|a\|_2 \cdot \|b\|_2} = \cos\gamma = \cos\gamma' = \frac{\langle b', -a'\rangle}{\|a'\|_2 \cdot \|b'\|_2}.$$

Aus $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ und $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ folgt somit

$$\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle = \big\langle f(a), f(b)\big\rangle.$$

Mit dieser Gleichung und $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ bzw. $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ kann man leicht nachrechnen, dass f eine Isometrie ist. Nach Konstruktion (und der Charakterisierung euklidischer Geodäten) ist $f(\operatorname{im}\Delta) = \operatorname{im}\Delta'$.

Der Kongruenzsatz SSS folgt nun aus dem Kongruenzsatz SWS: Mit dem Kosinussatz (Bemerkung 3.4.2) und der SSS-Voraussetzung folgt $\cos\gamma = \cos\gamma'$ bzw. (da die Winkel in $(0, \pi)$ liegen) auch $\gamma = \gamma'$. Mit dem bereits bewiesenen Kongruenzsatz SWS folgt somit, dass $\operatorname{im}\Delta$ und $\operatorname{im}\Delta'$ kongruent sind.

Ähnlich leitet man die Kongruenzsätze WSW und SsW mithilfe des Sinussatzes (Bemerkung 3.3.5) ab (Übungsaufgabe). □

Die Kongruenzsätze bilden die Grundlage für viele elementargeometrische Beweise (z.B. für den Satz des Thales und seine Verallgemeinerungen für Sehnenvierecke).

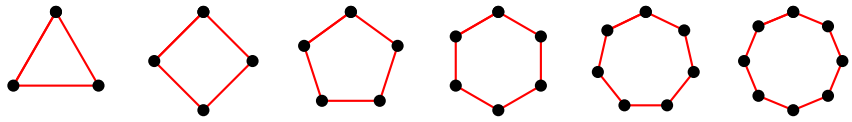


Abbildung 3.9.: Reguläre Polygone

Bemerkung 3.4.9 (Hilberts Axiomatik)**.** In der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie ist der Kongruenzsatz SWS als Axiom verankert (Axiom IV.6, in der Gruppe der Axiome der *Congruenz*).

Caveat 3.4.10 (Kongruenzsatz WWW)**.** Man beachte, dass es in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *keinen* Kongruenzsatz WWW gibt. D.h. Dreiecke, deren Winkel übereinstimmen, sind im allgemeinen *nicht* kongruent. (Man kann aber zeigen, dass solche Dreiecke immer ähnlich sind, d.h. sich nur durch eine Isometrie und eine homogene Skalierung unterscheiden). Es gibt jedoch durchaus Geometrien, in denen der Kongruenzsatz WWW gilt (siehe zum Beispiel Satz 4.5.7).

3.4.4 Reguläre Polygone und reguläre Polyeder

Wir werden nun symmetrische konvexe Polygone und Polyeder genauer untersuchen. Wir beginnen mit dem zweidimensionalen Fall:

Definition 3.4.11 (reguläres Polygon)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, sei $m \in X$ und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ein *reguläres n-Eck in (X, d) mit Mittelpunkt m und Radius r* ist ein Polygon P in (X, d) mit genau n Ecken $v_1, \ldots, v_n$ (und somit auch genau n Kanten), so dass alle Kanten dieselbe Länge haben und

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad d(x_j, m) = r$$

gilt.

Beispiele für reguläre Polygone in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ finden sich in Abbildung 3.9. In der euklidischen Ebene sind reguläre Polygone im wesentlichen durch den Radius und die Anzahl der Ecken bestimmt:

Proposition 3.4.12 (Eindeutigkeit regulärer n-Ecke in der euklidischen Ebene)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Sind P und P' reguläre n-Ecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius r, so sind* $\operatorname{im} P$ *und* $\operatorname{im} P'$ *kongruent.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die Kuchenstückdreiecke von P genauer: Seien $v_1, \ldots, v_n$ die n Ecken von P, in dieser Reihenfolge, und sei m der Mittelpunkt von P; sei $s := d_2(v_1, v_2) = d_2(v_3, v_2) = \ldots$ die Kantenlänge von P und sei $\alpha := \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m)$ der Kuchenstückwinkel (Abbildung 3.10).

Mit dem Kongruenzsatz SSS und der Winkeltreue von Isometrien (alternativ: direkt mit dem Kosinussatz) erhalten wir für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

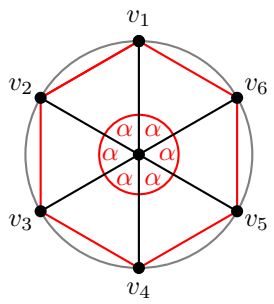


Abbildung 3.10.: Kuchenstückdreiecke in regulären Polygonen

$$\sphericalangle(v_j - m, v_{j+1} - m) = \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m) = \alpha,$$

wobei wir Indizes modulo n addieren. Mit der Beschreibung von Winkeln über Bogenlängen in Kreisen (Bemerkung 3.3.2) folgt, dass $n \cdot \alpha = 2 \cdot \pi$ gilt bzw.

$$\alpha = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \pi.$$

Man beachte, dass dieser Ausdruck nur von n, nicht aber von den anderen Daten von P abhängt.

Daher gilt entsprechend auch

$$\sphericalangle(v_1' - m', v_2' - m') = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \pi = \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m)$$

im Polygon P' (wobei wir die zu P analoge Notation verwenden). Mit dem Kongruenzsatz SWS erhalten wir daraus, dass die geodätischen Dreiecke, die von m, v_1, v_2 bzw. von m', v_1', v_2' aufgespannt werden, kongruent sind und wir können eine solche Isometrie f so wählen, dass m auf m' abgebildet wird.

Da f eine Isometrie ist, bildet f den Kreis vom Radius r um m auf den Kreis vom Radius r um m' ab. Indem man nun den Zusammenhang von Winkeln und Bogenlängen (Bemerkung 3.3.2) mit der obigen Winkelberechnung kombiniert, kann man nachvollziehen, dass $f(\{v_1, \ldots, v_n\}) = f(\{v_1', \ldots, v_n'\})$ gilt und dass f benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbildet. Damit bildet f die geodätischen Kanten von P aber auch auf die entsprechenden geodätischen Kanten von P' ab. Also ist $f(\operatorname{im} P) = \operatorname{im} P'$, wie gewünscht. $\square$

Da die euklidische Norm mit Skalierung kompatibel ist, folgt daraus auch, dass reguläre n-Ecke mit verschiedenen Radien ähnlich sind, d.h. bis auf Skalierung kongruent sind.

Bemerkung 3.4.13 (Existenz regulärer n-Ecke in der euklidischen Ebene)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ähnliche Argumente wie im obigen Beweis zeigen

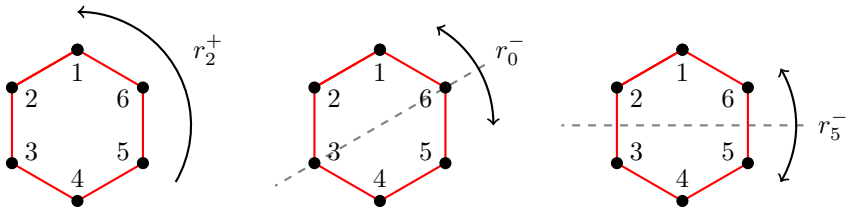


Abbildung 3.11.: Isometrien regulärer Sechsecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

auch, dass es ein reguläres n-Eck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ gibt, wobei die Ecken genau die Punkte $r \cdot (\cos(j \cdot 2 \cdot \pi/n), \sin(j \cdot 2 \cdot \pi/n))$ mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ sind. Die Seitenlängen und Innenwinkel regulärer n-Ecke lassen sich in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ohne Schwierigkeiten mit den bisher entwickelten Methoden berechnen.

Proposition 3.4.14 (Isometriegruppen regulärer Polygone). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und sei P ein reguläres n-Eck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Ecken $v_1, \ldots, v_n$ (in dieser Reihenfolge). Sei*

$$X := \big(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}\big)$$

der entsprechende zyklische Graph. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Isom}(\operatorname{im} P, d_2) &\longrightarrow \operatorname{Aut}(X) \\ f &\longmapsto f|_{\{v_1, \ldots, v_n\}} \\ D_n := \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \operatorname{Aut}(X) \\ ([j], [0]) &\longmapsto r_j^+ := (v_k \mapsto v_{k+j}) \\ ([j], [1]) &\longmapsto r_j^- := (v_k \mapsto v_{-k+j}) \end{aligned}$$

Gruppenisomorphismen. Dabei operiert $[1] \in \mathbb{Z}/2$ in dem obigen semidirekten Produkt durch Inversion auf der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/n$ und wir verwenden implizit auf den Indizes der Knoten von X Addition modulo n.

Beweisskizze. Indem man die Extremalität der Ecken sowie Abstände der Ecken zueinander betrachtet, sieht man, dass jede Isometrie von $\operatorname{im} P$ Ecken auf Ecken abbildet und dadurch bereits eindeutig bestimmt ist. Andererseits kann man nachrechnen, dass man wirklich jeden Automorphismus des Graphen X auch durch eine entsprechende Isometrie von $\operatorname{im} P$ realisieren kann. Die algebraische Beschreibung von $\operatorname{Aut}(X)$ ergibt sich, indem man nachrechnet, dass die angegebene Abbildung ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Übungsaufgabe, im Falle des Quadrats). □

Aus der obigen Beschreibung der Isometriegruppe von ebenen euklidischen regulären n-Ecken kann man außerdem ableiten, dass solche Isometriegruppen von zwei Spiegelungen erzeugt werden, nämlich zum Beispiel von r_0^-

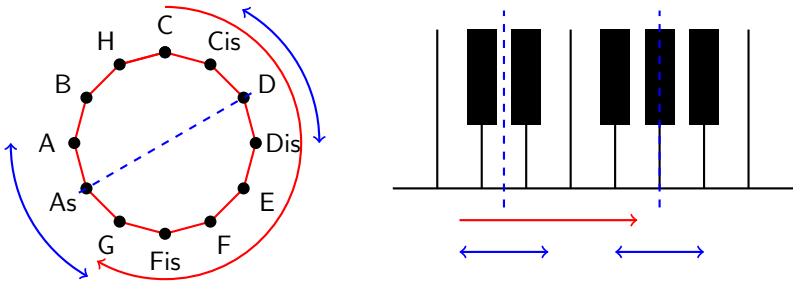


Abbildung 3.12.: Die zwölf Halbtöne und die Isometriegruppe D_{12} des regulären 12-Ecks; rot: Transposition um sieben Halbtöne nach oben; blau: Inversion an D bzw. As (auf dem Klavier leicht zu spielen).

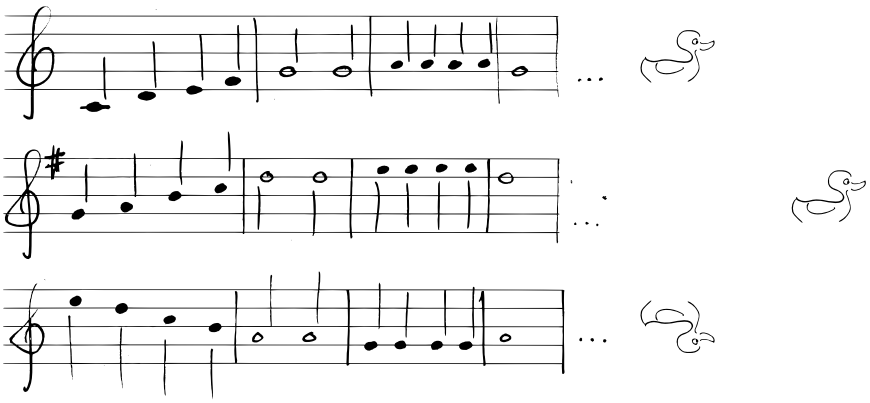


Abbildung 3.13.: Original, Transposition, Inversion

und r_{n-1}^{-}. Beispiele für Isometrien eines regulären Sechsecks finden sich in Abbildung 3.11.

Bemerkung 3.4.15 (maximale Symmetrie)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und seien $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $|M| = n$. Man kann dann zeigen, dass $\mathrm{Isom}(M, d_2)$ zu einer Untergruppe von D_n isomorph ist und dass $\mathrm{Isom}(M, d_2)$ genau dann zu D_n isomorph ist, wenn M die Menge der Eckpunkte eines regulären n-Ecks in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist. Reguläre n-Ecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ können also auch als n-Ecke maximaler Symmetrie beschrieben werden.

Ausblick 3.4.16 (Musik und D_{12})**.** Die Isometriegruppe D_{12} des regulären 12-Ecks tritt in natürlicher Weise in der Musik auf [12]. Man betrachtet

dazu den zyklischen Graphen der klassischen zwölf Halbtöne einer Oktave (Abbildung 3.12). Dann entspricht der Automorphismus r_j^+ genau der Transposition um j Halbtöne und r_j^- entspricht einer Inversion der Tonleiter (Abbildung 3.13).

Bemerkung 3.4.17 (Hexaflexagon)**.** Ein schönes Experiment um mehr über Symmetrien und Dreiecke bzw. Sechsecke zu lernen, ist ein Hexaflexagon zu bauen und die verschiedenen Zustände davon zu verstehen [21, 1].

Wir gehen nun noch kurz auf den dreidimensionalen Fall ein, aber ohne die Polyeder-Theorie [41] im Detail zu entwickeln. Grob gesagt sind konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^3$ Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen; es gibt dann einen wohldefinierten Begriff von Ecken, Kanten und Seitenflächen solcher konvexer Polyeder und diese Seitenflächen sind kongruent zu (konvexen) Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Definition 3.4.18 (regulärer Polyeder)**.** Ein *regulärer Polyeder* ist ein konvexer Polyeder in $\mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein reguläres Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2) \subset (\mathbb{R}^3, d_2)$ mit der Eigenschaft, dass alle Seitenflächen zu diesem Polygon kongruent sind (in $(\mathbb{R}^3, d_2)$).
- An jeder Ecke trifft sich dieselbe Anzahl von Seitenflächen.

Beispiel 3.4.19 (Platonische Körper)**.** Die folgenden fünf Polyeder sind reguläre Polyeder (Abbildung 3.14):

Polyeder	Ecken/Kanten pro Seitenfläche	Seiten	Kanten	Ecken
Tetraeder	3	4	6	4
Würfel (Hexaeder)	4	6	12	8
Oktaeder	3	8	12	6
Dodekaeder	5	12	30	20
Ikosaeder	3	20	30	12

Satz 3.4.20 (Klassifikation der regulären Polyeder)**.** *Bis auf Isometrie und Reskalierung gibt es nur fünf reguläre Polyeder in* $(\mathbb{R}^3, d_2)$*, nämlich: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.*

Beweisskizze. Wir skizzieren zunächst, warum jeder reguläre Polyeder dieselbe Kombinatorik wie einer der fünf platonischen Körper haben muss: Sei ein regulärer Polyeder P gegeben; dieser habe als Seitenflächen reguläre n-Ecke, der Polyeder habe insgesamt f Seitenflächen, k Kanten und e Ecken, und an jeder Ecke treffen m Seitenflächen zusammen. Sei X der Graph, dessen Knoten die Ecken von P sind und dessen Kanten die Kanten von P modellieren.

Abbildung 3.14.: Würfel, platonische

Man kann nun durch eine geeignete Zentralprojektion auf eine Sphäre zeigen, dass P eine Einbettung $X_{\mathbb{R}} \longrightarrow S^2$ liefert. Nach Proposition 1.6.7 erhalten wir so auch eine planare Einbettung; dabei entsprechen die Facetten genau den Seitenflächen von P. Mit der eulerschen Polyederformel (Satz 1.6.13) folgt also

$$e - k + f = 2.$$

Diese Anwendung erklärt insbesondere auch den Namen „eulersche Polyederformel.“

Da jede Kante die Kante von genau zwei Seitenflächen ist und jede Kante genau zwei Ecken miteinander verbindet, gilt

$$\frac{n \cdot f}{2} = k \qquad \text{und} \qquad \frac{m \cdot e}{2} = k.$$

Zusammen mit der eulerschen Polyederformel folgt $2 = 2 \cdot k/m - k + 2 \cdot k/n$ bzw.

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Da es sich bei m und n um natürliche Zahlen ≥ 3 handelt, ergibt sich daraus, dass für (n, m) nur die folgenden Werte infrage kommen:

$$(3,3), \qquad (3,4), \qquad (4,3), \qquad (3,5), \qquad (5,3).$$

Eingesetzt in die obigen Gleichungen erhalten wir daraus genau die kombinatorischen Typen der fünf platonischen Körper.

Zusammen mit elementarer Polyedertheorie folgt daraus auch, dass bis auf Isometrie/Reskalierung nur die platonischen Körper als regulärer Polyeder möglich sind. □

Bemerkung 3.4.21 (Herstellung platonischer Körper)**.** Es gibt viele einfache Möglichkeiten, Modelle platonischer Körper herzustellen, zum Beispiel:

- Durch Ausschneiden und Verkleben entsprechender Netze aus Papier (z.B. mit Mustern von M.C. Escher [39]).
- Durch modulares Origami [24].
- Mithilfe von Geomag[4], einem magnetischen Bausystem.
- Mithilfe von Zometool[5], einem Stecksystem.
- Mithilfe eines 3D-Druckers (es gibt mittlerweile auch viele Anbieter, bei denen man eigene 3D-Modelle drucken kann).

Ausblick 3.4.22 (Isometriegruppen regulärer Polyeder)**.** Auch die Isometriegruppen regulärer Polyeder lassen sich konkret angeben, ähnlich zum Fall der regulären Polygone (Proposition 3.4.14). Wie im zweidimensionalen Fall stellt sich auch hier heraus, dass die Isometriegruppen regulärer Polyeder von Spiegelungen erzeugt werden [13].

3.4.5 Das Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Kuriosität der euklidischen Isometriegruppe ist, dass sie sogenannte paradoxe Zerlegungen zulässt [37, 11]. Wir werden dies im folgenden an einer Variante des Banach-Tarski-Paradoxons skizzieren. Grob gesprochen besagt das Banach-Tarski-Paradoxon, dass man die Einheitssphäre S^2 in endlich viele Teile zerlegen kann, die man durch Isometrien von $(\mathbb{R}^3, d_2)$ so verschieben und verdrehen kann, dass man sie danach zu zwei isometrischen Kopien von S^2 zusammenfügen kann (Abbildung 3.15). Diese endlich vielen Stücke müssen natürlich ziemlich „wild“ aussehen – sie können zum Beispiel insbesondere nicht messbar sein. Tatsächlich beruht der Beweis auch auf einer Form des Auswahlaxioms.

Definition 3.4.23 (paradoxe Teilmenge)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $G := \mathrm{Isom}(X, d)$ und sei $Y \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Die Menge Y heißt *paradox (in (X, d))*, wenn Y eine paradoxe Zerlegung besitzt. Eine *paradoxe Zerlegung von Y* ist dabei ein Paar $((A_g)_{g\in K}, (B_h)_{h\in L})$ mit den folgenden Eigenschaften:

[4]Geomag ist eine Trademark von Claudio Vincetelli
[5]Zometool ist eine Trademark von Zometool Inc.

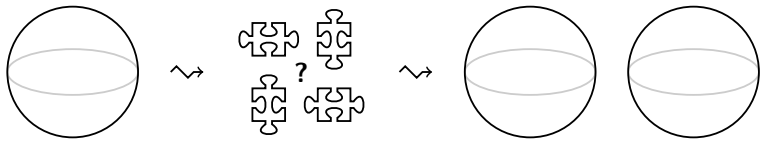


Abbildung 3.15.: Das Banach-Tarski-Paradoxon, schematisch

- Es sind $K \subset G$ und $L \subset G$ endliche Teilmengen.
- Sowohl $(A_g)_{g \in K}$ als auch $(B_h)_{h \in L}$ sind Familien von Teilmengen von Y und

$$Y = \left(\bigcup_{g \in K} A_g \right) \cup \left(\bigcup_{h \in L} B_g \right), \quad Y = \bigcup_{g \in K} g \cdot A_g, \quad Y = \bigcup_{h \in L} h \cdot B_h$$

  sind *disjunkte* Vereinigungen.

Beispiel 3.4.24 (endliche Mengen sind nicht paradox)**.** Ein einfaches Zählargument zeigt, dass endliche Teilmengen von metrischen Räumen *nicht* paradox sind.

Beispiel 3.4.25 (Lebesgue-messbare Teile?)**.** Analog sieht man auch (da das Lebesgue-Maß unter euklidischen Isometrien invariant ist), dass eine paradoxe Teilmenge $Y \subset S^2$ (wobei wir S^2 mit der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^3$ versehen) *keine* paradoxe Zerlegung besitzen kann, deren Partitionsmengen Lebesgue-messbar sind und positives, endliches Maß haben.

Beispiel 3.4.26 (Paradoxität des 4-regulären Baums)**.** Sei $T = (V, E)$ ein 4-regulärer Baum und sei d die von T auf V induzierte Metrik. Dann ist V als Teilmenge von (V, d) paradox, denn: Wir betrachten die in Abbildung 3.16 skizzierten Teilmengen A^+, A^-, B^+, B^- von V. Nach Konstruktion ist $V = A^+ \sqcup A^- \sqcup B^+ \sqcup B^-$ eine disjunkte Zerlegung von V. Andererseits sehen wir in Abbildung 3.16 auch, dass es Isometrien $g, h \in \mathrm{Isom}(V, d)$ mit

$$g \cdot A^+ \sqcup A^- = V = h \cdot B^+ \sqcup B^-$$

gibt (die Isometrie g verschiebt die „vertikalen Hauptäste“ nach links, die Isometrie h verschiebt die „horizontalen Hauptäste“ nach unten). Somit erhalten wir eine paradoxe Zerlegung von V.

Eine genaue Betrachtung der Gruppe $\mathrm{SO}(3) \subset O(3)$ liefert dann die folgende (vereinfachte) Variante des Banach-Tarski-Paradoxons:

Satz 3.4.27 (Banach-Tarski-Paradoxon/Hausdorff-Paradoxon)**.** *Es gibt eine abzählbare Teilmenge $D \subset S^2$ mit der Eigenschaft, dass $S^2 \setminus D$ als Teilmenge von $(\mathbb{R}^3, d_2)$ paradox ist.*

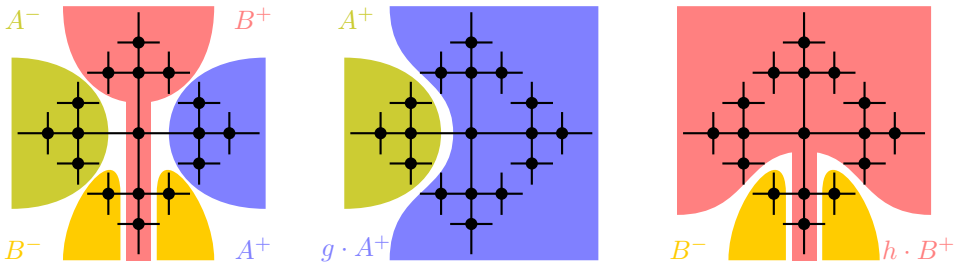


Abbildung 3.16.: Eine paradoxe Zerlegung des 4-regulären Baums

Beweisskizze. Um die Paradoxität nachzuweisen, verwenden wir, dass die Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^3, d_2)$ hinreichend kompliziert ist. Nach Definition der Einheitssphäre gilt $g(S^2) \subset S^2$ für alle $g \in \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^3, d_2) \cong O(3)$ (mit dem Isomorphismus aus Satz 3.4.5). Insbesondere trifft diese Invarianz dann auch auf die Untergruppe $\mathrm{SO}(3) := \{A \in O(3) \mid \det A = 1\} \subset O(3)$ zu.

Sei $F \subset \mathrm{SO}(3)$ die Untergruppe, die von den Matrizen

$$a := \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Man kann zeigen, dass diese Gruppe F eine sogenannte freie Gruppe vom Rang 2 ist und dass $S := \{a, b\}$ ein freies Erzeugendensystem von F ist [37, 27]. Insbesondere ist dann $T := \mathrm{Cay}(F, S)$ ein 4-regulärer Baum [27]. Nach Beispiel 3.4.26 ist die Knotenmenge von T paradox; man beachte dabei, dass man die paradoxe Zerlegung so wählen kann, dass die entsprechenden Isometrien sogar durch Linkstranslation mit Gruppenelementen aus F gegeben sind.

Die Paradoxität von T vererbt sich nun folgendermaßen auf S^2: Die Elemente von $\mathrm{SO}(3)$ operieren auf S^2 als Rotationen um Geraden; jedes nicht-triviale Element von $\mathrm{SO}(3)$ hat also genau zwei Fixpunkte in S^2. Sei $D' \subset S^2$ die Menge aller Fixpunkte von nicht-trivialen Elementen aus F; also ist $D := F \cdot D' = \bigcup_{g \in F} g(D')$ abzählbar. Insbesondere haben dann die nicht-trivialen Elemente von F *keine* Fixpunkte in $S^2 \setminus D$ und $S^2 \setminus D$ zerlegt sich somit in eine disjunkte Vereinigung von freien F-Bahnen. Mit dem Auswahlaxiom können wir nun ein Repräsentantensystem für diese F-Bahnen in $S^2 \setminus D$ wählen und damit aus der gewählten paradoxen Zerlegung von T bahnenweise eine paradoxe Zerlegung von $S^2 \setminus D$ konstruieren [37, 27]. Also ist $S^2 \setminus D$ paradox. □

Mit einer sorgfältigeren Analyse kann man auch paradoxe Zerlegungen für S^2 und allgemeinere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ konstruieren [37].

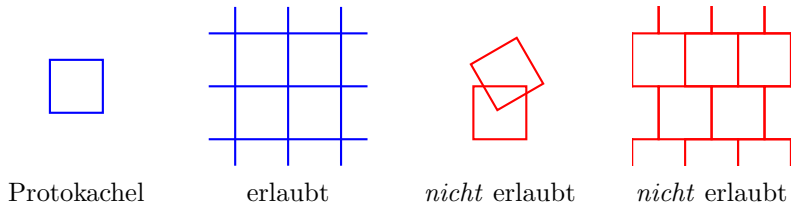


Abbildung 3.17.: Was in einer Pflasterung erlaubt ist und was nicht

Ausblick 3.4.28 (Amenabilität)**.** Paradoxe Zerlegungen spielen auch in der groben Geometrie eine wichtige Rolle. Es stellt sich heraus, dass die Nicht-Existenz paradoxer Zerlegungen diverse geometrische Charakterisierungen besitzt, die an vielen Stellen auf natürliche Weise auftreten (z.B. in der geometrischen Gruppentheorie, in der Funktionalanalysis, ...) [37, 34, 11, 27].

3.5 Pflasterungen der euklidischen Ebene

Wir geben zum Abschluss unserer Untersuchung euklidischer Geometrie noch einen kleinen Einblick in Pflasterungen in der Ebene. Wir werden uns dabei auf reguläre Pflasterungen bzw. auf eine spezielle Art von sogenannten aperiodischen Pflasterungen beschränken. Wir formalisieren zunächst, was wir unter einer Pflasterung verstehen wollen (Abbildung 3.17):

Definition 3.5.1 (Protokachel, Pflasterung)**.** Sei K eine endliche Menge von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Eine *Pflasterung von* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *mit Protokacheln aus* K ist eine Menge P von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Polygon aus P ist zu einem der Polygone aus K kongruent.
- Für alle $Q_1, Q_2 \in P$ mit $Q_1 \neq Q_2$ gilt
$$Q_1^\circ \cap Q_2^\circ = \emptyset$$
und $\operatorname{im} Q_1 \cap \operatorname{im} Q_2$ ist sowohl eine endliche Vereinigung von Kanten und Ecken von Q_1 als auch von Q_2.
- Es gilt
$$\bigcup_{Q \in P} (\operatorname{im} Q \cup Q^\circ) = \mathbb{R}^2.$$

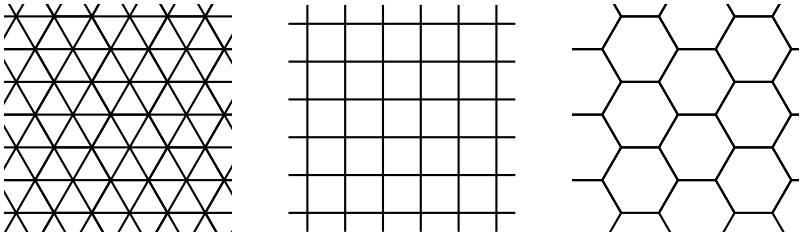


Abbildung 3.18.: Die regulären Pflasterungen der euklidischen Ebene

Definition 3.5.2 (periodische/aperiodische Pflasterung)**.** Wir nennen eine Pflasterung P von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *periodisch*, wenn es eine nicht-triviale Translation $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $Q \in P$ ist auch $f(Q) \in P$. Ist P nicht periodisch, so nennen wir P *aperiodisch*.

3.5.1 Reguläre Pflasterungen der Ebene

Wir betrachten kurz die klassischen regulären Pflasterungen der euklidischen Ebene.

Definition 3.5.3 (reguläre Pflasterung)**.** Eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist *regulär*, wenn es nur eine Protokachel gibt und diese ein reguläres Polygon in $\mathbb{R}^2$ ist.

Proposition 3.5.4 (Klassifikation regulärer Pflasterungen der euklidischen Ebene)**.** *Bis auf Isometrie und Skalierung gibt es nur die in Abbildung 3.18 dargestellten regulären Pflasterungen von* $(\mathbb{R}^2, d_2)$*.*

Beweis. Offenbar liefert Abbildung 3.18 reguläre Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Warum sind dies im wesentlichen die einzigen? Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und sei P eine reguläre Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ durch reguläre n-Ecke. Sei $Q \in P$, sei v eine Ecke von Q und sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Polygone aus P, die sich in v treffen. Mit den bisher entwickelten Techniken kann man zeigen, dass

- der Winkel der Seiten von Q an der Ecke v genau $\pi - 2 \cdot \pi/n$ ist und
- dass
$$k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi = 2 \cdot \pi.$$

Mit der Ganzzahligkeit von k und n folgt daraus, dass für (n, k) nur die folgenden Kombinationen möglich sind:

$$(3, 6), \qquad (4, 4) \qquad (6, 3).$$

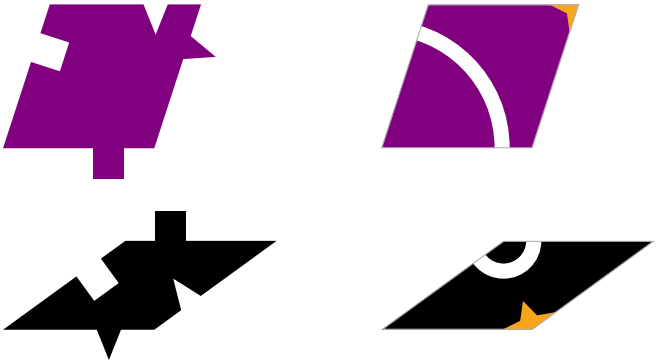


Abbildung 3.19.: Penrose-Protokacheln; nackte Polygone und in der markierten Version

Ähnlich zum Beweis von Proposition 3.4.12 kann man zeigen, dass diese Kombinationen (bis auf Isometrien und Skalierung) genau auf die Pflasterungen in Abbildung 3.18 führen. □

Insbesondere sind alle regulären Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ periodisch.

3.5.2 Aperiodische Pflasterungen der Ebene

Wir werden nun eine besondere Art von Protokacheln kennenlernen; mit diesen kann die euklidische Ebene zwar gepflastert werden, aber nur aperiodisch. Die folgende Konstruktion geht auf Penrose zurück [35, 2, 3, 36].

Die *Penrose-Protokacheln* sind durch die Umrisse und Winkel in Abbildung 3.19 definiert. Die Hauptkantenlängen sind alle gleich, die Innenwinkel der Hauptparallelogramme sind 72° und 108° bzw. 36° und 144°.[6]

In der Praxis ist es etwas einfacher, die Funktion der Ein- und Auskerbungen durch Markierungen zu simulieren. Man kann sich leicht überlegen, dass die markierten Protokacheln in Abbildung 3.19 genau dieselben Pflasterungen liefern wie die unmarkierten Protokacheln, wenn die zusätzliche Einschränkung berücksichtigt wird, dass Kacheln nur so an Kanten aneinanderstoßen dürfen, dass die Markierungen zusammenpassen. Vorlagen für die markierten Penrose-Protokacheln finden sich in Anhang A.5.

Satz 3.5.5 (Eigenschaften von Penrose-Pflasterungen)**.**

1. *Jede Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Penrose-Protokacheln ist aperiodisch.*
2. *Es existiert eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Penrose-Protokacheln.*

[6] Also $2 \cdot \pi/5$ und $3 \cdot \pi/5$ bzw. $\pi/5$ und $4 \cdot \pi/5$.

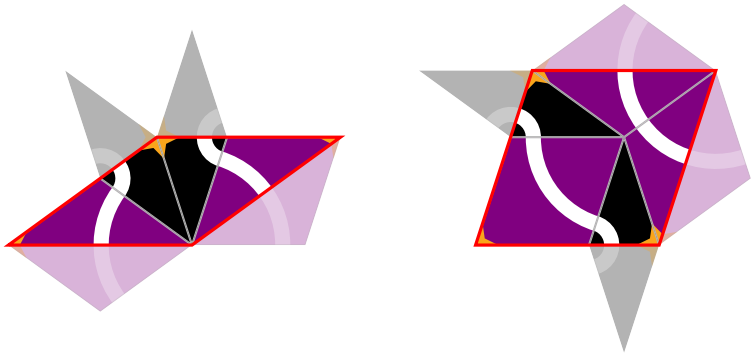


Abbildung 3.20.: Inflation von Penrose-Pflasterungen

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf der sogenannten Inflation bzw. Deflation von Pflasterungen durch Penrose-Protokacheln.

Aperiodizität. Sei P eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit (markierten) Penrose-Protokacheln.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der *Inflation* von P: Eine einfache Fallunterscheidung zeigt, dass sich jede „halbe“ Kachel von P in genau einer der beiden Situationen in Abbildung 3.20 befindet.

Man beachte, dass es sich dabei wieder um Penrose-Protokacheln handelt, wobei

- die Seitenlänge mit dem Faktor $\tau := (1 + \sqrt{5})/2$ skaliert wurde und
- die Markierungen durch neue Markierungen (die aber dieselbe Funktionalität haben) ersetzt wurden.

Dies liefert zu P die (eindeutig bestimmte) Pflasterung $I(P)$ von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den skalierten Penrose-Protokacheln.

Angenommen, P ist periodisch, d.h. es gibt eine nicht-triviale Translation $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die Kacheln aus P in Kacheln aus P überführt. Dann ist aber auch (wegen der Eindeutigkeit der Inflationskonstruktion und da f benachbarte Kacheln auf benachbarte Kacheln abbildet) die Inflation $I(P)$ unter f invariant.

Wählen wir $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so ist der minimale Abstand zwischen Ecken der Protokacheln aus der n-fachen Inflation $I^n(P)$ größer als die Translationslänge $\|f(0) - 0\|_2 > 0$ von f. Andererseits folgt induktiv auch, dass $I^n(P)$ unter f invariant ist; insbesondere bildet f Ecken der Kacheln aus $I^n(P)$ auf Ecken von Kacheln aus $I^n(P)$ ab. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Wahl von n.

Also ist P *nicht* periodisch.

Existenz. Wir skizzieren nun einen Beweis für Existenz mithilfe der *Deflation* von (partiellen) Penrose-Pflasterungen: Analog zur Inflation kann man

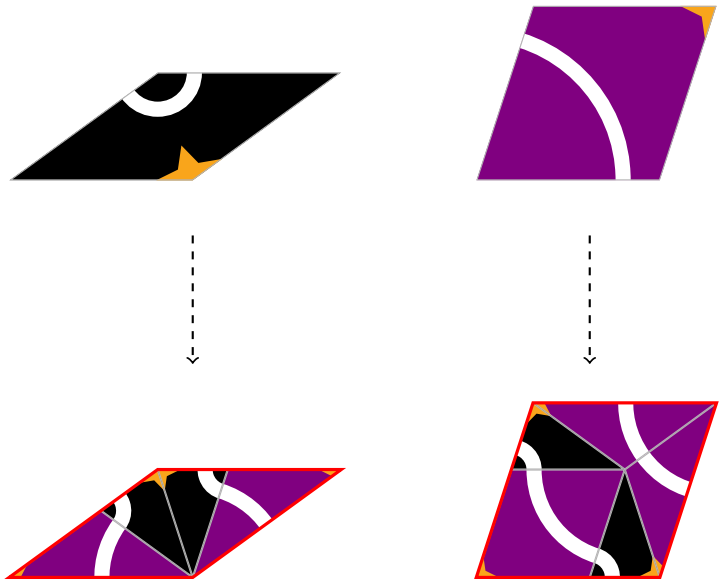
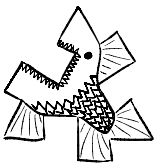


Abbildung 3.21.: Deflation von Penrose-Pflasterungen

Penrose-Kacheln wie in Abbildung 3.21 unterteilen und erhält so (partielle) Penrose-Pflasterungen, deren Protokacheln um den Faktor $1/\tau$ skaliert sind.

Auf diese Weise kann man ausgehend von einer einzelnen Penrose-Kachel endliche Penrose-Pflasterungen von Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ konstruieren, die (wenn man die Kacheln wieder auf die ursprüngliche Kantenlänge skaliert) Kreisscheiben in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ um 0 von gegebenem Radius überdecken. Mit einem geschickten Kompaktheitsargument bzw. Zähl- und Diagonalargument kann man daraus eine Folge von kompatiblen Pflasterungen auswählen, die ganz $(\mathbb{R}^2, d_2)$ pflastern. $\square$



4

Elementare riemannsche Geometrie

Die Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms in der euklidischen Axiomatik hat zur Entdeckung der sogenannten hyperbolischen Geometrie geführt. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Grundzüge der hyperbolischen Geometrie, insbesondere der hyperbolischen Ebene, zu verstehen. Um die Konstruktion und die Eigenschaften der hyperbolischen Ebene transparent formulieren zu können, werden wir Werkzeuge der elementaren riemannschen Geometrie verwenden. Zum Abschluss werden wir die hyperbolische Geometrie systematisch mit der euklidischen und der sphärischen Geometrie vergleichen.

Überblick über dieses Kapitel.

4.1	Was ist riemannsche Geometrie?	104
4.2	Konstruktion der hyperbolischen Ebene	108
4.3	Länge von Kurven	109
4.4	Symmetrie	114
4.5	Hyperbolische Dreiecke	129
4.6	Vergleich mit sphärischer Geometrie	140

Schlüsselbeispiel. hyperbolische Ebene, Sphäre

4.1 Was ist riemannsche Geometrie?

Riemannsche Geometrie ist die Geometrie von Mannigfaltigkeiten und beinhaltet insbesondere eine Verallgemeinerung metrischer Begriffe wie Längen, Abstände, Winkel, Flächeninhalte und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mithilfe analytischer Methoden. Wir werden im folgenden kurz skizzieren, auf welchen Bestandteilen die riemannsche Geometrie aufbaut und wie wir diese Ideen nutzen können um die hyperbolische Ebene zu konstruieren. Eine fundierte Einführung in die riemannsche Geometrie liefert zum Beispiel das Buch von Lee [26].

Die grundlegenden Objekte der riemannschen Geometrie sind sogenannte riemannsche Mannigfaltigkeiten. Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind glatte Mannigfaltigkeiten, die mit einer zusätzlichen Struktur, einer sogenannten riemannschen Metrik ausgestattet sind.

4.1.1 Wozu riemannsche Geometrie?

Riemannsche Geometrie erlaubt es unter anderem, die folgenden Fragen zu beantworten:

Frage 4.1.1.

- Wie kann man die Geometrie euklidischer Räume auf kompliziertere Objekte wie Mannigfaltigkeiten übertragen? Insbesondere: wie erhält man geeignete Begriffe von Längen, Abständen, Winkeln, Flächeninhalten, ... auf Mannigfaltigkeiten?

- Wie kann man Krümmung von geometrischen Objekten lokal definieren?

- Welche globalen Konsequenzen haben lokale Krümmungseigenschaften?

- Gibt es zweidimensionale Geometrien, die alle Axiome von Euklid bzw. Hilbert erfüllen bis auf das Parallelenaxiom?

- Gibt es längentreue ebene Landkarten von Ausschnitten der Erdoberfläche?

Vielfältige weitere Anwendungen ergeben sich in der Physik und der Optimierung.

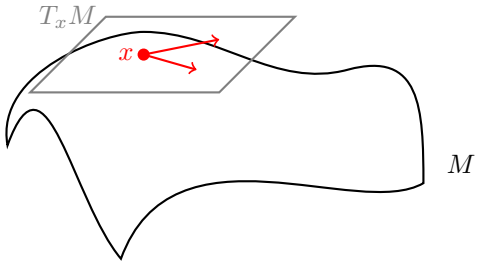


Abbildung 4.1.: Eine glatte Mannigfaltigkeit, anschaulich

4.1.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündel

Eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n ist grob gesagt ein topologischer Raum, der lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht und für den man definieren kann, was glatte Abbildungen sind. Zu jedem Punkt $x \in M$ kann man einen Tangentialraum T_xM konstruieren; dieser ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der die „beste lineare Approximation“ an M im Punkt x beschreibt (Abbildung 4.1). Ist $f\colon M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so erhält man für jedes $x \in M$ eine induzierte lineare Abbildung $T_xf\colon T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$, die f an x „linear approximiert,“ das *Differential von f an der Stelle x*.

Wir erklären diese Begriffe nun ein bisschen genauer: Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Eine *topologische n-Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist; außerdem verlangt man im Normalfall zusätzlich noch, dass der topologische Raum hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, um pathologische Fälle auszuschließen.

- Eine *glatte n-Mannigfaltigkeit* ist eine topologische n-Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem sogenannten glatten Atlas (bestehend aus Karten $M \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit glatten Kartenwechseln). Mithilfe des glatten Atlas lässt sich definieren, wann Abbildungen von und nach M glatt sind.

- Ist M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, so kann man durch lokale lineare Approximation das sogenannte *Tangentialbündel* $p_M\colon TM \longrightarrow M$ konstruieren. Das Tangentialbündel ist ein n-dimensionales Vektorbündel über M, d.h. p_M ist eine stetige Abbildung und für jedes $x \in M$ ist die Faser $T_xM := p_M^{-1}(x)$ mit der Struktur eines n-dimensionalen Vektorraums versehen, so dass folgende Bedingung erfüllt ist: Jeder Punkt

in M besitzt eine offene Umgebung $U \subset M$ mit der Eigenschaft, dass $p_M|_{p_M^{-1}(U)} \colon p_M^{-1}(U) \longrightarrow U$ (bis auf Homöomorphismus) nichts anderes als die Projektion

$$U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

auf die erste Koordinate ist und die Vektorraumstruktur auf den Fasern mit der Vektorraumstruktur der zweiten Koordinate verträglich ist. Zusätzlich hat das Tangentialbündel die Eigenschaft, dass es lokal „die beste lineare Approximation“ an M ist.

Genauer gesagt liefert das Tangentialbündel einen Funktor und glatte Abbildungen $f \colon M \longrightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten induzieren Abbildungen $Tf \colon TM \longrightarrow TN$ zwischen den entsprechenden Tangentialbündeln, die fasernweise linear sind. Wie im Fall der klassischen Ableitung ist Tf in jedem Punkt die „beste lineare Approximation“ an f.

Beispiel 4.1.2 (offene Teilmengen der Ebene als glatte Mannigfaltigkeiten)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge. Dann ist M offensichtlich eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit und wir versehen M mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten glatten Struktur. In diesem Fall ist das Tangentialbündel $TM \longrightarrow M$ trivial, d.h. $TM \cong M \times \mathbb{R}^2$, wobei die Bündelprojektion einfach die Projektion auf die erste Koordinate ist und die Vektorraumstruktur der Fasern durch die Vektorraumstruktur der zweiten Koordinate gegeben ist. Wir identifizieren daher T_xM für jedes $x \in M$ auf diese Weise mit $\mathbb{R}^2$. D.h. in diesem Fall können wir die globale Struktur des Tangentialbündels ignorieren und wie gewohnt mit glatten Funktionen und ihren Ableitungen umgehen.

Caveat 4.1.3. Im allgemeinen ist die globale Struktur des Tangentialbündels einer glatten n-Mannigfaltigkeit *nicht* trivial. In solchen Fällen muss dann also sehr sorgfältig mit den lokalen Identifikationen der Tangentialräume mit $\mathbb{R}^n$ umgegangen werden. Dies trifft zum Beispiel auf S^2 zu (Kapitel 4.6).

4.1.3 Riemannsche Metriken

Die Grundidee riemannscher Mannigfaltigkeiten ist es, zusätzlich, auf jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt zu wählen (und zwar so, dass das Skalarprodukt stetig vom Basispunkt abhängt). Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$, so ist eine *riemannsche Metrik* $g = (g_x)_{x \in M}$ eine Familie von Skalarprodukten g_x auf T_xM. Man nennt dann (M, g) eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Genauer gesagt geht man wie folgt vor: Zu einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V bezeichne $\mathrm{SKP}(V)$ die Menge aller Skalarprodukte auf V. Die Standardtopologie auf V induziert dann auch eine Topologie

auf $\mathrm{SKP}(V)$, zum Beispiel durch punktweise Konvergenz. Diese Konstruktion für glatte Mannigfaltigkeiten kann zu einem Bündel $p\colon \mathrm{SKP}(TM) \longrightarrow M$ erweitert werden. Eine *riemannsche Metrik auf M* ist dann eine stetige Abbildung $g\colon M \longrightarrow \mathrm{SKP}(TM)$ mit $p \circ g = \mathrm{id}_M$.

Ist (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so können wir zu $x \in M$ für Vektoren im Tangentialraum T_xM Längen und Winkel definieren. Insbesondere können wir so auch wieder Winkel zwischen glatten Kurven definieren, die im selben Punkt beginnen.

Indem wir Satz 3.2.3 rückwärts interpretieren, erhalten wir einen Längenbegriff für glatte Kurven in riemannschen Mannigfaltigkeiten:

Definition 4.1.4 (Länge von Kurven in riemannschen Mannigfaltigkeiten)**.** Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\gamma\colon I \longrightarrow M$ eine glatte Kurve. Dann ist die *(riemannsche) Länge von γ in (M, g)* definiert durch

$$L_{(M,g)}(\gamma) := \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}\big(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)}\, dt.$$

Beispiel 4.1.5 (euklidische Ebene)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen. Wir fassen M wie in Beispiel 4.1.2 als glatte Mannigfaltigkeit auf. Dann ist $g := (g_x)_{x \in M}$ mit

$$\begin{aligned} g_x\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, v') &\longmapsto v_1 \cdot v_1' + v_2 \cdot v_2' \end{aligned}$$

für alle $x \in M$ eine riemannsche Metrik auf M, die euklidische riemannsche Metrik. In diesem Fall erhalten wir auf M denselben Begriff von Kurvenlänge wie in der klassischen euklidischen Geometrie (Satz 3.2.3).

4.1.4 Metriken aus riemannschen Metriken

Was haben riemannsche Metriken mit gewöhnlichen Metriken zu tun? Auf einer zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) können wir eine Metrik definieren, indem wir die Länge glatter Kurven zwischen zwei Punkten minimieren:

$$\begin{aligned} d\colon M \times M &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \inf\big\{L_{(M,g)}(\gamma) \;\big|\; \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } M \text{ von } x \text{ nach } y\big\}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass dies tatsächlich eine Metrik auf M definiert und dass die von dieser Metrik induzierte Topologie auf M mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt. Außerdem stimmt auch die metrische Länge glatter Kurven bezüglich dieser Metrik mit der riemannschen Länge aus Definition 4.1.4 überein.

Caveat 4.1.6 (riemannscher Abstand in offenen Untermannigfaltigkeiten)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine offene zusammenhängende Teilmenge. Wir fassen M wie in

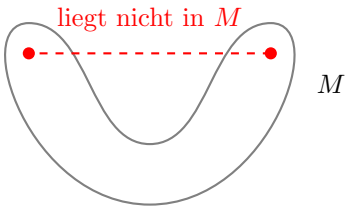


Abbildung 4.2.: Warum die Metrik der riemannschen Metrik größere Abstände liefert als die euklidische Metrik

Beispiel 4.1.5 als riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Dann ist die von der riemannschen Metrik auf M induzierte Metrik auf M im allgemeinen *nicht* die euklidische Metrik (Abbildung 4.2).

4.2 Konstruktion der hyperbolischen Ebene

Wir konstruieren nun die hyperbolische Ebene als riemannsche Mannigfaltigkeit. Dazu betrachten wir das sogenannte Halbebenen-Modell. In der Kurzfassung lautet die Definition der hyperbolischen Ebene folgendermaßen: Die hyperbolische Ebene ist die obere Halbebene in $\mathbb{R}^2$ mit der riemannschen Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Wir werden dies nun zu einer präzisen Definition erweitern.

Definition 4.2.1 (obere Halbebene)**.** Wir schreiben

$$H := \big\{(x, y) \;\big|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\big\}$$

für die *obere Halbebene*. Je nach Situation werden wir H auch mit der entsprechenden Teilmenge in $\mathbb{C}$ identifizieren:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \\ (x, y) &\longmapsto x + i \cdot y \\ (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) &\longleftarrow\!\shortmid\; z \end{aligned}$$

Definition 4.2.2 (hyperbolische Ebene)**.** Die *hyperbolische Ebene* $\mathbb{H}^2$ ist die riemannsche Mannigfaltigkeit (H, g_H), wobei

- wir H wie in Beispiel 4.1.2 als glatte Mannigfaltigkeit auffassen
- und $g_H := (g_{H\,z})_{z \in H}$ die riemannsche Metrik auf H mit

$$g_{H(x,y)}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, v') \longmapsto \frac{1}{y^2} \cdot \langle v, v' \rangle$$

für alle $(x, y) \in H$ ist (wobei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist).

Ist $z \in H$, so schreiben wir auch $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{H,z}$ für g_{Hz} und $\|\cdot\|_{H,z}$ für die von g_{Hz} induzierte Norm auf $\mathbb{R}^2$.

In anderen Worten: in Abhängigkeit vom Punkt $(x, y) \in H$ ist das Skalarprodukt auf dem Tangentialraum an (x, y) das um $1/y^2$ skalierte Standardskalarprodukt.

Beispiel 4.2.3. Sei $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Interpretiert man $v := (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ als Vektor in $T_{(0,y)}H$, so ist $\|v\|_{H,i\cdot y} = \sqrt{1/y^2 \cdot 1} = 1/y$.

Bemerkung 4.2.4 (Ableitung)**.** Da die glatte Struktur von H von $\mathbb{R}^2$ induziert ist, können wir Ableitungen von und nach H wie in der klassischen mehrdimensionalen Analysis berechnen. Um den Basispunkt etwas deutlicher hervorzuheben, werden wir für glatte Abbildungen $f\colon H \longrightarrow H$ für die Ableitung/das Differential im Punkt $z \in H$ die Mannigfaltigkeits-Notation $T_z f\colon T_z H = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 = T_{f(z)}H$ verwenden.

4.3 Länge von Kurven

Mithilfe der riemannschen Metrik auf $\mathbb{H}^2$ können wir nun die Länge glatter Kurven in der hyperbolischen Ebene und somit auch eine Metrik auf der hyperbolischen Metrik definieren.

Definition 4.3.1 (hyperbolische Länge einer Kurve)**.** Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ eine glatte Kurve. Dann ist die *hyperbolische Länge von* γ definiert durch

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) := \int_{T_0}^{T_1} \left\|\dot\gamma(t)\right\|_{H,\gamma(t)}\, dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dabei ist $\dot\gamma(t) = T_t\gamma(1) \in T_{\gamma(t)}H$ und unter der kanonischen Identifikation $T_{\gamma(t)}H = \mathbb{R}^2$ stimmt dies mit der gewöhnlichen Ableitung $\dot\gamma(t)$ aus Bemerkung 3.2.2 überein.

Um ein Gefühl für die Länge von Kurven in $\mathbb{H}^2$ zu bekommen, ist es hilfreich sich zu vergegenwärtigen, dass die Definition der riemannschen Metrik g_H dazu führt, dass Kurven, die in der Halbebene „weiter oben“ verlaufen, eine kürzere Länge haben werden: Die Länge der Tangentialvektoren

wird dabei ja bezüglich einer Norm gemessen, die um einen kleineren Faktor skaliert wird.

Proposition 4.3.2 (triviale Abschätzung). *Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Sei*

$$\begin{aligned} m &:= \min\{\operatorname{Im}\gamma(t) \mid t \in [T_0, T_1]\} \in \mathbb{R}_{>0}, \\ M &:= \max\{\operatorname{Im}\gamma(t) \mid t \in [T_0, T_1]\} \in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{m} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq \frac{1}{M} \cdot d_2\big(\gamma(T_0), \gamma(T_1)\big).$$

Beweis. Da γ stetig ist, sind m und M wohldefiniert und positiv. Aus der Definition der hyperbolischen Metrik erhalten wir

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) &= \int_{T_0}^{T_1} \big\|\dot\gamma(t)\big\|_{H,\gamma(t)}\, dt \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{\operatorname{Im}\gamma(t)} \cdot \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2\, dt \\ &\geq \frac{1}{M} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2\, dt \\ &= \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 3.2.3 angewendet haben. Mit Proposition 2.3.2 folgt $L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq d_2(\gamma(T_0), \gamma(T_1))$. Analog zeigt man die obere Abschätzung. □

Proposition 4.3.3 (vertikale Abschätzung). *Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Sei außerdem $p := i \cdot \operatorname{Im}\colon H \longrightarrow H$ die Projektion auf den imaginären Anteil.*

1. *Dann gilt $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma)$ und Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $\operatorname{Re}\gamma$ konstant ist.*

2. *Außerdem ist*

$$L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma) \geq \big|\ln \operatorname{Im}\gamma(T_1) - \ln \operatorname{Im}\gamma(T_0)\big|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn die Ableitung von $\operatorname{Im}\gamma$ das Vorzeichen nicht ändert.

Beweis. Die Abbildung p ist glatt und für alle $z \in H$ gilt

$$\begin{aligned} T_z p\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Also ist auch $\widetilde{\gamma} := p \circ \gamma = i \cdot \operatorname{Im} \gamma$ glatt und für alle $t \in [T_0, T_1]$ ist (Kettenregel und Pythagoras in den Tangentialräumen)

$$\begin{aligned}\|\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\|_{H,\widetilde{\gamma}(t)} &= \frac{1}{\operatorname{Im} \widetilde{\gamma}(t)} \cdot \|\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\|_2 = \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(t)} \cdot \big\|(T_{\gamma(t)} p)(\dot{\gamma}(t))\big\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(t)} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

und Gleichheit liegt nur dann vor, wenn die erste Koordinate von $\dot{\gamma}$ konstant 0 ist; letzteres ist dazu äquivalent, dass die Abbildung $\operatorname{Re} \gamma$ konstant ist. Also folgt $L_{\mathbb{H}^2}(\widetilde{\gamma}) \leq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re} \gamma$ konstant ist. Damit ist der erste Teil gezeigt.

Im Beweis des zweiten Teiles schreiben wir kurz $f := \operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Im} p \circ \gamma$. Nach Definition und wegen $f > 0$ ist

$$\begin{aligned}L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma) &= \int_{T_0}^{T_1} \big\|(p \circ \gamma)^{\cdot}(t)\big\|_{H,\gamma(t)} \, dt = \int_{T_0}^{T_1} \frac{|\dot{f}(t)|}{f(t)} \, dt \\ &\geq \left| \int_{T_0}^{T_1} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \, dt \right| = \left| \int_{T_0}^{T_1} (\ln f)^{\cdot}(t) \, dt \right| \\ &= \big|\ln f(T_1) - \ln f(T_0)\big|.\end{aligned}$$

Gleichheit gilt in der obigen Abschätzung genau dann, wenn $\dot{f}$ das Vorzeichen nicht ändert. Damit ist auch der zweite Teil gezeigt. □

Wir definieren nun aus der Länge von Kurven eine Metrik auf $\mathbb{H}^2$:

Proposition 4.3.4 (Metrik auf $\mathbb{H}^2$)**.** *Wir definieren*

$$\begin{aligned}d_H \colon H \times H &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (z, z') &\longmapsto \inf\big\{L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \;\big|\; \gamma \textit{ ist eine glatte Kurve in } H \textit{ von } z \textit{ nach } z'\big\}.\end{aligned}$$

Dies ist eine Metrik auf H.

Beweis. Definitheit. Die Tatsache, dass $d_H(z, z') = 0$ genau dann gilt, wenn $z = z'$ ist, folgt aus den Abschätzungen in Proposition 4.3.2 und Proposition 4.3.3 (Übungsaufgabe).

Symmetrie. Umgekehrtes Durchlaufen von Kurven zeigt mithilfe des Transformationssatzes, dass d_H symmetrisch ist.

Dreiecksungleichung. Seien $z, z', z'' \in H$ und seien $\gamma \colon I \longrightarrow H$ bzw. $\gamma' \colon I' \longrightarrow H$ glatte Kurven von z nach z' bzw. von z' nach z''. Es ist nicht schwer, daraus eine Kurve γ'' von z nach z'' zu konstruieren, indem man zuerst γ und dann γ' durchläuft (und die Intervalle I bzw. I' geeignet zu einem Intervall in $\mathbb{R}$ zusammensetzt/verschiebt). Eine kleine technische Schwierigkeit[1] dabei ist, dass diese neue Kurve im allgemeinen *nicht* glatt sein wird

[1] Alternativ kann man auch die Länge von Kurven etc. für stückweise glatte Kurven betrachten und das Problem an dieser Stelle somit umgehen.

(an der Nahtstelle z'). Klassische Glättungstricks zeigen jedoch, dass es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Kurve $\eta\colon J \longrightarrow H$ von z nach z'' mit

$$L_{\mathbb{H}^2}(\eta) \leq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) + L_{\mathbb{H}^2}(\gamma') + \varepsilon$$

gibt. Indem man nun zum Infimum übergeht, erhält man die gewünschte Dreiecksungleichung $d_H(z, z'') \leq d_H(z) + d_H(z')$. □

Bemerkung 4.3.5 (induzierte Topologie)**.** Ähnliche Argumente wie für den Beweis der Definitheit von d_H zeigen auch: Die Topologie auf H, die von d_H induziert wird, stimmt mit der euklidischen Topologie auf H überein; d.h. Teilmengen in H sind genau dann bezüglich d_H offen, wenn sie bezüglich d_2 offen sind.

Satz 4.3.6 (hyperbolische Länge vs. metrische Länge)**.** *Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Dann gilt*

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma).$$

Beweis. Die Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ folgt direkt aus der Definition von d_H und der metrischen Länge $L_{(H,d_H)}$.

Die umgekehrte Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von d_H), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit Satz 3.2.3 kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten. (Übungsaufgabe) □

Wir werden uns – analog zum euklidischen Fall – bei der Untersuchung der hyperbolischen Ebene von den folgenden Fragen leiten lassen:

Frage 4.3.7. Wie kann man die Metrik auf $\mathbb{H}^2$ besser verstehen? D.h.:

- Welche Kurven in $\mathbb{H}^2$ sind Geodäten?
- Welche Isometrien besitzt $\mathbb{H}^2$?

Tatsächlich hängen diese Fragen alle eng miteinander zusammen und wir werden die Antworten dazu in Kapitel 4.4 parallel entwickeln. Als erstes Beispiel betrachten wir den folgenden Spezialfall:

Proposition 4.3.8 (vertikale Geodäten)**.** *Sei $y \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gibt es in $\mathbb{H}^2$ genau eine [glatte][2] Geodäte (bezüglich d_H) von i nach $i \cdot y$, nämlich*

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, \ln y] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto i \cdot e^t. \end{aligned}$$

Für diese gilt $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ln y$. Also ist $d_H(i, i \cdot y) = \ln y$.

[2] Die Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung der Glattheit; dies führt aber zu zusätzlichen Komplikationen, auf die wir an dieser Stelle verzichten wollen (Bemerkung 4.4.18).

Beweis. Wir gehen in folgenden Schritten vor:

① Wir bestimmen die Länge von (Teilkurven von) γ: Mit Proposition 4.3.3[3] folgt

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) = \ln e^{t_1} - \ln e^{t_0} = t_1 - t_0$$

für alle $t_0, t_1 \in [0, \ln y]$ mit $t_0 < t_1$. Insbesondere ist $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ln y$.

② Aus Proposition 4.3.3 folgt aber auch

$$d_H(i \cdot y_0, i \cdot y_1) \geq \ln y_1 - \ln y_0$$

für alle $y_0, y_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y_1 > y_0$. Zusammen mit Schritt ① erhalten wir somit für alle $y_1, y_0 \in [1, y]$ mit $y_1 > y_0$, dass

$$d_H(i \cdot y_0, i \cdot y_1) = \ln y_1 - \ln y_0.$$

Insbesondere ist γ eine d_H-Geodäte von i nach $i \cdot y$.

③ Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\eta\colon [0, L] \longrightarrow H$ eine glatte Geodäte von i nach $i \cdot y$ mit $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Schritt ② ist $L = \ln y$.

Wir zeigen zunächst, dass $\operatorname{Re}\eta = 0$ ist: Es gilt (nach Satz 4.3.6 und Proposition 2.3.2)

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}(\eta) &= L_{(H,d_H)}(\eta) \\ &= d_H\big(\eta(0), \eta(L)\big) \\ &= L = \ln y \\ &= \big|\ln \operatorname{Im}\eta(L) - \ln \operatorname{Im}\eta(0)\big|. \end{aligned}$$

Mit der vertikalen Abschätzung (Proposition 4.3.3) erhalten wir somit, dass $\operatorname{Re}\eta$ konstant ist und dass $\operatorname{Im}\eta$ monoton ist; wegen $\eta(0) = i$ und $\eta(L) = i \cdot y$ folgt daraus, dass $\operatorname{Re}\eta = 0$ und $\operatorname{Im}\eta$ monoton wachsend (und mindestens 1) ist.

Da η eine Geodäte ist, erhalten wir für alle $t \in [0, \ln y]$ mit Schritt ②

$$t - 0 = d_H\big(\eta(t), \eta(0)\big) = \ln \operatorname{Im}\eta(t) - \ln \operatorname{Im}\eta(0) = \ln \operatorname{Im}\eta(t),$$

und damit $\eta(t) = i \cdot e^t = \gamma(t)$. □

Bemerkung 4.3.9 (vertikale geodätische Geraden)**.** Analog kann man auch zeigen, dass es zu $y, y' \in \mathbb{R}_{>0}$ genau eine [glatte] Geodäte in (H, d_H) von $i \cdot y$ nach $i \cdot y'$ gibt und dass es (bis auf Umparametrisierung) genau eine [glatte] geodätische Gerade in (H, d_H) gibt, die durch $i \cdot y$ und $i \cdot y'$ geht, nämlich $\mathbb{R} \longrightarrow H,\ t \longmapsto i \cdot e^t$.

[3] Alternativ lässt sich in diesem Fall die Länge natürlich auch direkt aus der Formel berechnen

4.4 Symmetrie

Wir werden im folgenden die Isometriegruppe und die Geodäten der hyperbolischen Ebene bestimmen. Es bietet sich dabei an, beides gleichzeitig zu untersuchen und wie bei einem Bootstrap-Verfahren die jeweils gewonnenen Erkenntnisse über Geodäten bzw. Isometrien zu verwenden, um Isometrien bzw. Geodäten besser zu verstehen.

4.4.1 Riemannsche Isometrien

Wir beginnen mit sogenannten riemannschen Isometrien, die eine analytische Quelle für metrische Isometrien sind:

Definition 4.4.1 (riemannsche Isometriegruppe)**.** Eine *riemannsche Isometrie* $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist ein glatter Diffeomorphismus[4] $f\colon H \longrightarrow H$ mit

$$\forall_{z\in H} \quad \forall_{v,v'\in T_zH} \quad \big\langle T_zf(v), T_zf(v')\big\rangle_{H,f(z)} = \langle v, v'\rangle_{H,z}.$$

Die *riemannsche Isometriegruppe von* $\mathbb{H}^2$ ist die Menge $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ aller riemannschen Isometrien $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$, bezüglich Verknüpfung.

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tatsächlich eine Gruppe bildet.

Proposition 4.4.2 (riemannsche Isometrien sind Isometrien)**.** *Jede riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist eine metrische Isometrie bezüglich d_H. Wir erhalten so einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \longrightarrow \mathrm{Isom}(H, d_H).$$

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ eine riemannsche Isometrie. Aus der Definition der hyperbolischen Länge von glatten Kurven γ in H und der Kettenregel folgt $L_{\mathbb{H}^2}(f\circ\gamma) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$. Dies liefert

$$d_H\big(f(z), f(z')\big) \le d_H(z, z')$$

für alle $z, z' \in H$. Wendet man dasselbe Argument auf das Inverse von f an, so folgt die Behauptung. □

Tatsächlich werden wir sehen, dass alle metrischen Isometrien von $\mathbb{H}^2$ bereits riemannsche Isometrien sind (Satz 4.4.24). Dies gilt auch allgemeiner für vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten (erfordert aber fortgeschrittenere Techniken).

[4] Ein *glatter Diffeomorphismus* ist eine glatte Abbildung, die ein glattes Inverses besitzt

4.4.2 Möbiustransformationen

Als nächsten Schritt betrachten wir eine explizite Klasse von Isometrien der hyperbolischen Ebene, die Möbiustransformationen.

Definition 4.4.3. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) &:= \big\{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \;\big|\; \det A = 1\big\} \\ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) &:= \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{E_2, -E_2\} \end{aligned}$$

(wobei $E_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix ist).

Man beachte dabei, dass $\{E_2, -E_2\}$ ein Normalteiler in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ist und somit $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ die Gruppenstruktur von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ erbt. Die Gruppen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ wirken auf folgende Weise auf H:

Proposition 4.4.4 (Möbiustransformationen)**.** *Zu*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

betrachten wir die assoziierte Möbiustransformation

$$\begin{aligned} f_A \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. *Für alle $z \in H$ ist $\operatorname{Im} f_A(z) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \operatorname{Im} z$.*
2. *Die Abbildung f_A ist wohldefiniert und ein glatter Diffeomorphismus.*
3. *Es ist $f_{E_2} = \mathrm{id}_H = f_{-E_2}$.*
4. *Für alle $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ gilt $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$.*

Beweis. Ad 1. Dies ist eine elementare Rechnung in den komplexen Zahlen: Sei $z \in H$. Wegen $a \cdot d - b \cdot d = \det A = 1$ und $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ bzw. $\operatorname{Im}(\overline{z} + z) = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\big(f_A(z)\big) &= \operatorname{Im}\Big(\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\frac{(a \cdot z + b) \cdot (c \cdot \overline{z} + d)}{|c \cdot z + d|^2}\Big) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \operatorname{Im}(ac \cdot z \cdot \overline{z} + bc \cdot \overline{z} + ad \cdot z + bd) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \operatorname{Im}\big(bc \cdot (\overline{z} + z) + z\big) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

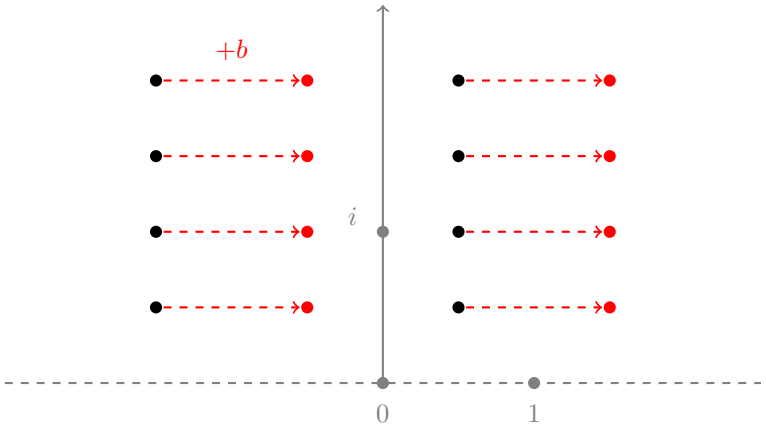


Abbildung 4.3.: Die Möbiustransformation $z \longmapsto z + b$ auf H zu $b \in \mathbb{R}$.

Ad 2. Man beachte, dass die Nennernullstellen in $\mathbb{R}$ liegen, dass aber H keine Punkte aus $\mathbb{R}$ enthält. Aus dem ersten Teil folgt $f_A(H) \subset H$. Also ist $f_A \colon H \longrightarrow H$ eine wohldefinierte Abbildung. Aus der Funktionentheorie ist außerdem bekannt, dass f_A glatt ist (aufgefasst als Funktion zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$). Dass f_A ein Diffeomorphismus ist, ist eine Konsequenz von Teil 3/4; das Inverse ist nämlich nach Teil 3/4 durch $f_{A^{-1}}$ gegeben.

Ad 3. Dies folgt direkt aus der Definition.

Ad 4. Die behauptete Gleichheit folgt durch einfaches Nachrechnen. □

Beispiel 4.4.5 (einfache Möbiustransformationen)**.** Als erstes Beispiel betrachten wir die folgenden beiden Möbiustransformationen:

- Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Möbiustransformation zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

  die horizontale Translation $z \longmapsto z + b$ auf H um b (Abbildung 4.3).

- Die Möbiustransformation zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

  ist die Abbildung $z \longmapsto -1/z$ (Abbildung 4.4), die offenbar zu sich selbst invers ist. Diese Abbildung ist mit der Inversion am Kreis aus der Elementargeometrie verwandt.

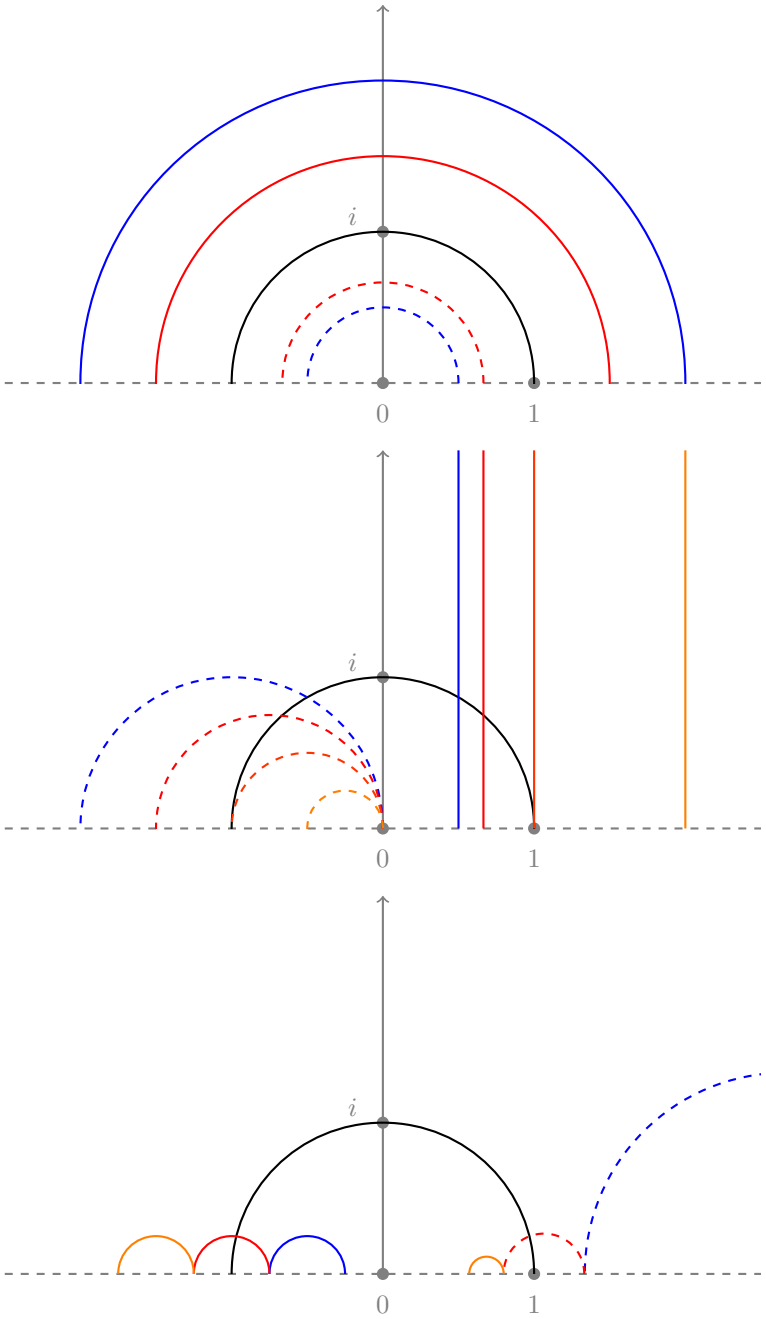


Abbildung 4.4.: Die Möbiustransformation $z \longmapsto -1/z$ auf H; Objekte derselben Farbe werden aufeinander abgebildet

Bemerkung 4.4.6 (ein einfaches Erzeugendensystem)**.** Aus der linearen Algebra wissen wir, dass man mithilfe der Matrizen aus Beispiel 4.4.5 genügend Zeilen- und Spaltenoperationen simulieren kann, um jede Matrix aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in die Einheitsmatrix zu transformieren. Daraus folgt, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ von der Menge

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R}\right\}$$

erzeugt wird.

Proposition 4.4.7 (Möbiustransformationen sind Isometrien)**.** *Ist $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, so ist die Möbiustransformation $f_A\colon H \longrightarrow H$ eine riemannsche Isometrie von $\mathbb{H}^2$. Insbesondere erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(H, d_H) \\ A &\longmapsto f_A. \end{aligned}$$

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Nach Proposition 4.4.4 ist $f_A\colon H \longrightarrow H$ ein glatter Diffeomorphismus und eine Rechnung zeigt, dass f_A nur dann id_H ist, wenn $A \in \{E_2, -E_2\}$ ist.

Es bleibt daher nur die Verträglichkeit mit der riemannschen Metrik zu zeigen: Ist $z \in H$, so folgt mit den Methoden der Funktionentheorie und $1 = \det A = a \cdot d - b \cdot c$, dass

$$\begin{aligned} T_z f_A\colon T_z H &\longrightarrow T_{f(z)} H \\ v &\longmapsto \frac{a \cdot (c \cdot z + d) - (a \cdot z + b) \cdot c}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v = \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v \end{aligned}$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite die komplexe Multiplikation unter der kanonischen Identifikation $T_z H = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bzw. $T_{f(z)} H = \mathbb{C}$ ist. Mit dem ersten Teil von Proposition 4.4.4 folgt für alle $v, v' \in T_z H$:

$$\begin{aligned} \big\langle T_z f_A(v), T_z f_A(v') \big\rangle_{H, f_A(z)} &= \left\langle \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v, \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v' \right\rangle_{H, f_A(z)} \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Im} f_A(z))^2} \cdot \left\langle \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v, \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v' \right\rangle \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Im} f_A(z))^2} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v \cdot \frac{1}{\overline{(c \cdot z + d)}^2} \cdot \overline{v}' \right) \\ &= \frac{|c \cdot z + d|^4}{(\operatorname{Im} z)^2} \cdot \frac{1}{|c \cdot z + d|^4} \cdot \operatorname{Re}(v \cdot \overline{v}') \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \cdot \langle v, v' \rangle \\ &= \langle v, v' \rangle_{H, z}. \end{aligned}$$

Also ist f_A eine riemannsche Isometrie von $\mathbb{H}^2$.

Alternativ hätte es nach Bemerkung 4.4.6 auch genügt, zu zeigen, dass die horizontalen Translationen sowie die Inversion am Kreis mit der riemannschen Metrik verträglich sind. □

Insbesondere bilden Möbiustransformationen Geodäten in (H, d_H) auf Geodäten in (H, d_H) ab (Proposition 2.3.3).

Bemerkung 4.4.8 (Gruppenoperation)**.** In der Sprache der Gruppenoperationen besagt Proposition 4.4.7, dass die Gruppen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ via Möbiustransformationen isometrisch auf (H, d_H) operieren.

4.4.3 Transitivität der Möbiustransformationen

Wir werden nun zeigen, dass uns Möbiustransformationen erlauben, Situationen in der hyperbolischen Ebene auf Situationen um die imaginäre Achse zurückzuführen. Genauer gesagt, werden wir Transitivitätseigenschaften von Möbiustransformationen untersuchen.

Mithilfe von Möbiustransformationen können wir von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt der hyperbolischen Ebene gelangen:

Proposition 4.4.9 (Transitivität der Möbiustransformationen I)**.** *Die Operation von* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *auf* H *durch Möbiustransformationen ist transitiv, d.h. für alle* $z, z' \in H$ *gibt es eine Matrix* $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *mit*

$$z' = f_A(z).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wir von jedem Punkt in H zu i gelangen können: Sind $z, z' \in H$ und sind $A, A' \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A(z) = i = f_{A'}(z')$, so folgt mit Proposition 4.4.4, dass $f_{A'^{-1}} = (f_{A'})^{-1}$ und

$$f_{A'^{-1} \cdot A}(z) = f_{A'^{-1}} \circ f_A(z) = (f_{A'})^{-1}(i) = z'.$$

Sei $z \in H$ und sei $x := \mathrm{Re}(z)$, $y := \mathrm{Im}(z)$. Indem wir z horizontal um $-x$ verschieben, erhalten wir einen Punkt auf der imaginären Achse; eine sogenannte diagonale Isometrie mit Faktor $1/\sqrt{y}$ entlang der imaginären Achse bildet diesen Punkt dann auf i ab. Genauer: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f_A(z) = i$, wie eine kleine Rechnung zeigt. □

Als Gegenstück dazu bestimmen wir die Untergruppe der Möbiustransformationen, die den Punkt i nicht bewegen:

Proposition 4.4.10 (Stabilisator von i). *Sei*

$$\mathrm{Stab}_i := \{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}$$

der Stabilisator von i *unter der Möbiustransformationsoperation auf* H. *Dann gilt*

$$\mathrm{Stab}_i = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\cdot\pi) \right\}.$$

Beweis. Dies ist eine einfache Rechnung (Übungsaufgabe). □

Bemerkung 4.4.11 (die hyperbolische Ebene als homogener Raum). Nach Propposition 4.4.9 und 4.4.10 können wir die hyperbolische Ebene auch als einen sogenannten homogenen Raum auffassen, nämlich als

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2).$$

Indem man nun eine geeignete riemannsche Metrik auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ einführt, kann man durch diese Beschreibung auch die Geometrie der hyperbolische Ebene definieren und untersuchen. Der Vorteil an dieser Interpretation ist, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}(2)$ Gruppen sind, und somit zusätzliche Struktur besitzen, die man an einigen Stellen gut verwenden kann. Tatsächlich ist es genau diese Struktur, die wir im folgenden ausgiebig nutzen werden.

Um die Geodäten der hyperbolischen Ebene zu verstehen, benötigen wir die folgende, stärkere, Transitivitätseigenschaft von Möbiustransformationen:

Proposition 4.4.12 (Transitivität der Möbiustransformationen II). *Seien* $z, z' \in H$ *mit* $z \neq z'$. *Dann gibt es* $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *mit*

$$f_A(z) = i \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Re}\big(f_A(z')\big) = 0, \qquad \mathrm{Im}\big(f_A(z')\big) > 1.$$

D.h. wir können je zwei Punkte der hyperbolischen Ebene durch eine gemeinsame Möbiustransformation auf die imaginäre Achse verschieben.

Beweis. Seien $z, z' \in H$. Nach Proposition 4.4.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z = i$ ist und es genügt somit eine Matrix $A \in \mathrm{Stab}_i$ mit $\mathrm{Re}\, f_A(z') = 0$ und $\mathrm{Im}\, f_A(z') > 1$ zu finden.

Dazu betrachten wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} R\colon [0, 2\cdot\pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \mathrm{Re}\Big(f_{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}(z')\Big). \end{aligned}$$

Dann ist

$$R(0) = \mathrm{Re}\big(f_{E_2}(z')\big) = \mathrm{Re}\, z'$$
$$R\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \mathrm{Re}\Big(f_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}(z')\Big) = \mathrm{Re}\Big(-\frac{1}{z'}\Big) = -\frac{1}{|z|^2} \cdot \mathrm{Re}(z').$$

Also haben $R(0)$ und $R(\pi/2)$ verschiedene Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $\varphi \in [0, \pi/2)$ mit $R(\varphi) = 0$. Dies liefert eine Matrix $A \in \mathrm{SO}(2) = \mathrm{Stab}_i$ mit $\mathrm{Re}(f_A(z')) = 0$.

Falls $\mathrm{Im}(f_A(z')) < 1$ ist, so betrachtet man

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \in \mathrm{SO}(2) = \mathrm{Stab}_i$$

und erhält so sowohl $\mathrm{Re}(f_B(z')) = \mathrm{Re}(f_A(z')) = 0$ als auch die Imaginärteilbedingung $\mathrm{Im}(f_B(z')) = -1/|f_A(z')|^2 \cdot \mathrm{Im}\, f_A(z') > 1$. □

4.4.4 Geodäten der hyperbolischen Ebene

Wir bestimmen nun alle Geodäten der hyperbolischen Ebene. Dazu verwenden wir die Beschreibung vertikaler Geodäten und die Abbildungs- bzw. Transitivitätseigenschaften der Möbiustransformationen.

Satz 4.4.13 (Charakterisierung hyperbolischer Geodäten). *Seien $z, z' \in H$ mit $z \neq z'$.*

1. *Dann gibt es genau eine [glatte] Geodäte in (H, d_H) von z nach z'.*
2. *Und es gibt (bis auf Umparametrisierung[5] in $\mathbb{R}$) genau eine [glatte] geodätische Gerade in (H, d_H), die z und z' enthält.*

Genauer: Ist $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{Re}(f_A(z)) = 0 = \mathrm{Re}(f_A(z')) = 0$, so ist $f_{A^{-1}} \circ (t \mapsto i \cdot e^t)$ eine geodätische Gerade durch z und z' und die [glatte] Geodäte von z nach z' ist ein Segment davon.

Beweis. Da alle Möbiustransformationen [glatte] Isometrien sind (Proposition 4.4.7) und sehr transitiv auf der oberen Halbebene H operieren (Proposition 4.4.12), können wir uns auf den Fall zurückziehen, dass $z = i$ und $z' = i \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}_{>1}$ ist. In diesem Fall folgt die Behauptung aus Proposition 4.3.8 bzw. Bemerkung 4.3.9. □

Bemerkung 4.4.14 (die hyperbolische Metrik, explizit). Man kann nun mit der Beschreibung aus Satz 4.4.13 und der Berechnung vertikaler Abstände (Proposition 4.3.3) auch eine explizite Formel für die Metrik d_H auf H herleiten: Für alle $z, z' \in H$ gilt

[5] D.h. via $t \mapsto \varepsilon \cdot t + a$, wobei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist

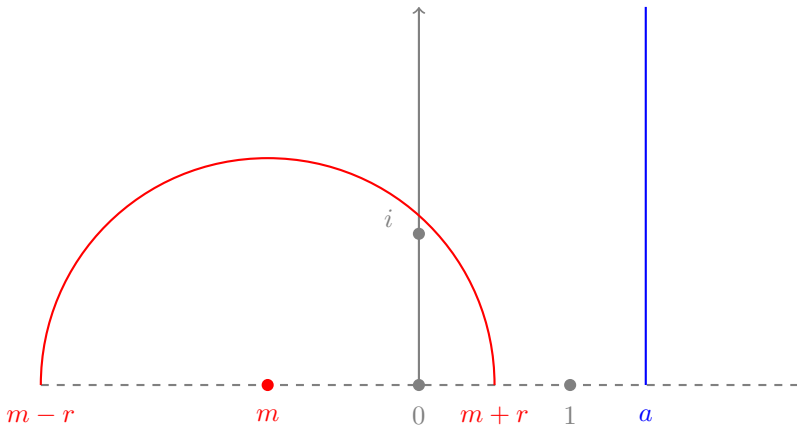


Abbildung 4.5.: Verallgemeinerte Halbkreise in der oberen Halbebene

$$d_H(z,z') = \operatorname{arccosh}\Big(1 + \frac{|z-z'|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z'}\Big).$$

Dabei ist arccosh die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}\colon \mathbb{R}_{\geq 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big) \end{aligned}$$

des *Kosinus Hyperbolicus*

$$\begin{aligned} \cosh\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(i \cdot x). \end{aligned}$$

Um hyperbolische Geodäten anschaulich noch besser zu verstehen, betrachten wir verallgemeinerte Halbkreise (Abbildung 4.5) und ihren Zusammenhang mit Möbiustransformationen:

Definition 4.4.15 (verallgemeinerter Halbkreis)**.** Ein *verallgemeinerter Halbkreis* ist eine Teilmenge $K \subset H$ der folgenden Form:

- Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K = \{z \in H \mid |z-m| = r\}$ oder
- es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $K = \{a + i \cdot t \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Proposition 4.4.16 (Möbiustransformationen und Halbkreise)**.** *Ist $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, so bildet die Möbiustransformation f_A verallgemeinerte Halbkreise auf verallgemeinerte Halbkreise ab.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.4.6 genügt es, die Behauptung für Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $b \in \mathbb{R}$ und ihre Inversen zu zeigen. Im ersten Fall (horizontale Translation) ist dies klar; im zweiten Fall kann es durch Nachrechnen gezeigt werden (Übungsaufgabe). Man beachte dabei, dass die Inversen dieser beiden Typen von Matrizen Möbiustransformationen derselben Art liefern. □

Korollar 4.4.17 (hyperbolische Geodäten sind verallgemeinerte Halbkreise)**.** *Insbesondere sind [glatte] Geodäten bzw. geodätische Geraden in (H, d_H) genau die (korrekt parametrisierten) Segmente von verallgemeinerten Halbkreisen in H.*

Beweis. Dies folgt nun direkt aus der Charakterisierung hyperbolischer Geodäten in Satz 4.4.13 und der Verträglichkeit von Möbiustransformationen mit verallgemeinerten Halbkreisen (Proposition 4.4.16). □

Bemerkung 4.4.18 (Glattheit hyperbolischer Geodäten)**.** Wir können nun zeigen, dass die Charakterisierung vertikaler Geodäten (und damit aller Geodäten in (H, d_H)) auch für allgemeine metrische Geodäten (und nicht nur für glatte) gilt; insbesondere sind alle Geodäten in (H, d_H) sogar glatt:

Sei $y \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $\eta\colon [0, L] \longrightarrow H$ eine metrische Geodäte in (H, d_H) von i nach $i \cdot y$; insbeondere $L = \ln y$.

- Wir zeigen zunächst $\operatorname{Re}\eta = 0$: *Angenommen,* $\operatorname{Re}\eta \neq 0$, d.h. es gibt ein $t \in (0, L)$ mit $\operatorname{Re}(\eta(t)) \neq 0$. Nach Satz 4.4.13 gibt es eine glatte Geodäte $\gamma_1\colon [0, t] \longrightarrow H$ in (H, d_H) von i nach $\eta(t)$ und eine glatte Geodäte $\gamma_2\colon [0, L - t] \longrightarrow H$ in (H, d_H) von $\eta(t)$ nach $i \cdot y$. Sei $p\colon H \longrightarrow H$ die Projektionsabbildung aus Proposition 4.3.3. Dann folgt mit Satz 4.3.6, der vertikalen Abschätzung (Proposition 4.3.3) und der vertikalen Abstandsberechnung aus Proposition 4.3.8:

$$\begin{aligned} L &= t + L - t \\ &= d_H\big(\gamma_1(0), \gamma_1(t)\big) + d_H\big(\gamma_2(t), \gamma_2(L)\big) \\ &> d_H\big(p \circ \gamma_1(0), p \circ \gamma_1(t)\big) + d_H\big(p \circ \gamma_2(t), p \circ \gamma_2(L)\big) \\ &= \big|\ln \operatorname{Im} \gamma_1(t) - \ln \operatorname{Im} \gamma_1(0)\big| + \big|\ln \operatorname{Im} \gamma_2(L) - \ln \operatorname{Im} \gamma_2(t)\big| \\ &= \big|\ln \operatorname{Im} \eta(t) - \ln \operatorname{Im} \eta(0)\big| + \big|\ln \operatorname{Im} \eta(L) - \ln \operatorname{Im} \eta(t)\big| \\ &\geq \big|\ln \operatorname{Im} \eta(L) - \ln \operatorname{Im} \eta(0)\big| \\ &= \ln y = L, \end{aligned}$$

  was nicht sein kann.

- Nach dem vorherigen Schritt ist $\operatorname{Re}\eta = 0$. Aus der Geodätenbedingung folgt direkt, dass η injektiv ist. Wegen $\operatorname{Im}\eta(0) = 1$ und $\operatorname{Im}\eta(L) = y$

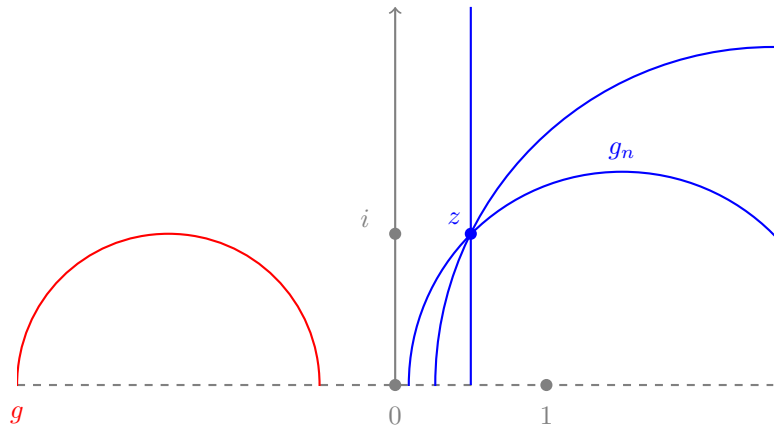


Abbildung 4.6.: Die hyperbolische Ebene erfüllt das Parallelenaxiom *nicht*

und der Tatsache, dass Geodäten stetig sind, erhalten wir mit dem Zwischenwertsatz, dass $\operatorname{Im}\eta$ streng monoton wachsend ist. Für alle $t \in (0, L)$ gilt somit

$$t - 0 = d_H\big(\eta(t), \eta(0)\big) = \ln \operatorname{Im}\eta(t) - \ln \operatorname{Im}\eta(0) = \ln \operatorname{Im}\eta(t)$$

bzw. $\eta(t) = i \cdot e^t$.

Somit gilt die Eindeutigkeit aus Proposition 4.3.8 auch für allgemeine metrische Geodäten; analog erhält man auch die allgemeine Variante von Bemerkung 4.3.9.

Bemerkung 4.4.19 (Parallelenaxiom)**.** Außerdem folgt, dass (H, d_H) die folgende Version des Parallelenaxioms *nicht* erfüllt: Zu jeder geodätischen Gerade g und zu jedem Punkt z, der nicht auf g liegt, gibt es nur eine geodätische Gerade (bis auf Umparametrisierung), die durch z geht und g nicht schneidet.

Genauer gilt: Ist $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow H$ und ist $z \in H \setminus g(\mathbb{R})$, so gibt es unendlich viele geodätische Geraden $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (H, d_H) mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $z \in g_n(\mathbb{R})$ und $g_n(\mathbb{R}) \cap g(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ ist $g_n(\mathbb{R}) \cap g_m(\mathbb{R}) = \{z\}$.

Dies lässt sich leicht anhand der Charakterisierung von hyperbolischen geodätischen Geraden in (H, d_H) (Korollar 4.4.17) einsehen (Abbildung 4.6).

4.4.5 Winkel

Im nächsten Abschnitt werden wir die gesamte Isometriegruppe von (H, d_H) bestimmen. Dazu ist es günstig, Winkel als Hilfsmittel und Invariante zur Verfügung zu haben. Wie bei der Länge von Kurven und Isometrien gibt es auch bei Winkeln in der hyperbolischen Ebene zwei Varianten – riemannsche Winkel und metrische Winkel.

Definition 4.4.20 (hyperbolischer Winkel)**.** Seien $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow H$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow H$ glatte Kurven in $\mathbb{H}^2$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. Dann definieren wir den *hyperbolischen Winkel zwischen* γ_1 *und* γ_2 durch

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle_H\big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\big) := \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\rangle_{H,\gamma_1(0)}}{\|\dot\gamma_1(0)\|_{H,\gamma_1(0)} \cdot \|\dot\gamma_2(0)\|_{H,\gamma_2(0)}} \in [0, \pi].$$

Bemerkung 4.4.21 (Winkeltreue des Halbebenenmodells)**.** Ein Vorzug des Halbebenenmodells der hyperbolischen Ebene ist, dass es winkeltreu ist: Sind γ_1 und γ_2 glatte Kurven in H mit gemeinsamem Startpunkt z, so gilt

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2),$$

da ja $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{H,z}$ durch Skalierung aus dem Standardskalarprodukt hervorgeht und somit dieselben Winkel definiert. Hyperbolische Winkel lassen sich im Halbebenenmodell also direkt als euklidische Winkel ablesen.

Wie in Ausblick 3.3.6 angedeutet können wir auch hyperbolische Winkel durch die hyperbolische Metrik ausdrücken; für uns wird die folgende, leicht vereinfachte, Version genügen:

Proposition 4.4.22 (metrische Beschreibung hyperbolischer Winkel)**.** *Seien* $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow H$, $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow H$ *Geodäten in* (H, d_H) *mit* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. *Dann gilt*

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t \to 0} \arccos\Big(1 - \frac{d_H\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)^2}{2 \cdot t^2}\Big).$$

Beweis. Aus der Charakterisierung der Geodäten in (H, d_H) (Satz 4.4.13 und Bemerkung 4.4.18) wissen wir, dass alle Geodäten in (H, d_H) glatt sind; insbesondere ist der hyperbolische Winkel tatsächlich definiert.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\gamma_1(0) = i = \gamma_2(0)$ gilt, denn: Sowohl der hyperbolische Winkel als auch der Ausdruck auf der rechten Seite sind invariant unter riemannschen Isometrien. Da die Möbiustransformationen transitiv auf H operieren (Proposition 4.4.9) können wir also den Basispunkt der beiden Kurven als i wählen.

Außerdem können wir ohne Einschränkung $\dot\gamma_1(0) \neq \dot\gamma_2(0)$ annehmen, denn: Aus der Charakterisierung der Geodäten in (H, d_H) folgt nämlich, dass sonst bereits γ_1 und γ_2 auf dem Intervall $[0, \min(L_1, L_2)]$ übereinstimmen, und in diesem Fall gilt die Behauptung offenbar.

Nach Definition des hyperbolischen Winkels und da $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{H,i} = \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ das Standardskalarprodukt ist, gilt

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle_H\big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\big) = \sphericalangle\big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\big).$$

Aus der Charakterisierung der Geodäten in (H, d_H) folgt auch $\|\dot\gamma_j(0)\|_{H,i} = \|\dot\gamma_j(0)\|_2 = 1$ für $j \in \{1, 2\}$. Also liefert die Definition der Winkel zusammen mit Polarisierung (Proposition 3.1.6), dass

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \arccos\Big(1 - \frac{1}{2} \cdot \big\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\big\|_2^2\Big).$$

Wir werden nun $\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2$ durch die hyperbolische Metrik ausdrücken. Mit der trivialen und der vertikalen Abschätzung (Proposition 4.3.2 und 4.3.3) erhalten wir: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $T \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall_{t\in[0,T]} \quad (1-\varepsilon)\cdot d_2\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \leq d_H\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \leq (1+\varepsilon)\cdot d_2\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big).$$

Mit der Beschreibung der Ableitung $\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)$ durch den Differentialquotienten folgt daher

$$\limsup_{t\to 0} \frac{d_H\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)}{t \cdot \big\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\big\|_2} \leq (1+\varepsilon) \cdot \limsup_{t\to 0} \frac{d_2\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)}{t \cdot \big\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\big\|_2} = 1 + \varepsilon$$

und analog

$$\liminf_{t\to 0} \frac{d_H\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)}{t \cdot \big\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\big\|_2} \geq 1 - \varepsilon.$$

Also ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{d_H\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)}{t} = \big\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\big\|_2.$$

Setzen wir dies in die obige Beschreibung von $\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2)$ ein, so erhalten wir mit der Stetigkeit von arccos die Behauptung. □

Korollar 4.4.23 (Isometrien der hyperbolischen Ebene sind winkeltreu). *Sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$ und seien γ_1, γ_2 Geodäten in (H, d_H) mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Dann gilt*

$$\sphericalangle_H(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2).$$

Beweis. Da f eine Isometrie ist, sind auch $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ Geodäten in (H, d_H) mit $f \circ \gamma_1(0) = f \circ \gamma_2(0)$. Mit Proposition 4.4.22 folgt dann

$$\sphericalangle_H(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2).$$ □

4.4.6 Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene

Aus der Klassifikation der hyperbolischen Geodäten und der Winkeltreue hyperbolischer Isometrien können wir nun mit etwas Geschick die gesamte Isometriegruppe von (H, d_H) bestimmen:

Satz 4.4.24 (die hyperbolische Isometriegruppe)**.** *Die Gruppe* $\mathrm{Isom}(H, d_H)$ *wird von der Menge*

$$\{f_A \mid A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})\} \cup \{z \mapsto -\overline{z}\}$$

erzeugt. Insbesondere sind alle Isometrien von (H, d_H) *bereits glatte Diffeomorphismen und riemannsche Isometrien und* $\mathrm{Isom}(H, d_H) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$.

① Nach Proposition 4.4.12 (und der Beschreibung der hyperbolischen Metrik auf der imaginären Achse) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f(i) = i$ und $f(2 \cdot i) = 2 \cdot i$ gilt.

② Da f als Isometrie geodätische Geraden auf geodätische Geraden abbildet, folgt mit der Charakterisierung vertikaler geodätischer Geraden (Bemerkung 4.3.9), dass dann bereits

$$\forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}} \quad f(i \cdot y) = i \cdot y$$

gilt.

③ Da f als Isometrie insbesondere ein Homöomorphismus $H \longrightarrow H$ ist und $H \setminus i \cdot \mathbb{R}_{>0}$ in die zwei (Weg)Zusammenhangskomponenten $P := \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ und $N := \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$ zerfällt, gilt

$$f(P) = P \qquad \text{und} \qquad f(N) = N$$

oder

$$f(P) = N \qquad \text{und} \qquad f(N) = P.$$

Indem wir im zweiten Fall die Isometrie $(z \mapsto -\overline{z})$ (Spiegelung an der imaginären Achse) anwenden, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir uns im ersten Fall befinden.

④ Wir zeigen nun, dass $f = \mathrm{id}_H$ ist: Sei $z \in H$. Ist $\mathrm{Re}\, z = 0$, so wissen wir bereits nach Schritt ②, dass $f(z) = z$ ist. Wir betrachten nun den Fall, dass $\mathrm{Re}\, z > 0$ ist (der Fall $\mathrm{Re}\, z < 0$ geht völlig analog). Aus der Charakterisierung der geodätischen Geraden in (H, d_H) durch verallgemeinerte Halbkreise (Korollar 4.4.17) folgt: Es gibt (bis auf Umparametrisierung) genau eine geodätische Gerade g in H, die durch z geht

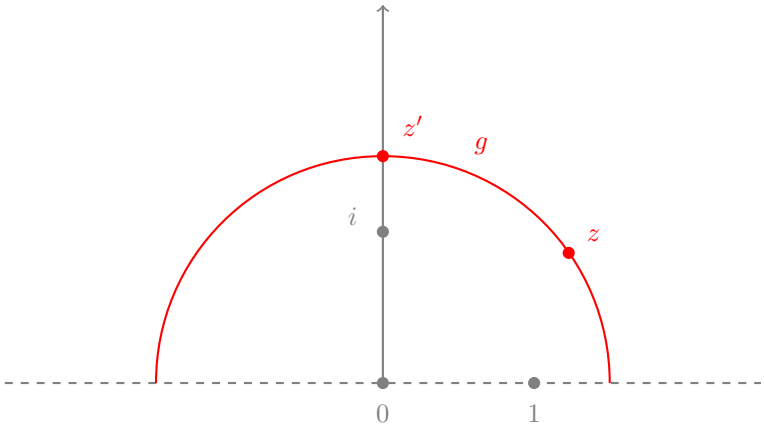


Abbildung 4.7.: Orthogonale geodätische Geraden und Isometrien

und die vertikale geodätische Gerade ($t \mapsto i \cdot e^t$) orthogonal schneidet; sei z' dieser Schnittpunkt (Abbildung 4.7).

Wir wenden nun die Isometrie f auf diese Situation an. Da f als Isometrie geodätische Geraden auf geodätische Geraden abbildet und winkeltreu ist (Korollar 4.4.23), folgt wegen $f(z') = z'$, dass $(f \circ g)(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$ ist. Außerdem liegt $f(z)$ auf $f \circ g$ und es gilt

$$d_H\big(f(z), f(z')\big) = d_H(z, z');$$

wir können $f(z')$ also finden, indem wir auf $f \circ g = g$ von $f(z') = z'$ aus die Länge $d_H\big(f(z), f(z')\big) = d_H(z, z')$ zurücklegen. Wegen $\operatorname{Re} z > 0$ ist nach Schritt ③ auch $\operatorname{Re} f(z) > 0$. Also ist $f(z) = z$.

Aus den obigen Schritten folgt, dass wir die ursprüngliche Isometrie f als Produkt von Möbiustransformationen bzw. der Spiegelung ($z \mapsto -\overline{z}$) schreiben können. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 4.4.25 (orientierungserhaltende Isometrien der hyperbolischen Ebene)**.** Analog zeigt man, dass die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von (H, d_H) zu $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ isomorph ist: Wir nennen $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$ *orientierungserhaltend*, wenn $\det T_z f > 0$ für alle $z \in H$ gilt. Sei $\mathrm{Isom}^+(H, d_H)$ die Gruppe(!) der orientierungserhaltenden Isometrien von (H, d_H). Dann zeigt der Beweis von Satz 4.4.24, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Isom}^+(H, d_H) \\ A &\longmapsto f_A \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist.

Bemerkung 4.4.26 (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms)**.** Mit den bisher entwickelten Techniken kann man zeigen, dass die Geometrie der hyperbolischen Ebene alle Hilbertschen Axiomen bis auf das Parallelenaxiom erfüllt; dazu müssen natürlich die Begriffe „Geraden“ etc. in der hyperbolischen Ebene korrekt interpretiert werden. Andererseits erfüllt die euklidische Geometrie alle Hilbertschen Axiome (inklusive Parallelenaxiom). Also ist das Parallelenaxiom von den restlichen Axiomen von Hilbert unabhängig.

4.5 Hyperbolische Dreiecke

Wir illustrieren die Eigenschaften der hyperbolischen Geometrie anhand von geodätischen Dreiecken in der hyperbolischen Ebene. Insbesondere werden wir sehen, dass sich die Geometrie der hyperbolischen Dreiecke essentiell von der Geometrie der euklidischen Dreiecke unterscheidet.

4.5.1 Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet

Im Gegensatz zu euklidischen geodätischen Dreiecken ist der Flächeninhalt hyperbolischer geodätischer Dreiecke beschränkt. Dieses Phänomen hängt eng damit zusammen, dass die Winkelsumme hyperbolischer geodätischer Dreiecke *nicht* konstant und stets kleiner als π ist.

Wir beginnen mit der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts über die riemannsche Metrik bzw. ein geeignetes Integral. Bei der Definition ist zu berücksichtigen, dass wir die Abweichung des lokalen hyperbolischen Skalarprodukts vom Standardskalarprodukt durch einen geeigneten Vorfaktor modellieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Integration von nicht-negativen Funktionen.

Definition 4.5.1 (hyperbolischer Flächeninhalt)**.** Sei $f\colon H \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Abbildung[6] Dann definieren wir das *Integral von f über $\mathbb{H}^2$* durch

$$\begin{aligned}\int_H f \ \mathrm{dvol}_H &:= \int_H f(x,y) \cdot \sqrt{\det G_{H,(x,y)}}\ d(x,y)\\ &= \int_H \frac{1}{y^2} \cdot f(x,y)\ d(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},\end{aligned}$$

wobei

$$G_{H,(x,y)} := \begin{pmatrix} g_{H,(x,y)}(e_1,e_1) & g_{H,(x,y)}(e_1,e_2) \\ g_{H,(x,y)}(e_2,e_1) & g_{H,(x,y)}(e_2,e_2) \end{pmatrix}$$

[6] D.h. messbar bezüglich der von der Topologie induzierten Borel-σ-Algebra; da die Metrik d_H die Standardtopologie auf H induziert (Bemerkung 4.3.5), entspricht diese Messbarkeit einfach der gewöhnlichen Messbarkeit auf $H \subset \mathbb{R}^2$.

und $e_1, e_2 \in T_{H,(x,y)}H = \mathbb{R}^2$ die Standardeinheitsvektoren sind.

Ist $A \subset H$ messbar, so definieren wir den *hyperbolischen Flächeninhalt von A* durch

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) := \int_H \chi_A \ \mathrm{dvol}_H \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

wobei

$$\begin{aligned} \chi_A \colon H &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ z &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in A \\ 0 & \text{falls } z \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

die charakteristische Funktion von A ist.

Wir fassen hierbei $\int_H \dots \ \mathrm{dvol}_H$ einfach als Notation auf. Tatsächlich kann man diesen Term mithilfe von Differentialformen in sinnvolle Einzelteile zerlegen und erhält dann aber letztendlich dasselbe Integral.

Proposition 4.5.2 (Isometrien sind flächentreu)**.** *Sei $A \subset H$ messbar und sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$. Dann ist $f(A)$ messbar und*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\big(f(A)\big) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A).$$

Beweis. Nach Satz 4.4.24 ist f eine riemannsche Isometrie von $\mathbb{H}^2$. Die Fächentreue folgt daher mithilfe des Transformationssatzes aus den Definitionen (Übungsaufgabe). □

Als letzte Zutat benötigen wir noch etwas Notation für geodätische Dreiecke in (H, d_H): Sei $\Delta := (\gamma_0 \colon [0, L_0] \to H, \gamma_1 \colon [0, L_1] \to H, \gamma_2 \colon [0, L_2] \to H)$ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H), dessen Bild nicht in einer Geodäten enthalten ist. Aus der Charakterisierung der Geodäten in (H, d_H) ergibt sich, dass sich $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ nur in den Endpunkten treffen und diese Geodäten somit auch ein Polygon in (H, d_H) liefern. Da H zu $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist, gilt der Jordansche Kurvensatz auch in H. Insbesondere können wir wie in Definition 3.3.9 auch das Innere Δ° und den Flächeninhalt

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) := \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta^\circ)$$

dieses Polygons definieren. Außerdem definieren die Geodäten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ drei Winkel

$$\sphericalangle_H(\gamma_2, \gamma_1^-), \qquad \sphericalangle_H(\gamma_0, \gamma_2^-), \qquad \sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_0^-)$$

wobei γ_j^- die entsprechend umgedrehte Geodäte zu γ_j bezeichnet.

Satz 4.5.3 (Satz von Gauß-Bonnet für die hyperbolische Ebene)**.** *Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit Winkeln α, β, γ und das Bild von Δ sei nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Dann gilt*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

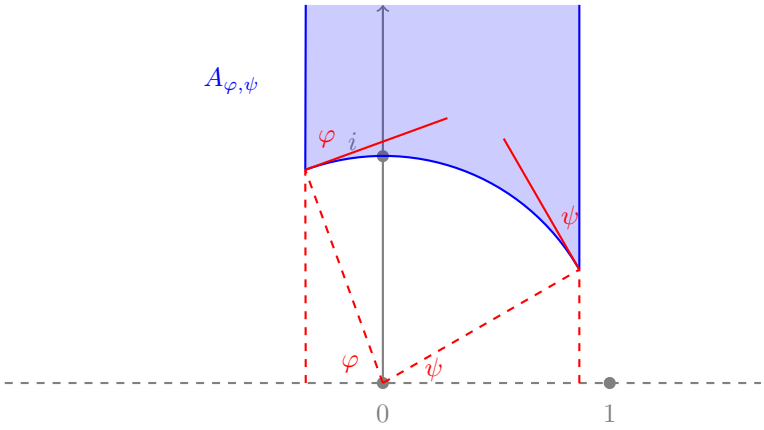


Abbildung 4.8.: Beweis des hyperbolischen Satzes von Gauß-Bonnet, eine Ecke „auf dem Rand“

Insbesondere ist die Winkelsumme in hyperbolischen geodätischen Dreiecken kleiner als π und der Flächeninhalt ist durch π nach oben beschränkt.

Beweis. Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt gewisser verallgemeinerter Dreiecke, die einen „Eckpunkt auf dem Rand der hyperbolischen Ebene“ haben, und zeigen dann, wie man daraus mit einem einfachen Zerlegungsargument den Fall geodätischer Dreiecke ableiten kann.

① Seien $\varphi, \psi \in [0, \pi]$ mit $\varphi + \psi < \pi$ und sei

$$A_{\varphi,\psi} := \left\{(x, y) \in H \;\middle|\; x \in [\cos(\pi - \varphi), \cos\psi],\ y \geq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

(Abbildung 4.8). Offenbar ist $A_{\varphi,\psi}$ eine abgeschlossene Teilmenge von H und somit messbar. Wir zeigen nun, dass

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\varphi,\psi}) = \pi - (\varphi + \psi)$$

ist: Mit der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts, dem Satz von Fubini und der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\varphi,\psi}) &= \int_H \chi_{A_{\varphi,\psi}}\ \mathrm{dvol}_H = \int_{\cos(\pi-\varphi)}^{\cos\psi} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy\, dx \\
&= \int_{\cos(\pi-\varphi)}^{\cos\psi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{\pi-\varphi}^{\psi} -1\, dt \\
&= \pi - (\varphi + \psi).
\end{aligned}$$

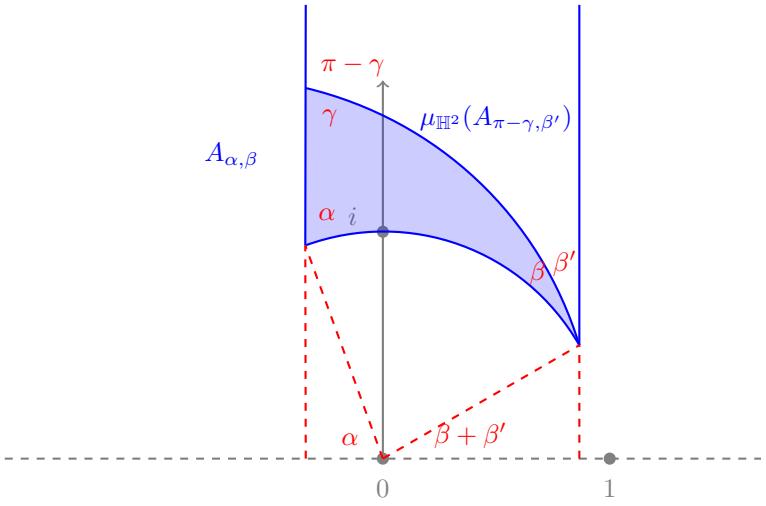


Abbildung 4.9.: Beweis des hyperbolischen Satzes von Gauß-Bonnet

② Wir kommen nun zu unserem eigentlichen geodätischen Dreieck zurück:

Mithilfe von Möbiustransformationen können wir erreichen, dass die Seite „gegenüber von β“auf einer vertikalen Geodäten liegt (Proposition 4.4.12), dass das Bild von Δ oberhalb der Geodäten „gegenüber von γ“ liegt und so dass der Halbkreis zur Geodäten „gegenüber von γ“ Radius 1 und Mittelpunkt 0 hat (horizontale Translation und diagonale Isometrie). Man beachte dabei, dass Möbiustransformationen auch winkeltreu (Korollar 4.4.23) und flächentreu (Proposition 4.5.2) sind.

Da das Halbebenenmodell winkeltreu ist (Bemerkung 4.4.21), können wir nun die wesentlichen Winkel mit euklidischen Berechnungen bestimmen. Insbesondere sehen wir zusammen mit der Charakterisierung hyperbolischer Geodäten, dass $\alpha + \beta < \pi$ ist. Somit liegt Δ° ganz in $A_{\alpha,\beta+\beta'}$ (wobei β' wie in Abbildung 4.9 gegeben ist). Zusätzlich zeigt eine diagonale Isometrie, dass der Abschluss des Komplements $A_{\alpha,\beta+\beta'} \setminus (\operatorname{im}\Delta \cup \Delta^\circ)$ zu $A_{\pi-\gamma,\beta'}$ isometrisch ist.

Also erhalten wir mit Schritt ① und Proposition 4.5.2, dass

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta^\circ) &= \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\alpha,\beta+\beta'}) - \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\pi-\gamma,\beta'}) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \beta') - \pi + (\pi - \gamma + \beta') \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

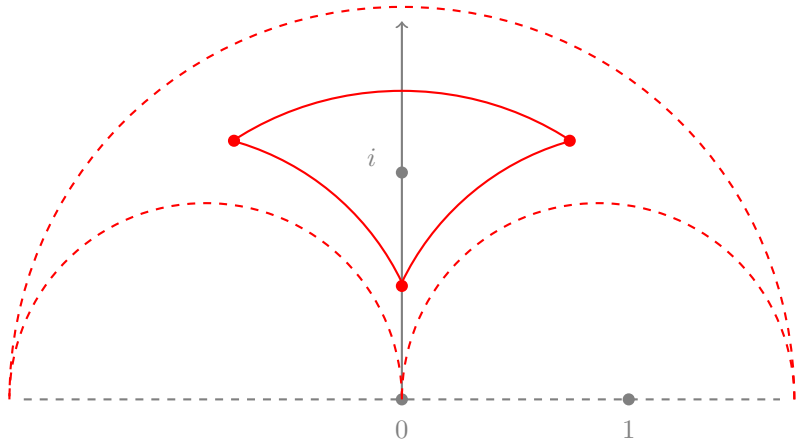


Abbildung 4.10.: Ein reguläres hyperbolisches Dreieck; rot gestrichelt: der Grenzfall für $y \to 0$

Caveat 4.5.4 (Nicht-Invarianz der Winkelsumme)**.** In der hyperbolischen Geometrie ist die Winkelsumme in geodätischen Dreiecken *keine* Invariante! (s. nachfolgendes Beispiel)

Beispiel 4.5.5 (reguläre hyperbolische Dreiecke)**.** Sei $f\colon H \longrightarrow H$ die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir die Punkte $z_0(y) := i \cdot y$ sowie $z_1(y) := f(i \cdot y)$ und $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$. Seien $\alpha_0(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ die entsprechenden Winkel des von $z_0(y), z_1(y), z_2(y)$ aufgespannten (eindeutigen!) geodätischen Dreiecks in (H, d_H).

Einfache Rechnungen zeigen nun (Übungsaufgabe):

1. Es gilt $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$.
2. Es gilt $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$.
3. Es gilt $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$.
4. Es gilt $\lim_{y\to 0} \alpha_0(y) = 0$.

Insbesondere gibt es reguläre hyperbolische Dreiecke mit unterschiedlichen Winkeln und unterschiedlichen Winkelsummen.

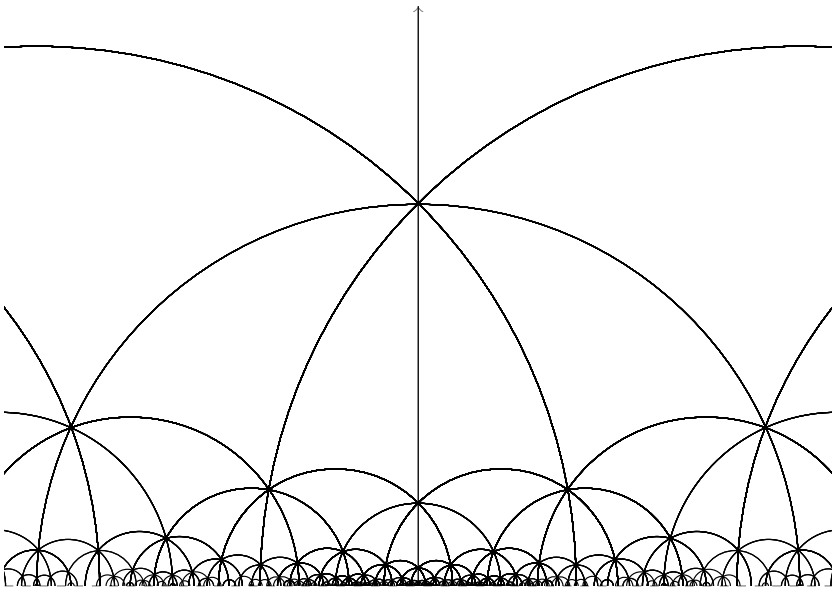


Abbildung 4.11.: Eine Pflasterung von (H, d_H) durch kongruente reguläre geodätische Dreiecke mit Innenwinkel 45°

Zum Beispiel kann man somit die hyperbolische Ebene mit kongruenten regulären Dreiecken pflastern, deren Winkel jeweils 45° (also $\pi/4$) beträgt (Abbildung 4.11).

Analog kann man auch hyperbolische reguläre n-Ecke mit beliebig kleinen Innenwinkeln konstruieren. Als Konsequenz davon erhält man, dass es viele Möglichkeiten gibt, die hyperbolische Ebene mit kongruenten hyperbolischen regulären n-Ecken zu pflastern. Besonders ansprechend sehen diese Pflasterungen im Poincaréschen Scheibenmodell aus.

Ausblick 4.5.6 (Poincaré-Scheibenmodell und reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene)**.** Die *Cayley-Transformation*

$$\begin{aligned} C\colon H &\longrightarrow E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

ist ein glatter Diffeomorphismus zwischen H und $E \subset \mathbb{C}$ (Abbildung 4.12). Überträgt man die riemannsche Metrik g_H auf H mithilfe von C auf E, so erhält man die durch

$$\frac{4 \cdot (dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$$

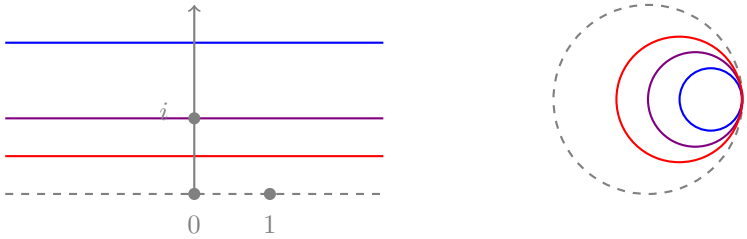
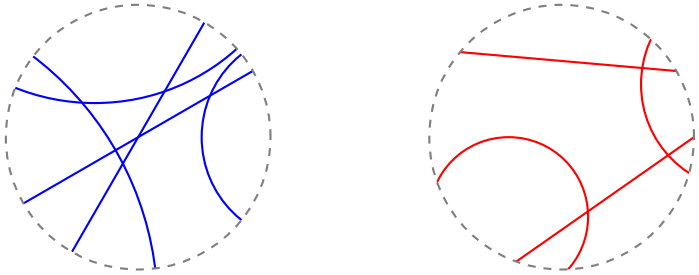


Abbildung 4.12.: Die Cayley-Transformation



geodätische Geraden *keine* geodätischen Geraden

Abbildung 4.13.: Geodätische Geraden im Poincaréschen Scheibenmodell

beschriebene riemannsche Metrik g_E auf E. Sei d_E die vom entsprechenden Längenbegriff induzierte Metrik auf E. Nach Konstruktion ist dann $C\colon H \longrightarrow E$ eine Isometrie bezüglich d_H bzw. d_E; insbesondere ist die offene Kreisscheibe E mit dieser (riemannschen) Metrik ein Modell der hyperbolischen Ebene, das sogenannte *Poincarésche Scheibenmodell*.

Welche Eigenschaften hat das Scheibenmodell?

- Da die Cayley-Transformation C winkeltreu (sowohl bezüglich g_H und g_E als auch bezüglich der euklidischen Metrik) ist, ist ebenso wie das Halbebenenmodell (Bemerkung 4.4.21) auch das Poincarésche Scheibenmodell ein winkeltreues Modell der hyperbolischen Ebene.

- Bilder geodätischer Geraden im Scheibenmodell sind genau die Durchmesser von E bzw. die Kreisbögen, die den „Rand“ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ orthogonal schneiden (Abbildung 4.13).

Beispiele für reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene finden sich in Abbildung 4.14. Eindrucksvolle Varianten von Pflasterungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Vierecke sind Eschers Holzschnitte *Cirkellimiet I* und *Cirkellimiet IV* [19]. Etwas vertrackter ist die Situation bei

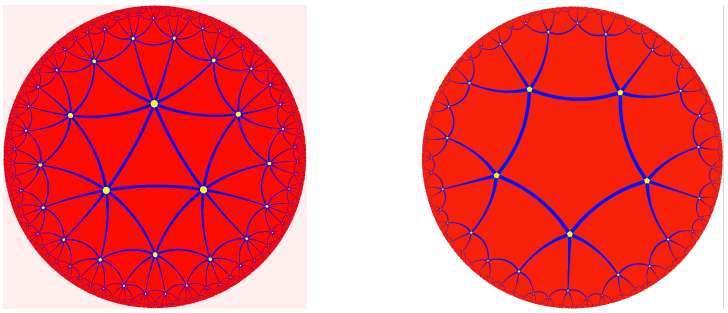


Abbildung 4.14.: Reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene (Tomruen@Wikipedia)

Eschers *Cirkellimiet III* [18] und manchen seiner Werke, die an das Halbebenenmodell erinnern.

Im Gegensatz zur euklidischen Geometrie gilt in der hyperbolischen Ebene der Kongruenzsatz WWW; dieser Satz kann zum Beispiel über einen speziellen hyperbolischen Kosinussatz und die konkrete Beschreibung der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(H, d_H)$ bewiesen werden.

Satz 4.5.7 (Kongruenzsatz WWW für hyperbolische Dreiecke)**.** *Haben zwei geodätische Dreiecke in (H, d_H) (die jeweils nicht in einer Geodäten liegen) dieselben Winkel, so sind sie bereits in (H, d_H) kongruent.*

Mithilfe der Winkelsumme können wir außerdem auch nachweisen, dass die hyperbolische und die euklidische Ebene nicht nur nicht global isometrisch sind, sondern sogar lokal nicht isometrisch sind:

Korollar 4.5.8 ($\mathbb{H}^2$ ist nicht lokal euklidisch, und umgekehrt)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset H$ nicht-leere offene Mengen. Dann gibt es* keine *Isometrie $(U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine Isometrie $f\colon (U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$. Insbesondere bildet diese Isometrie geodätische Dreiecke auf geodätische Dreiecke ab. Mit der metrischen Beschreibung der Winkel zwischen Geodäten in der euklidischen bzw. der hyperbolischen Ebene (Ausblick 3.3.6 und Proposition 4.4.22) folgt außerdem, dass f auch winkeltreu ist.

Da U nicht-leer und offen ist, enthält U ein euklidisches geodätisches Dreieck Δ, das nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist; dieses hat die Winkelsumme π (Satz 3.3.4). Das geodätische Dreieck Δ wird durch f auf ein geodätisches Dreieck Δ' in (V, d_H) abgebildet (das auch nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist). Da f winkeltreu ist, hat somit auch Δ' Winkelsumme π, im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.3).

Also gibt es *keine* solche Isometrie. $\square$

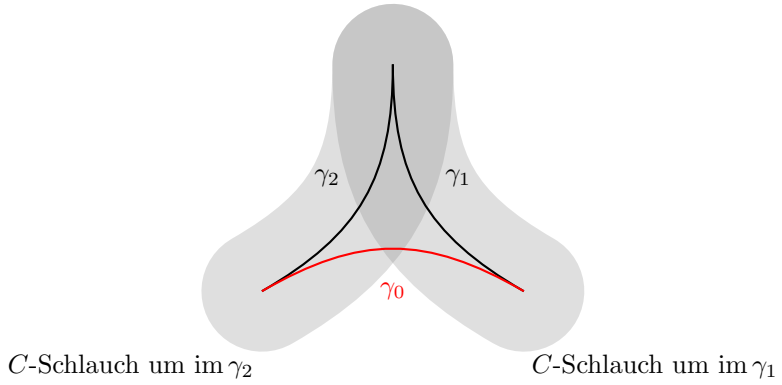


Abbildung 4.15.: Dünnheit hyperbolischer geodätischer Dreiecke (schematisch, im Scheibenmodell)

4.5.2 Hyperbolische Dreiecke sind dünn

Hyperbolische geodätische Dreiecke sind im folgenden Sinne dünn (Abbildung 4.15):

Satz 4.5.9 (Dünnheit hyperbolischer Dreiecke). *Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit: Ist $(\gamma_0\colon [0, L_0] \to H, \gamma_1\colon [0, L_1] \to H, \gamma_2\colon [0, L_2] \to H)$ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) und ist $t \in [0, L_0]$, so gibt es*

- *ein $s \in [0, L_1]$ mit $d_H\big(\gamma_0(t), \gamma_1(s)\big) \leq C$.*
- *oder ein $s \in [0, L_2]$ mit $d_H\big(\gamma_0(t), \gamma_2(s)\big) \leq C$.*

Etwas kürzer und symmetrischer lässt sich das wie folgt formulieren: Zu jedem $j \in \{0, 1, 2\}$ und $x \in \operatorname{im} \gamma_j$ gibt es ein $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$ und ein $y \in \operatorname{im} \gamma_k$ mit $d_H(x, y) \leq C$.

Man kann dies zum Beispiel durch sorgfältige Längenabschätzungen zeigen. Wir wählen einen Beweis über den Flächeninhalt, da wir bei dieser Gelegenheit auch ein anderes Phänomen der hyperbolischen Ebene illustrieren können. Als Hilfsmittel benötigen wir eine Flächeninhaltsabschätzung für hyperbolische Kreise:

Proposition 4.5.10 (Wachstum des hyperbolischen Flächeninhalts). *Für alle $r \in \mathbb{R}_{>10}$ gilt*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\big(B_i^{(H,d_H)}(r)\big) \geq e^{\frac{r}{10}} \cdot (1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Insbesondere wächst also der Flächeninhalt hyperbolischer Kreise exponentiell *in Abhängigkeit vom Radius.*

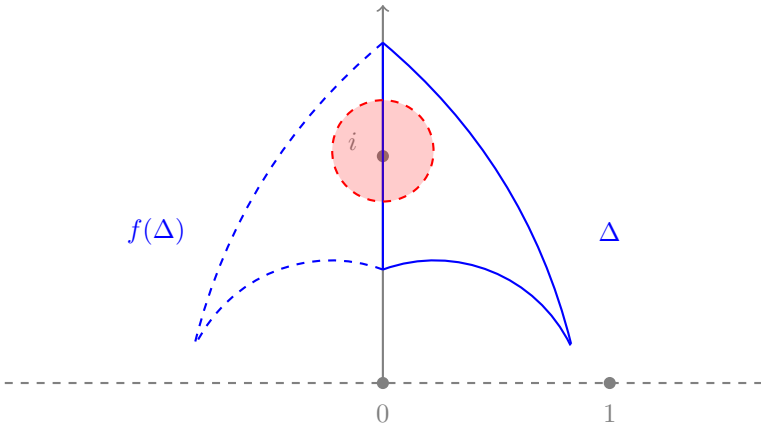


Abbildung 4.16.: Beweis der Dünnheit hyperbolischer Dreiecke

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 10}$. Einfache Abschätzungen zeigen, dass

$$Q_r := \left\{ x + i \cdot y \;\middle|\; x \in [0, e^{r/10}],\ y \in [1, e^{r/2}] \right\}$$

ganz in $B_i^{(H,d_H)}(r)$ enthalten ist. Also ist

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left(B_i^{(H,d_H)}(r)\right) \geq \mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r).$$

Aus der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts erhält man außerdem $\mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) = e^{r/10} \cdot (1 - e^{-r/2})$. (Übungsaufgabe) □

Man beachte, dass der Flächeninhalt euklidischer Kreise in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *quadratisch* in Abhängigkeit vom Radius wächst.

Beweis von Satz 4.5.9. Nach Proposition 4.5.10 über das Flächenwachstum in der hyperbolischen Ebene gibt es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left(B_i^{(H,d_H)}(C)\right) \geq 4 \cdot \pi.$$

Sei nun $\Delta := (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) und sei $x \in \operatorname{im} \gamma_0$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Bild von Δ nicht in einer Geodäten enthalten ist (denn sonst ist die Behauptung offensichtlich erfüllt). Aufgrund der Transitivität der Möbiustransformationen (Proposition 4.4.12 und eine diagonale Isometrie) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\operatorname{im} \gamma_0$ auf der imaginären Achse liegt und dass $x = i$ ist.

Angenommen, es gibt kein $y \in \operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_2$ mit $d_H(x, y) \leq C$. Dann folgt

$$B_i^{(H,d_H)}(C) \subset \Delta^\circ \cup \operatorname{im} \gamma_0 \cup f(\Delta^\circ),$$

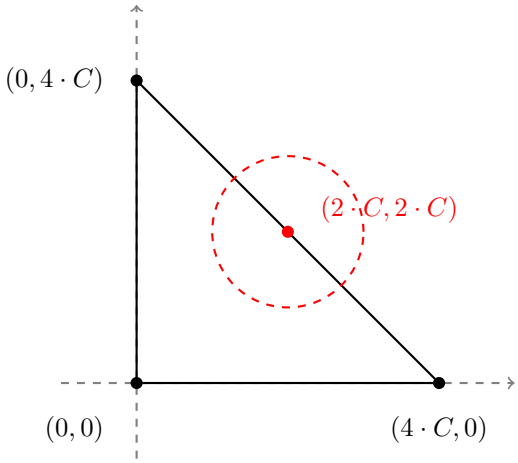


Abbildung 4.17.: In der euklidischen Ebene gibt es dicke geodätische Dreiecke

wobei $f\colon z \mapsto -\overline{z}$ die Spiegelung an der imaginären Achse bezeichnet (Abbildung 4.16). Da f als Isometrie flächentreu ist (Proposition 4.5.2), folgt mit dem Satz von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.3)

$$\begin{aligned} 4 \cdot \pi &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}\big(B_i^{(H,d_H)}(C)\big) \\ &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(\operatorname{im}\gamma_0) + \mu_{\mathbb{H}^2}\big(f(\Delta^\circ)\big) \\ &= \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + 0 + \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) \\ &< 2 \cdot \pi, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

Also gibt es ein $y \in \operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2$ mit $d_H(x, y) \leq C$. □

Bemerkung 4.5.11 (euklidische Dreiecke)**.** Die Eigenschaft aus Satz 4.5.9 steht in starkem Kontrast zur euklidischen Situation: Zu jedem $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein geodätisches Dreieck $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und einen Punkt in $\operatorname{im}\gamma_0$, der weiter als C von $\operatorname{im}\gamma_1$ und $\operatorname{im}\gamma_2$ entfernt ist. Man kann zum Beispiel das geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Ecken

$$(0, 0), \quad (4 \cdot C, 0), \quad (0, 4 \cdot C)$$

und den Punkt $(2 \cdot C, 2 \cdot C)$ auf der Geodäten von $(4 \cdot C, 0)$ nach $(0, 4 \cdot C)$ betrachten (Abbildung 4.17).

Ausblick 4.5.12 (globale negative Krümmung)**.** Wir werden in Kapitel 5.3 sehen wie man die Dünnheitseigenschaft geodätischer Dreiecke umgekehrt nut-

zen kann, um eine Definition globaler negativer Krümmung von metrischen Räumen zu formulieren.

4.6 Vergleich mit sphärischer Geometrie

Wir vergleichen nun die Situation der hyperbolischen Ebene mit der sphärischen Geometrie, d.h. mit der Geometrie von S^2. Wir werden dies nicht im Detail ausführen, sondern nur die wichtigsten Punkte kurz zusammenfassen.

Die Sphäre. Wir betrachten die zweidimensionale Sphäre

$$S^2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Mithilfe des Satzes vom regulären Wert (angewendet auf $x \mapsto \|x\|_2^2$) kann man sich leicht überlegen, dass S^2 von $\mathbb{R}^3$ eine glatte Struktur erbt und eine zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit bildet. Eine Abbildung nach S^2 ist somit genau dann glatt, wenn die Verknüpfung mit der Inklusion $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ glatt ist.

Der Bequemlichkeit halber werden wir Punkte auf S^2 oft mit „geographischen“ Bezeichnungen (wie Nordpol, Südpol, Äquator, ...) versehen.

Das Tangentialbündel der Sphäre. Eine erste technische Schwierigkeit gibt es bei der Beschreibung des Tangentialbündels von S^2, da das Tangentialbündel von S^2 im Gegensatz zum Tangentialbündel von $\mathbb{R}^2$ oder H *nicht* trivial ist. Man kann sich an dieser Stelle aber mit dem folgenden Trick retten: Ist $x \in S^2$, so kann man den Tangentialraum T_xS^2 vermöge der Inklusion $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ kanonisch mit dem zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp x\}$$

identifizieren (wobei sich „$\perp$“ auf das gewöhnliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezieht). Im folgenden werden wir immer diese Beschreibung von T_xS^2 verwenden und können Ableitungen von Abbildungen nach S^2 wie gewohnt berechnen.

Die sphärische riemannsche Metrik. Auf S^2 betrachten wir die riemannsche Metrik g_S, die durch

$$g_{S,x} := \langle \cdot\,,\cdot \rangle|_{T_xS^2 \times T_xS^2}$$

für alle $x \in S^2$ gegeben ist, wobei $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Wir schreiben $\mathbb{S}^2$ für die riemannsche Mannigfaltigkeit (S, g_S). Außerdem verwenden wir die Notation $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_{S,x}$ für $g_{S,x}$ für $x \in S^2$ und $\|\cdot\|_{S,x}$ für die davon induzierte Norm auf T_xS^2.

Länge, Metrik, Winkel, Flächeninhalt. Mithilfe der riemannschen Metrik g_S auf S^2 können wir wie im hyperbolischen Fall die Länge $L_{\mathbb{S}^2}$ glatter Kurven

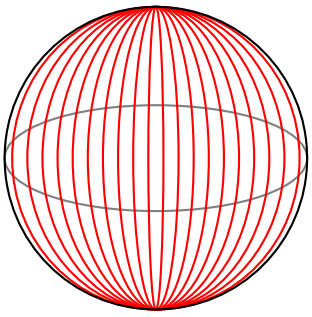


Abbildung 4.18.: Unendlich viele Geodäten zwischen Nord- und Südpol

definieren: Ist $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow S^2$ glatt, so setzt man

$$L_{\mathbb{S}^2}(\gamma) := \int_{T_0}^{T_1} \left\|\dot{\gamma}(t)\right\|_{S,\gamma(t)} dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dies liefert die Metrik(!)

$$\begin{aligned} d_S\colon S^2 \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, x') &\longmapsto \inf\left\{L_{\mathbb{S}^2}(\gamma) \;\middle|\; \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } S^2 \text{ von } x \text{ nach } x'\right\} \end{aligned}$$

auf S^2.

Außerdem kann man analog zur hyperbolischen Ebene mithilfe der riemannschen Metrik g_S *sphärische Winkel* zwischen glatten Kurven in S^2 definieren (und eine metrische Beschreibung dafür ableiten), sowie *sphärische Integrale* für messbare Funktionen $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und *sphärische Flächeninhalte* $\mu_{\mathbb{S}^2}$ für messbare Teilmengen von S^2 definieren.

Beispiel 4.6.1. Man kann zeigen, dass der Äquator die Länge $2 \cdot \pi$ hat und dass der Abstand zwischen Nord- und Südpol bezüglich d_S genau π ist. Außerdem gilt

$$\mu_{\mathbb{S}^2}(S^2) = 4 \cdot \pi.$$

Geodäten. Sorgfältige Abschätzungen zeigen wie im hyperbolischen Fall, dass Geodäten in (S^2, d_S) immer glatt sind und dass die Bilder von Geodäten in (S^2, d_S) genau die Segmente von halben Großkreisen auf S^2 sind. Ein *Großkreis auf* S^2 ist der Schnitt eines zweidimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^3$ mit S^2. Insbesondere gibt es zwischen je zwei Punkten auf S^2 mindestens eine Geodäte.

Caveat 4.6.2. Man beachte dabei, dass antipodal gegenüberliegende Punkte auf S^2 nicht durch nur eine Geodäte, sondern durch unendlich viele verschiedene Geodäten verbunden wird (Abbildung 4.18).

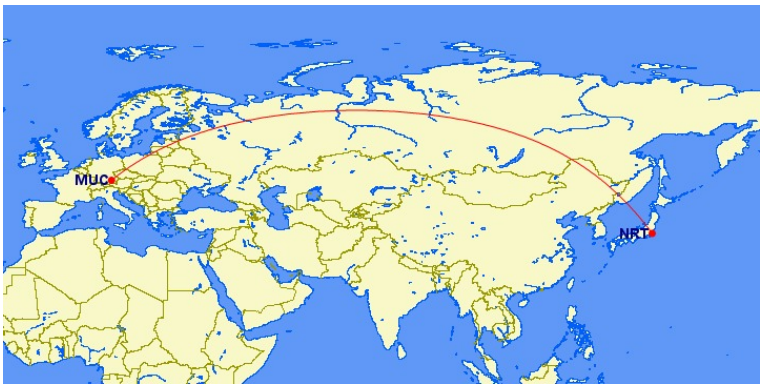


Abbildung 4.19.: Flugroute von MUC (München) nach NRT (Tokyo); http://www.gcmap.com/

In der Praxis spielt die Klassifikation von sphärischen Geodäten zum Beispiel bei der Berechnung von Flugrouten eine Rolle (Abbildung 4.19); dabei sind natürlich zusätzlich auch noch viele andere meteorologische und politische Faktoren zu beachten.

Symmetrie. Wie im hyperbolischen Fall bietet es sich an, zusammen mit den Geodäten auch die Isometriegruppe zu bestimmen. Im sphärischen Fall ist

$$\begin{aligned} O(3) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(S^2, d_S) \\ A &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus; dabei verwenden wir für $A \in O(3)$ und $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Notation $A \cdot x$ für die gewöhnliche Matrixmultiplikation. Der Stabilisator eines Punktes aus S^2 ist isomorph zu $O(2)$.

Sphärische Dreiecke. Wie im hyperbolischen Fall ist die Winkelsumme geodätischer Dreiecke in (S^2, d_S) keine Invariante, sondern hängt eng mit dem Flächeninhalt zusammen:

Satz 4.6.3 (Satz von Gauß-Bonnet für die Sphäre)**.** *Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (S^2, d_S) mit Winkeln α, β, γ und das Bild von Δ sei nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Dann gilt*

$$\mu_{\mathbb{S}^2}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Insbesondere gilt $\pi < \alpha + \beta + \gamma \leq 3 \cdot \pi$.

Bei der Definition des Flächeninhalts $\mu_{\mathbb{S}^2}(\Delta)$ ist dabei eine Komponente von $S^2 \setminus \operatorname{im} \Delta$ zu wählen, die in einer Hemisphäre von S^2 enthalten ist.

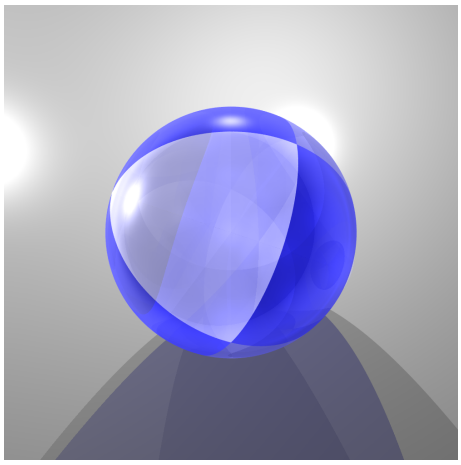


Abbildung 4.20.: Eine reguläre Pflasterung der Sphäre, basierend auf dem Oktaeder

Beispiel 4.6.4 (reguläre sphärische Dreiecke)**.**

1. Zum Beispiel erhält aus dem Nordpol und einem Vierteläquator ein reguläres geodätisches Dreieck in (S^2, d_S) mit Seitenlänge π und Winkel $\pi/2$. Die Winkelsumme ist in diesem Fall somit $3 \cdot \pi/2$.

2. Wählt man drei Punkte auf dem Äquator mit paarweisem Abstand $2 \cdot \pi/3$, so erhält man ein reguläres geodätisches Dreieck in (S^2, d_S) mit Seitenlänge $2 \cdot \pi/3$ und Winkel π. Die Winkelsumme ist in diesem Fall somit $3 \cdot \pi$.

Im Vergleich zur euklidischen Geometrie lässt sich also sagen, dass sphärische Dreiecke „dick“ sind, wohingegen hyperbolische Dreiecke „dünn“ sind.

Reguläre Pflasterungen. Die einzigen regulären Pflasterungen (bis auf Isometrie) von (S^2, d_2) sind die Pflasterungen, die den fünf platonischen Körpern entsprechen (ein Beispiel findet sich in Abbildung 4.20).

Kartographie. Insbesondere können wir analog zu Korollar 4.5.8 die Frage 2.3.6 negativ beantworten:

Satz 4.6.5 ($\mathbb{S}^2$ ist nicht lokal euklidisch, und umgekehrt)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset S^2$ nicht-leere offene Mengen. Dann gibt es keine Isometrie $(U, d_2) \longrightarrow (V, d_S)$. Insbesondere ist es* nicht *möglich, längentreue ebene Landkarten von Ausschnitten der Erdoberfläche zu zeichnen.*

In der Kartographie interessant sind zum Beispiel die Zylinderprojektion (flächentreu) und die stereographische Projektion bzw. die Mercatorprojektion (beide winkeltreu) [4], die auf großen Gebieten der Sphäre definiert sind.

Außerdem kann man mit derselben Methode über die Winkelsummen auch zeigen, dass $\mathbb{H}^2$ und $\mathbb{S}^2$ *nicht* lokal isometrisch sind. Etwas analytischer lässt sich dies als Krümmungsphänomen beschreiben:

- Die euklidische Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist ungekrümmt (man sagt auch *flach*) hat also Krümmung konstant 0.
- Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist gekrümmt mit positiver Krümmung konstant 1.
- Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ ist auch gekrümmt, aber dual zur Sphäre, also negativ gekrümmt; sie hat Krümmung konstant -1.

Man kann diese Werte der Krümmung entweder über eine geeignete Definition aus der Winkelsumme in geodätischen Dreiecken oder als analytischen Ausdruck aus der riemannschen Krümmung berechnen [4, 26].

Ausblick 4.6.6 (Satz von Gauß-Bonnet)**.** Eine spektaktuläre Zusammenfassung des Zusammenhangs zwischen Krümmung und topologischer Gestalt kompakter riemannscher Flächen liefert der Satz von Gauß-Bonnet [4, 26]: Ist (M, g) eine kompakte riemannsche zweidimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand), so gilt

$$\int_M K \operatorname{dvol}_M = \chi(M).$$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

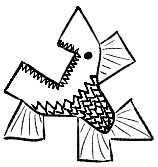
- Es ist $\int_M \dots \operatorname{dvol}_M$ das Integral „über M“.
- Es ist $K\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ die sogenannte Gauß-Krümmung von M.
- Und $\chi(M)$ ist die Euler-Charakteristik von M; trianguliert man M, so ist $\chi(M)$ die Wechselsumme aus Anzahl der Knoten, Kanten und Dreiecke dieser Triangulierung (wie im eulerschen Polyedersatz ist diese Winkelsumme unabhängig von der gewählten Triangulierung!).

Unsere Varianten des Satzes von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.3 und Satz 4.6.3) sind Spezialfälle einer noch allgemeineren Formulierung für Flächen mit Rand.

Wir fassen die wesentlichen Merkmale euklidischer, sphärischer und hyperbolischer Geometrie in Abbildung 4.21 zusammen.

	hyperbolisch	*euklidisch*	*sphärisch*
Menge	H	$\mathbb{R}^2$	S^2
Metrik	induziert von g_H	d_2	induziert von d_S
Geodäten	verallgemeinerte Halbkreise	Geraden	halbe Großkreise
Winkelsumme	$< \pi$	π	$> \pi$
Krümmung	negativ	null	positiv
Isometriegruppe	erzeugt von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ und Spiegelung	$\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$	$O(3)$
Stabilisator	$O(2)$	$O(2)$	$O(2)$
Gesamtflächeninhalt	∞	∞	$4 \cdot \pi$
reguläre Pflasterungen	unendlich viele essentiell verschiedene	im wesentlichen drei	im wesentlichen fünf

Abbildung 4.21.: Vergleich zwischen euklidischer, sphärischer und hyperbolischer Geometrie



5

Grobe Geometrie

In der groben Geometrie betrachtet man metrische Räume aus „großer Entfernung“. D.h. man untersucht Abbildungen und Eigenschaften metrischer Räume, die die lokalen Gegebenheiten ignorieren und nur die wesentlichen globalen Merkmale berücksichtigen. Über die Dünnheit geodätischer Dreiecke lässt sich so eine grobe, globale Version hyperbolischer metrischer Räume definieren.

Die grobe Geometrie hat vielfältige Anwendungen in der klassischen Geometrie von riemannschen Mannigfaltigkeiten sowie in der Graphen- und der Gruppentheorie. Wir werden im folgenden die Grundprinzipien dahinter erklären und insbesondere die Klasse der hyperbolischen Gruppen einführen, die eines der Fundamente der modernen geometrischen Gruppentheorie bilden.

Überblick über dieses Kapitel.

5.1	Was ist grobe Geometrie?	148
5.2	Quasi-Isometrie	148
5.3	Hyperbolische metrische Räume	154

Schlüsselbeispiel. hyperbolische Ebene, Cayley-Graphen

5.1 Was ist grobe Geometrie?

In der groben Geometrie betrachtet man metrische Räume aus „großer Entfernung“. D.h. man untersucht Abbildungen und Eigenschaften metrischer Räume, die die lokalen Gegebenheiten ignorieren und nur die wesentlichen globalen Merkmale berücksichtigen.

Es gibt verschiedene Arten und Aspekte der groben Geometrie; im folgenden werden wir uns auf einen kurzen Einblick in globale Krümmungsbegriffe in Quasi-Geometrie beschränken.

5.1.1 Wozu grobe Geometrie?

Die grobe Geometrie hat vielfältige Anwendungen in der klassischen Geometrie von riemannschen Mannigfaltigkeiten sowie in der Graphen- und der Gruppentheorie.

Ein wichtiger Zweig der groben Geometrie ist die *geometrische Gruppentheorie*: Mithilfe von Cayley-Graphen (Beispiel 2.1.6) kann man Gruppen als metrische Räume auffassen. Eine wichtige Beobachtung ist nun, dass zwar die lokale metrische Struktur von Cayley-Graphen einer Gruppe vom gewählten Erzeugendensystem abhängt, dass aber die grob-geometrischen Eigenschaften *nicht* vom gewählten (endlichen) Erzeugendensytem abhängen (Proposition 5.2.6)! In der geometrischen Gruppentheorie untersucht man den Zusammenhang zwischen algebraischen Eigenschaften endlich erzeugter Gruppen und ihren grob-geometrischen Eigenschaften. Dies führt zu zahlreichen Anwendungen in der Geometrie und in der Gruppentheorie.

Zum Beispiel kann man auf diese Weise sogenannte hyperbolische Gruppen definieren – also endlich erzeugte Gruppen, deren grobe Geometrie and die klassische hyperbolische Geometrie erinnert. Einer der Meilensteine der geometrischen Gruppentheorie ist Gromovs Studium dieser hyperbolischen Gruppen [22], aus dem sich ein aktives und diverses Forschungsgebiet entwickelt hat, das auch heute noch rapide wächst.

Wir werden im folgenden die Grundprinzipien dahinter erklären und die Klasse der hyperbolischen Gruppen einführen.

5.2 Quasi-Isometrie

Die Objekte der Quasi-Geometrie sind metrische Räume. Als strukturerhaltende Morphismen betrachtet man nicht isometrische Einbettungen, sondern Abbildungen, die die metrische Struktur nur „grob“ (d.h. bis auf einen

gleichmäßigen multiplikativen bzw. additiven Fehler) erhalten; statt Isometrien erhält man dann Quasi-Isometrien als Isomorphismen (d.h. quasi-isometrische Einbettungen, zu denen es eine quasi-inverse quasi-isometrische Einbettung gibt).

Definition 5.2.1 (quasi-isometrische Einbettung, Quasi-Isometrie)**.** Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume.

- Sei $C \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine *C-quasi-isometrische Einbettung* $(X, d) \longrightarrow (X', d')$ ist eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow X'$ mit

  $$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad \frac{1}{C} \cdot d(x_1, x_2) - C \leq d'\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq C \cdot d(x_1, x_2) + C.$$

  Wollen wir die genaue Konstante C unspezifiziert lassen, so sprechen wir einfach von einer *quasi-isometrischen Einbettung*.

- Abbildungen $f, g\colon X \longrightarrow X'$ haben *endlichen Abstand*, falls

  $$\sup_{x \in X} d'\big(f(x), g(x)\big) < \infty.$$

- Eine *Quasi-Isometrie* $(X, d) \longrightarrow (X', d')$ ist eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow X'$ mit folgenden Eigenschaften:
  - Die Abbildung f ist eine quasi-isometrische Einbettung.
  - Es gibt eine quasi-isometrische Einbettung $g\colon X' \longrightarrow X$ mit: Die Abbildungen $g \circ f$ und id_X haben endlichen Abstand und auch $f \circ g$ und $\mathrm{id}_{X'}$ haben endlichen Abstand, d.h.

    $$\sup_{x \in X} d\big(g \circ f(x), x\big) < \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{x' \in X'} d'\big(f \circ g(x'), x'\big) < \infty.$$

- Wir nennen (X, d) und (X', d') *quasi-isometrisch*, kurz

  $$(X, d) \sim_{\mathrm{QI}} (X', d'),$$

  wenn es eine Quasi-Isometrie von (X, d) nach (X', d') gibt.

Tatsächlich kann man Quasi-Isometrien auch als Isomorphismen in einer geeigneten (Homotopie)Kategorie metrischer Räume auffassen [27].

Caveat 5.2.2. Quasi-isometrische Einbettungen und Quasi-Isometrien sind im allgemeinen *nicht* injektiv/surjektiv und *nicht* stetig (s. folgende Beispiele)!

Um ein besseres Gefühl für diese Begriffe zu bekommen, betrachten wir ein paar grundlegende Beispiele (Abbildung 5.1):

Beispiel 5.2.3 (Quasi-Isometrie).

- Sei (X, d) ein metrischer Raum von endlichem Durchmesser, d.h.

$$\sup_{x_1, x_2 \in X} d(x_1, x_2) < \infty.$$

Ist $X \neq \emptyset$, so ist (X, d) zum Einpunktraum $(\{0\}, d_0)$ quasi-isometrisch (wobei d_0 die einzige Metrik auf $\{0\}$ ist). Ist $x_0 \in X$, so sind

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \{0\} \\ x &\longmapsto 0 \\ x_0 &\longleftarrow\!\shortmid 0 \end{aligned}$$

zueinander quasi-inverse Quasi-Isometrien.

Umgekehrt sieht man leicht, dass jeder metrische Raum (X', d') der zu $(\{0\}, d_0)$ quasi-isometrisch ist, bereits endlichen Durchmesser hat und nichtleer ist.

- Wir betrachten die Standardmetrik d auf $\mathbb{R}$ sowie auf $2 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\mathbb{R}, d) \sim_{\mathrm{QI}} (\mathbb{Z}, d) \qquad \text{und} \qquad (\mathbb{Z}, d) \sim_{\mathrm{QI}} (2 \cdot \mathbb{Z}, d),$$

denn: Die Inklusionen $2 \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ sind quasi-isometrische Einbettungen. Außerdem sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ &x \longmapsto \lfloor x \rfloor, \\ &\mathbb{Z} \longrightarrow 2 \cdot \mathbb{Z} \\ &n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \in 2 \cdot \mathbb{Z}, \\ n - 1 & \text{falls } n \notin 2 \cdot \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

quasi-isometrische Einbettungen und diese sind quasi-invers zu den entsprechenden Inklusionen; dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Man beachte dabei, dass diese Abbildungen *keine* Isometrien sind. Es gilt sogar, dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht zu $(\mathbb{Z}, d)$ isometrisch ist (denn Isometrien sind bijektiv und diese Mengen haben unterschiedliche Mächtigkeiten) und dass $(\mathbb{Z}, d)$ nicht zu $(2 \cdot \mathbb{Z}, d)$ isometrisch ist (denn der minimale Abstand zwischen verschiedenen Punkten ist unterschiedlich).

- Analog kann man zeigen, dass die Inklusion $(\mathbb{Z}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ eine Quasi-Isometrie ist. Dies gilt ebenso auch für die Metriken d_1 und d_∞.

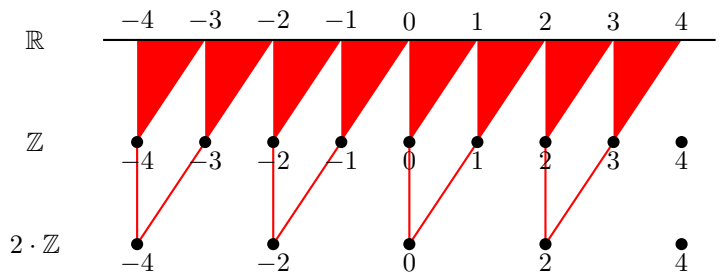


Abbildung 5.1.: Die metrischen Räume $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ und $2 \cdot \mathbb{Z}$ sind quasi-isometrisch (bezüglich der Standardmetriken).

Man beachte dabei, dass diese Beispiele der Intuition hinter der Definition von Quasi-Isometrie entsprechen: Metrische Räume mit endlichem Durchmesser sehen aus großer Entfernung aus wie ein einzelner Punkt. Betrachtet man $\mathbb{Z}$ aus großer Entfernung, so sind die „Lücken“ zwischen den Punkten nicht mehr sichtbar und man sieht nur noch die grobe Gestalt der reellen Geraden.

Bemerkung 5.2.4. Fortgeschrittenere Methoden zeigen:

- Die metrischen Räume $(\mathbb{N}, d)$ und $(\mathbb{Z}, d)$ bezüglich der Standardmetrik d sind *nicht* quasi-isometrisch (denn $(\mathbb{N}, d)$ hat nur ein „Ende“, aber $(\mathbb{Z}, d)$ hat zwei).
- Die metrischen Räume $(\mathbb{Z}, d)$ und $(\mathbb{Z}^2, d_2)$ (bzw. $(\mathbb{Z}^2, d_1)$) sind *nicht* quasi-isometrisch (denn die Anzahl der Elemente von Bällen in $(\mathbb{Z}, d)$ wächst linear im Radius, aber in $(\mathbb{Z}^2, d_2)$ wächst diese Anzahl quadratisch).
- Die metrischen Räume $(\mathbb{Z}, d)$ und $(\mathbb{Z}^2, d_2)$ sind *nicht* quasi-isometrisch zur Knotenmenge des 4-regulären Baums bezüglich der Graphenmetrik (denn die Anzahl der Elemente von Bällen im 4-regulären Ball wächst exponentiell im Radius).

Eine isometrische Einbettung metrischer Räume ist genau dann eine Isometrie, wenn sie bijektiv ist. Quasi-Isometrien können analog durch eine Quasi-Version dieser Charakterisierung beschrieben werden:

Proposition 5.2.5 (alternative Charakterisierung von Quasi-Isometrien)**.** *Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow X'$ zwischen metrischen Räumen (X, d) und (X', d') ist genau dann eine Quasi-Isometrie, wenn f eine quasi-isometrische Einbettung ist und f quasi-dichtes Bild hat. Man sagt dabei, dass f* quasi-dichtes Bild *hat, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $x' \in X'$ gibt es ein $x \in X$ mit $d'\big(f(x), x'\big) \leq C$.*

Zum Beispiel ist quasi-dichtes Bild mit Konstante 0 nichts anderes als Surjektivität.

Beweis. Sei zunächst $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Quasi-Isometrie. Dann hat f quasi-dichtes Bild, denn: Da f eine Quasi-Isometrie ist, gibt es eine quasi-isometrische Einbettung $g\colon X' \longrightarrow X$ so dass $f \circ g$ endlichen Abstand von $\mathrm{id}_{X'}$ hat. Insbesondere gibt es ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\forall_{x' \in X'} \quad d'\big(f(g(x')), x'\big) \leq C.$$

Also hat f quasi-dichtes Bild.

Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass f eine quasi-isometrische Einbettung mit quasi-dichtem Bild ist. Dann ist f eine Quasi-Isometrie, denn: Nach Voraussetzung existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\begin{aligned}
&\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad \frac{1}{C} d(x_1, x_2) - C \leq d'\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq C \cdot d(x_1, x_2) + C \\
&\forall_{x' \in X'} \quad \exists_{x \in X} \quad d'\big(f(x), x'\big) \leq C.
\end{aligned}$$

Mit dem Auswahlaxiom erhalten wir aus der zweiten Eigenschaft eine Abbildung $g\colon X' \longrightarrow X$ mit

$$\forall_{x' \in X'} \quad d'\big(f(g(x')), x'\big) \leq C.$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass f und g quasi-invers zueinander sind: Nach Konstruktion hat die Komposition $f \circ g$ endlichen Abstand von $\mathrm{id}_{X'}$. Für alle $x \in X$ gilt

$$d\big(g \circ f(x), x\big) \leq C \cdot d'\big(f(g(f(x))), f(x)\big) + C^2 \leq C \cdot C + C^2 = 2 \cdot C^2.$$

Außerdem ist g eine quasi-isometrische Einbettung: Für alle $x_1', x_2' \in X'$ gilt

$$\begin{aligned}
d\big(g(x_1'), g(x_2')\big) &\leq C \cdot d'\big(f(g(x_1')), f(g(x_2'))\big) + C^2 \\
&\leq C \cdot \big(d'\big(f(g(x_1')), x_1'\big) + d'(x_1', x_2') + d'\big(x_2', f(g(x_2'))\big)\big) + C^2 \\
&\leq C \cdot \big(C + d'(x_1', x_2') + C\big) + C^2 \\
&= C \cdot d'(x_1', x_2') + 3 \cdot C^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
d\big(g(x_1'), g(x_2')\big) &\geq \frac{1}{C} \cdot d'\big(f(g(x_1')), f(g(x_2'))\big) - 1 \\
&\geq \frac{1}{C} \cdot \big(d'(x_1', x_2') - d'\big(f(g(x_1')), x_1'\big) - d'\big(f(g(x_2')), x_2'\big)\big) - 1 \\
&= \frac{1}{C} \cdot d'(x_1', x_2') - \frac{2 \cdot C}{C} - 1.
\end{aligned}$$

Also ist f eine Quasi-Isometrie. □

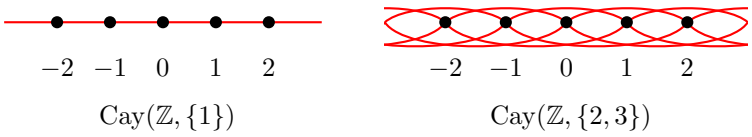


Abbildung 5.2.: Zwei nicht-isomorphe Cayley-Graphen der Gruppe $\mathbb{Z}$

Der Begriff der Quasi-Isometrie erlaubt die Formalisierung der essentiellen Beobachtung der (metrischen) geometrischen Gruppentheorie: Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und seien $S, S' \subset G$ endliche Erzeugendensysteme von G. Im allgemeinen sind dann die Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(G, S)$ und $\mathrm{Cay}(G, S')$ *nicht* isomorph (Abbildung 5.2) und somit sind $(G, d_{G,S})$ und $(G, d_{G,S'})$ *nicht* isometrisch. Diese metrischen Räume sind aber kanonisch quasi-isometrisch:

Proposition 5.2.6 (Quasi-Isometrie-Typ einer endlich erzeugten Gruppe)**.** *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und seien $S, S' \subset G$ endliche Erzeugendensysteme. Dann ist $\mathrm{id}_G \colon G \longrightarrow G$ eine Quasi-Isometrie $(G, d_{G,S}) \longrightarrow (G, d_{G,S'})$.*

Beweis. Da die Menge S endlich ist, ist auch

$$C := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{G,S'}(e, s)$$

endlich. Sind $g_1, g_2 \in G$, so gilt

$$d_{G,S'}(g_1, g_2) \leq C \cdot d_{G,S}(g_1, g_2),$$

denn: Sei $n := d_{G,S}(g_1, g_2) \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Wortmetrik $d_{G,S}$ gibt es also $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ mit

$$g_1^{-1} \cdot g_2 = s_1 \cdot \cdots \cdot s_n.$$

Da die Linkstranslationen Isometrien auf den Cayley-Graphen liefern, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
d_{G,S'}(g_1, g_2) &= d_{G,S'}(g_1, g_1 \cdot s_1 \cdot \cdots \cdot s_n) \\
&\leq d_{G,S'}(g_1, g_1 \cdot s_1) + d_{G,S'}(g_1 \cdot s_1, g_1 \cdot s_1 \cdot s_2) + \ldots \\
&\qquad + d_{G,S'}(g_1 \cdot s_1 \cdot \cdots \cdot s_{n-1}, g_1 \cdot s_1 \cdot \cdots \cdot s_n) \\
&= d_{G,S'}(e, s_1) + \cdots + d_{G,S'}(e, s_n) \\
&\leq n \cdot C \\
&\leq C \cdot d_{G,S}(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

Tauschen wir nun die Rollen von S und S', so erhalten wir eine analoge Abschätzung in die umgekehrte Richtung. Also ist id_G eine quasi-isometrische Einbettung $(G, d_{G,S}) \longrightarrow (G, d_{G,S'})$. Da id_G surjektiv ist, folgt aus Proposition 5.2.5, dass id_G eine Quasi-Isometrie $(G, d_{G,S}) \longrightarrow (G, d_{G,S'})$ ist. (Alternativ kann man verwenden, dass id_G sein eigenes Quasi-Inverses ist.) $\square$

Auf diese Weise kann man also endlich erzeugten Gruppen eine wohldefinierte „Quasi-Geometrie“ zuordnen und definieren, wann endlich erzeugte Gruppen quasi-isometrisch sind. Ein zentrales Thema der geometrischen Gruppentheorie ist es, endlich erzeugte Gruppen so weit wie möglich bis auf Quasi-Isometrie zu klassifizieren und den Zusammenhang zwischen algebraischen Eigenschaften von (endlich erzeugten) Gruppen und quasi-geometrischen Eigenschaften zu untersuchen; ein Paradebeispiel für einen solchen Zusammenhang ist Gromovs Polynomialer Wachstumssatz (Ausblick 2.4.5).

Bemerkung 5.2.7 (Gruppen von endlichem Durchmesser)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Dann kann man zeigen, dass $(G, d_{G,S})$ genau dann endlichen Durchmesser hat, wenn G endlich ist.

Wir werden uns im folgenden darauf beschränken, wie man einen Begriff negativ gekrümmter endlich erzeugter Gruppen einführen kann.

5.3 Hyperbolische metrische Räume

Wir führen nun die Klasse der Gromov-hyperbolischen metrische Räume ein:

- Diese metrischen Räume sollen die wesentlichen globalen Eigenschaften negativer Krümmung (wie zum Beispiel der hyperbolischen Ebene) aufweisen,
- und zusätzlich soll die Eigenschaft Gromov-hyperbolisch zu sein, invariant sein unter Quasi-Isometrien.

Die Definition hyperbolischer metrischer Räume beruht auf der genialen Einsicht, dass sich viele globale geometrische Eigenschaften der hyperbolischen Ebene aus der Dünnheit geodätischer Dreiecke (Satz 4.5.9, Abbildung 5.3) rekonstruieren lassen. Man ändert daher den Blickwinkel und verwendet die Dünnheit geodätischer Dreiecke als grob-geometrische *Definition* hyperbolischer metrischer Räume:

Definition 5.3.1 (hyperbolisch)**.** Sei (X, d) ein geodätischer metrischer Raum.

- Sei $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ein geodätisches Dreieck $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ heißt *δ-dünn*, wenn folgendes gilt: Für jedes $j \in \{0, 1, 2\}$ und jedes $x \in \operatorname{im} \gamma_j$ gibt es ein $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$ und ein $y \in \operatorname{im} \gamma_k$ mit $d(x, y) \leq \delta$.

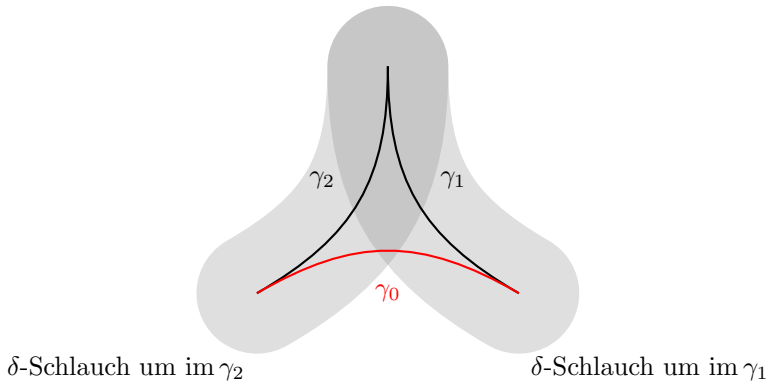


Abbildung 5.3.: Dünnes Dreieck, schematisch

- Sei $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Der metrische Raum (X, d) heißt *δ-hyperbolisch*, wenn jedes geodätische Dreieck in (X, d) bereits δ-dünn ist.
- Der metrische Raum (X, d) heißt *hyperbolisch*, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, so dass (X, d) ein δ-hyperbolischer metrischer Raum ist.

Der namensgebende Raum – die hyperbolische Ebene – ist tatsächlich hyperbolisch:

Beispiel 5.3.2 (hyperbolische Ebene)**.** Nach Satz 4.4.13 ist die hyperbolische Ebene (H, d_H) ein geodätischer metrischer Raum. Mit Satz 4.5.9 folgt somit, dass die hyperbolische Ebene (H, d_H) im Sinne der obigen Definition hyperbolisch ist.

Umgekehrt ist die euklidische Ebene natürlich *nicht* hyperbolisch im obigen Sinne:

Beispiel 5.3.3 (die euklidische Ebene)**.** Die euklidische Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist *nicht* hyperbolisch, wie wir bereits in Bemerkung 4.5.11 gesehen haben.

Caveat 5.3.4 (Räume von endlichem Durchmesser)**.** Ist (X, d) ein geodätischer metrischer Raum von endlichem Durchmesser, so ist (X, d) offenbar ein hyperbolischer metrischer Raum (als Konstante kann man zum Beispiel den Durchmesser wählen). Insbesondere ist also auch die Sphäre (S^2, d_S) ein hyperbolischer metrischer Raum – obwohl das mit den lokalen positiven Krümmungseigenschaften der Sphäre nicht verträglich zu sein scheint. Die Hyperbolizität metrischer Räume bezieht sich jedoch nur auf grobe, globale Eigenschaften, nicht auf lokale.

Wir möchten nun auch Graphen (insbesondere Cayley-Graphen!) auf Hyperbolizität untersuchen. Ist $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, so

liefert die Kantenstruktur von X eine Metrik d auf V (Beispiel 2.1.3). Ist $|V| \geq 2$, so ist der metrische Raum (V, d) jedoch *nicht* geodätisch. Wir erweitern daher diese Metrik zunächst auf die geometrische Realisierung von Graphen. Da wir im folgenden vor allem an unendlichen Graphen interessiert sein werden, müssen wir ein bisschen sorgfältiger vorgehen als bei der ersten Konstruktion der geometrischen Realisierung in Definition 1.6.1.

Proposition 5.3.5 (metrische geometrische Realisierung von Graphen). *Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann definieren wir die Menge*

$$X_{\mathbb{R}} := \{e_v \mid v \in V\} \cup \big\{\{v, w\}_{\mathbb{R}} \;\big|\; \{v, w\} \in E\big\} \subset \bigoplus_V \mathbb{R}$$

wie in Definition 1.6.1 (wobei nun auch der Fall, dass V unendlich ist, erlaubt ist). Sei $d\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die von X auf V induzierte Metrik (Beispiel 2.1.3). Dann definieren wir $d_X\colon X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wie folgt: Seien $x = t \cdot e_v + (1 - t) \cdot e_w$ und $x' = t' \cdot e_{v'} + (1 - t') \cdot e_{w'}$ mit $\{v, w\}, \{v', w'\} \in E$ und $t, t' \in [0, 1]$. Dann setzen wir[1]

$$d_X(x, x') := \begin{cases} |t - t'| & \text{falls } v = v' \text{ und } w = w' \\ \big|1 - t - t'\big| & \text{falls } v = w' \text{ und } w = v' \\ \min\big(1 - t + d(v, v') + 1 - t' & \\ \qquad , 1 - t + d(v, w') + t' & \\ \qquad , t + d(w, v') + 1 - t' & \\ \qquad , t + d(w, w') + t'\big) & \text{falls } \{v, w\} \neq \{v', w'\}. \end{cases}$$

Dann gilt:

1. *Es ist d_X wohldefiniert und $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ ist ein metrischer Raum.*

2. *Die Inklusion*

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow X_{\mathbb{R}} \\ v &\longmapsto e_v \end{aligned}$$

   ist eine isometrische Einbettung von (V, d) nach $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ mit quasi-dichtem Bild. Insbesondere ist diese Abbildung eine Quasi-Isometrie zwischen (V, d) und $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$.

3. *Der metrische Raum $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ ist geodätisch.*

Beweis. Alle Behauptungen folgen aus elementaren, aber langwierigen, Rechnungen. □

[1] Ist $E =$, so folgt $|V| =\leq 1$, da X zusammenhängend ist. In diesem Fall gilt $|X_{\mathbb{R}}| = |V| \leq 1$ und wir definieren d_X als die triviale/einzig mögliche Metrik auf $X_{\mathbb{R}}$.

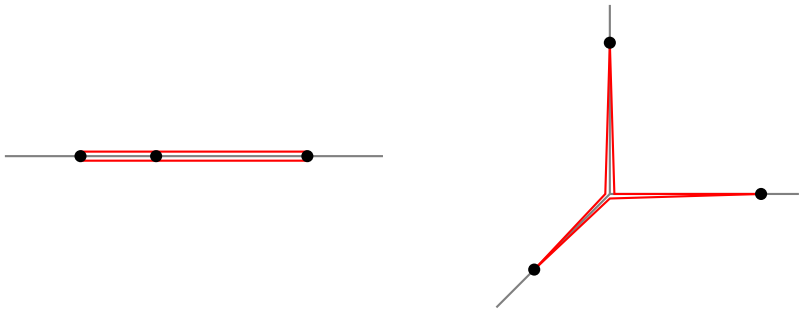


Abbildung 5.4.: Geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}, d_2)$ bzw. allgemeiner in der metrischen geometrischen Realisierung von Bäumen

Beispiel 5.3.6 (die reelle Gerade)**.** Wir betrachten den Graphen

$$X := \big(\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\}\big) = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \cdot e_n + (1-t) \cdot e_{n+1} &\longmapsto n + t \\ (\text{mit } n \in \mathbb{Z} \text{ und } t \in [0,1]) & \end{aligned}$$

eine Isometrie zwischen $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$. Man beachte außerdem, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ ein hyperbolischer metrischer Raum ist, da alle geodätischen Dreiecke in $(\mathbb{R}, d_2)$ von der Form in Abbildung 5.4 sind.

Allgemeiner kann man folgendes zeigen:

Bemerkung 5.3.7 (Bäume)**.** Sei X ein *Baum*, d.h. ein zusammenhängender Graph, der keine Kreise enthält. Dann ist $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ ein hyperbolischer metrischer Raum, da alle geodätischen Dreiecke wegen des Mangels an Kreisen bereits die Form eines Tripods haben (Abbildung 5.4). Insbesondere liefert also der 4-reguläre Baum (s. Beispiel 3.4.26) einen hyperbolischen metrischen Raum.

Wie gewünscht, ist die Eigenschaft hyperbolisch zu sein eine Quasi-Isometrie-Invariante geodätischer metrischer Räume:

Satz 5.3.8 (Quasi-Isometrie-Invarianz von Hyperbolizität)**.** *Seien (X, d) und (X', d') quasi-isometrische geodätische metrische Räume. Dann ist (X, d) genau dann hyperbolisch, wenn (X', d') hyperbolisch ist.*

Beweisskizze. Sei (X', d') hyperbolisch und sei $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Quasi-Isometrie. Wir zeigen nun, dass dann auch (X, d) hyperbolisch ist. Nach

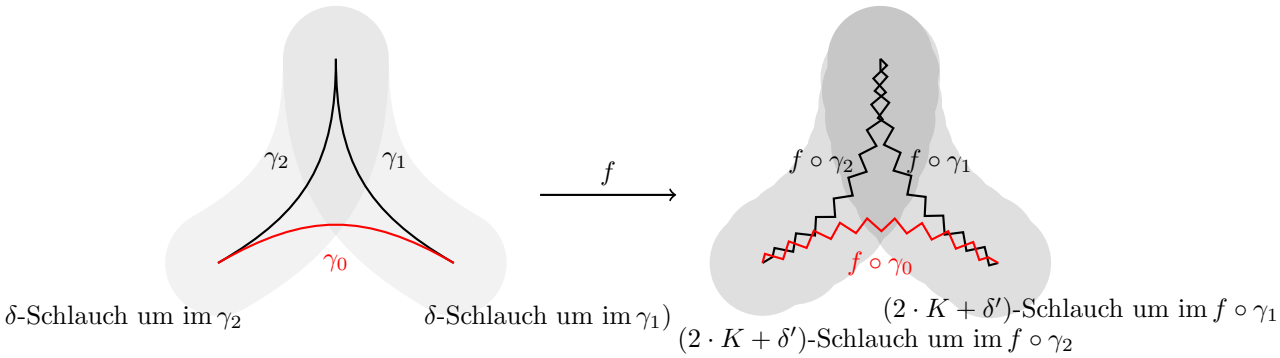


Abbildung 5.5.: Hyperbolizität ist eine Quasi-Isometrie-Invariante

Voraussetzung ist (X, d) ein geodätischer metrischer Raum, es bleibt also die Dünnheitseigenschaft für geodätische Dreiecke zu zeigen.

Seien $\delta' \in \mathbb{R}_{>0}$ und $C \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass (X, d) ein δ'-hyperbolischer Raum ist und sodass f eine C-quasi-isometrische Einbettung ist.

Sei $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein geodätisches Dreieck in (X, d). Wir transportieren Δ via f nach (X', d') und erhalten so das Tripel $\Delta' := (f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$ in (X', d') (Abbildung 5.5). An dieser Stelle ergibt sich eine Schwierigkeit: Da f nur eine quasi-isometrische Einbettung ist, sind $f \circ \gamma_0$, $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ im allgemeinen *keine* Geodäten in (X', d'), sondern nur C-Quasi-Geodäten.

In hyperbolischen metrischen Räumen kann man jedoch zeigen, dass solche C-Quasi-Geodäten K-nahe an Geodäten liegen (in allgemeinen geodätischen Räumen ist das *nicht* wahr!), wobei K nur von δ' und C abhängt. Das C-quasi-geodätische Dreieck ist also K-nahe an einem geodätischen Dreieck Δ'' in (X', d'). Da (X', d') ein δ'-hyperbolischer metrischer Raum ist, ist Δ'' ein δ'-dünnes Dreieck. Somit ist Δ' auch dünn, nämlich $(2 \cdot K + \delta')$-dünn.

Da f eine C-quasi-isometrische Einbettung ist, kann man nun nachrechnen, dass dann Δ ein δ-dünnes geodätisches Dreieck ist, wobei

$$\delta := C \cdot (2 \cdot K + \delta') + C^2.$$

Also ist (X, d) ein δ-hyperbolischer metrischer Raum. □

Insbesondere erhalten wir somit einen wohldefinierten Begriff negativ gekrümmter Gruppen:

Korollar 5.3.9 (hyperbolische Gruppen). *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, seien $S, S' \subset G$ endliche Erzeugendensysteme von G und sei $X := \mathrm{Cay}(G, S)$, $X' := \mathrm{Cay}(G, S')$. Dann ist $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ genau dann hyperbolisch, wenn $(X'_{\mathbb{R}}, d_{X'})$ hyperbolisch ist. Ist $(X_{\mathbb{R}}, d_X)$ hyperbolisch, so nennt man G eine* hyperbolische Gruppe.

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz und der Tatsache, dass Cayley-Graphen zu verschiedenen endlichen Erzeugendensystemen quasi-isometrisch sind (Proposition 5.2.6, Proposition 5.3.5). □

Beispiel 5.3.10 (hyperbolische Gruppen).

- Endliche Gruppen sind hyperbolisch, da ihre Cayley-Graphen endlichen Durchmesser haben.
- Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist hyperbolisch (Beispiel 5.3.6).
- Die sogenannte freie Gruppe vom Rang 2 ist hyperbolisch, da sie einen Cayley-Graphen besitzt, der ein 4-regulärer Baum ist.
- Die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ ist *nicht* hyperbolisch, da sie zur euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$ quasi-isometrisch ist (Beispiel 5.2.3) und $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *nicht* hyperbolisch ist (Beispiel 5.3.3). Alternativ kann man analog zu Bemerkung 4.5.11 explizit dicke Dreiecke in Cayley-Graphen von $\mathbb{Z}^2$ angeben.

Es stellt sich heraus, dass hyperbolische Gruppen viele interessante algebraische und geometrische Eigenschaften besitzen [10, 22, 27]. Wir illustrieren dies an einem einfachen Beispiel:

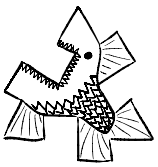
Bemerkung 5.3.11 (flache Unterräume?). Sei (X, d) ein hyperbolischer metrischer Raum. Dann kann man mithilfe von Beispiel 5.3.3 leicht nachweisen, dass es *keine* isometrische Einbettung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ nach (X, d) geben kann.

Erstaunlicherweise gilt auch das gruppentheoretische Gegenstück (dessen Beweis aber deutlich aufwendiger ist) [10, 27]:

Satz 5.3.12 (flache Untergruppen?). *Sei G eine endlich erzeugte hyperbolische Gruppe. Dann besitzt G* keine *Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}^2$ isomorph ist.*

Ausblick 5.3.13 (Flächengruppen). Sei M eine kompakte zusammenhängende zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Eine interessante topologische Invariante von M ist die sogenannte Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ (im wesentlichen beschreibt diese Gruppe, „wieviele“ verschiedene geschlossene Wege es in M gibt). In dieser Situation ist $\pi_1(M)$ eine endlich erzeugte Gruppe und diese Gruppe ist genau hyperbolisch, wenn es eine riemannsche Metrik auf M gibt, deren Schnittkrümmung überall -1 ist, d.h., wenn man diese Mannigfaltigkeit als Quotient der hyperbolischen Ebene auffassen kann.

Allgemeiner kann man zeigen, dass jede kompakte zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung eine hyperbolische Fundamentalgruppe hat. Auf diese Weise liefert die Untersuchung hyperbolischer Gruppen auch interessante Resultate für riemannsche Mannigfaltigkeiten.



A

Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1	Hilberts Axiomatik	A 2
A.2	Kategorien	A 6
A.3	Funktoren	A 9
A.4	Elementare Analysis von Sinus und Kosinus	A 12
A.5	Penrose-Puzzle	A 14
A.6	Der rote Faden	A 17

A.1 Hilberts Axiomatik

Der Vollständigkeit halber geben wir hier die Liste der Axiome aus Hilberts *Grundlagen der Geometrie* [23, 40] wieder (wobei wir nur die Erklärungen und Definitionen auswählen, die für die Formulierung der Axiome essentiell sind): Hilberts Axiomatik bezieht sich auf „drei verschiedene Systeme von Dingen“, nämlich Punkten, Geraden und Ebenen und die Beziehungen zwischen diesen Dingen.

I. Axiome der *Verknüpfung*

1. Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a; wir setzen $AB = a$ oder $BA = a$.

2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade; d.h. wenn $AB = a$ und $AC = a$, und $B \neq C$, so ist auch $BC = a$.

3. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α; wor setzen $ABC = \alpha$.

4. Irgend drei Punkte A, B, C einer Ebene α, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene α.

5. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in α.

6. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

7. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und im Raum gibt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

II. Axiome der *Anordnung*

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„zwischen“* dient.

1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

2. Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.

3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.

4. Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Geraden können stets so angeordnet werden, dass B zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner C zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt.

Definition. Das System zweier Punkte A und B, die auf einer Geraden a liegen, nennen wir eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder BA. Die Punkte zwischen A und B heissen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke AB gelegen; alle übrigen Punkte der Geraden A heissen *ausserhalb* der Strecke AB gelegen. die Punkte A, B heissen *Endpunkte* der Strecke AB.

5. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt innerhalb der Strecke AB geht, so geht sie stets entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

III. Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom)

In einer Ebene α lässt sich durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu a durch den Punkt A.

IV. Axiome der *Congruenz*

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„congruent“* dient.

1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ congruent ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst congruent, d.h. es ist stets:

$$AB \equiv AB.$$

2. Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ congruent, d.h.: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.

3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

Definition. Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen[1] in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder $\sphericalangle(k, h)$. Aus den Axiomen II 1–5 kann leicht geschlossen werden, dass die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkt O die übrigen Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug[2], der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so giebt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heisse das *Innere* des Winkels (h, k) zum Unterschiede vond em anderen Gebiete, welches das *Aeussere* des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heissen *Schenkel* des Winkels und der Punkt O heisst der *Scheitel* des Winkels.

4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf a' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann giebt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so dass der Winkel (h, k) (oder (k, h)) congruent dem Winkel (h', k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels (h', k') auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen:

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst congruent, d.h. es ist stets

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k).$$

5. Wenn ein Winkel (h, k) sowohl dem Winkel (h', k') als auch dem Winkel (h'', k'') congruent ist, so ist auch der Winkel (h', k') dem Win-

[1] Halbstrahlen werden von Hilbert über die Anordnungsaxiome definiert

[2] Ein System von Strecken AB, BC, CD, ..., KL heisst ein *Streckenzug*, der die Punkte A und L miteinander verbindet;

kel (h'', k'') congruent, d.h. wenn $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ und $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ ist, so ist auch stets $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$.

Erklärung. Es sei ein Dreieck[3] ABC vorgelegt; wir bezeichnen die beiden von A ausgehenden durch B und C laufenden Halbstrahlen mit h bzw. k. Der Winkel (h, k) heisst dann der von den Seiten AB und AC eingeschlossene oder der der Seite BC gegenüberliegenden Winkel des Dreieckes ABC; er enthält in seinem Inneren sämtliche innere Punkte des Dreieckes ABC und wird mit $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle A$ bezeichnet.

6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind auch stets die Congruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

V. Axiom der Stetigkeit (*Archimedisches* Axiom)

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man construire dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u.s.w. liegt und überdies die Strecken

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$$

einander gleich[4] sind: dann giebt es in der Reihe der Punkte A_2, A_3, $A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, dass B zwischen A und A_n liegt.

[3] D.h. ein Streckenzug AB, BC, CA

[4] Hilbert trifft dazu „zuvor eine Festsetzung über die Gleichheit zweier Strecken auf einer Geraden“, z.B. über Kongruenz von Strecken.

A.2 Kategorien

Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie [30, 9]:

Definition A.2.1 (Kategorie)**.** Eine *Kategorie* C besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eine Klasse[5] $\mathrm{Ob}(C)$; die Elemente von $\mathrm{Ob}(C)$ heißen *Objekte von* C.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Menge $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$; die Elemente von $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ heißen *Morphismen von* X *nach* Y *in* C. (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon\ \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für jedes Objekt X in C gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_C(X, X)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ bzw. $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

  (Dadurch ist id_X eindeutig bestimmt und heißt *Identitätsmorphismus von* X *in* C.)
- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte W, X, Y, Z in C und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(W, X)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}_C(Y, Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

[5] Klassen sind eine Verallgemeinerung von Mengen; so gibt es etwa die Klasse aller Mengen. Weitere Informationen zu Mengen und Klassen finden Sie in den Büchern *Mengenlehre für den Mathematiker* (U. Friedrichsdorf, A. Prestel, Vieweg, 1985) und *Set theory and the continuum problem* (R.M. Smullyan, M. Fitting, überarbeitete Auflage, Dover, 2010).

Caveat A.2.2. Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln!

Beispiel A.2.3 (leere Kategorie)**.** Die *leere Kategorie* ist die (eindeutig bestimmte) Kategorie, deren Objektklasse die leere Menge ist.

Beispiel A.2.4 (Gruppen als Kategorien)**.** Sei G eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie C_G:

- Objekte: Die Kategorie C_G besitze genau ein Objekt, etwa 0.
- Morphismen: Es sei $\mathrm{Mor}_C(0,0) := G$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(0,0) \times \mathrm{Mor}_C(0,0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(0,0) \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Beispiel A.2.5 (Mengenlehre)**.** Die Kategorie Set der Mengen besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ die Klasse(!) aller Mengen.
- Morphismen: Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Sind X, Y und Z Mengen, so sei die Verknüpfung $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Z)$ die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist X eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus id_X von X in Set.

Beispiel A.2.6 (Algebra)**.** Die Kategorie $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorräume besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})$ die Klasse aller $\mathbb{R}$-Vektorräume.
- Morphismen: Sind V und W reelle Vektorräume, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(V,W)$ die Menge aller lineare Abbildungen $V \longrightarrow W$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie Group der Gruppen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, die Kategorie Mod_R der R-Rechtsmoduln bzw. die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ der R-Linksmoduln über einem Ring R, ...

Beispiel A.2.7 (Topologie)**.** Die Kategorie Top der topologischen Räume besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ die Klasse aller topologischen Räume.
- Morphismen: Sind X und Y topologische Räume, so sei

  $$\mathrm{map}(X, Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X, Y)$$

  die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Alle Begriffe, die sich durch Objekte und (Komposition von) Morphismen ausdrücken lassen, lassen sich zu entsprechenden Begriffen in allgemeinen Kategorien verallgemeinern. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

Definition A.2.8 (Isomorphismus)**.** Sei C eine Kategorie. Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sind *isomorph in* C, wenn es Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind f und g *Isomorphismen in* C und wir schreiben $X \cong_C Y$ (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist: $X \cong Y$).

Beispiel A.2.9 (Isomorphismenbegriffe)**.**

- Objekte in Set sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.
- Objekte in Group, Ab, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, ... sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.
- Objekte in Top sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind.
- Objekte in der Simplexkategorie Δ sind genau dann isomorph, wenn sie gleich sind.

Definition A.2.10 (Automorphismengruppe)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann bildet die Menge $\mathrm{Aut}(X)$ aller Isomorphismen $X \longrightarrow X$ in C bezüglich der Komposition von Morphismen in C eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von* X *in* C.

A.3 Funktoren

Die Übersetzung zwischen mathematischen Theorien (d.h. zwischen Kategorien) erfolgt durch sogenannte Funktoren. Grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“.

Definition A.3.1 (Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung $F\colon \operatorname{Ob}(C) \longrightarrow \operatorname{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \operatorname{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Mor}_C\big(F(X), F(Y)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle $X \in \operatorname{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, X \in \operatorname{Ob}(C)$ und alle $f \in \operatorname{Mor}_C(X,Y)$, $g \in \operatorname{Mor}_C(Y,Z)$ gilt
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Beispiel A.3.2 (Identitätsfunktor)**.** Sei C eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_C\colon C \longrightarrow C$ wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung
$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}(C) &\longrightarrow \operatorname{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X. \end{aligned}$$
- Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \operatorname{Ob}(C)$ betrachten wir
$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \operatorname{Mor}_C(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Beispiel A.3.3 (Vergissfunktor)**.** Der Vergissfunktor $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung $\operatorname{Ob}(\mathsf{Top}) \longrightarrow \operatorname{Ob}(\mathsf{Set})$, die einem topologischen Raum die unterliegende Menge zuordnet.
- Auf Morphismen: Für alle topologischen Räume X, Y betrachten wir
$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y) = \operatorname{map}(X,Y) &\longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, ...

Beispiel A.3.4 (basierte Vektorräume)**.** Man kann die Mengenlehre über den folgenden Funktor $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ in die lineare Algebra übersetzen:

- Auf Objekten definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon \operatorname{Ob}(\mathsf{Set}) &\longrightarrow \operatorname{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ X &\longmapsto \bigoplus_X \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  (Wir betrachten dabei eine Menge X in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von $\bigoplus_X \mathbb{R}$.)

- Auf Morphismen definieren wir F wie folgt: Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir $F(f)\colon \bigoplus_X \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die f von der Basis X auf ganz $\bigoplus_X \mathbb{R}$ fortsetzt.

Dies liefert tatsächlich einen Funktor. Analog erhält man auch einen freien Erzeugungsfunktor $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$.

Außerdem liefern Objekte in Kategorien Funktoren, die beschreiben wie die entsprechende Kategorie aus dem Blickwinkel dieses Objekts aussieht:

Beispiel A.3.5 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \operatorname{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten (kovarianten) Funktor*. Dieser Funktor ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon \operatorname{Ob}(C) &\longrightarrow \operatorname{Ob}(\mathsf{Set}) \\ Y &\longmapsto \operatorname{Mor}_C(X, Y). \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \operatorname{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon \operatorname{Mor}_C(Y, Z) &\longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\operatorname{Mor}_C(X, Y), \operatorname{Mor}_C(X, Z)\big) \\ g &\longmapsto (f \mapsto g \circ f). \end{aligned}$$

Analog erhält man einen kontravarianten Funktor $\operatorname{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Beispiel A.3.6 (Tensorprodukt)**.** Sei R ein Ring und sei A ein Links-R-Modul. Dann erhalten wir einen Funktor $\,\cdot\, \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ wie folgt:

- Auf Objekten sei

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_R A \colon \mathsf{Mod}_R &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ M &\longmapsto M \otimes_R A. \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ sei

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_R A \colon \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(M \otimes_R A, N \otimes_R A) \\ f &\longmapsto f \otimes_R \mathrm{id}_A \,. \end{aligned}$$

Eine wesentliche Eigenschaft von Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – Isomorphie erhalten und somit ein geeignetes Konzept für Invarianten liefern:

Proposition A.3.7 (Funktoren erhalten Isomorphie)**.** *Seien C, D Kategorien, sei $F \colon C \longrightarrow D$ ein Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ ein Isomorphismus in C, so ist der übersetzte Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}_D(F(X), F(Y))$ ein Isomorphismus in D.*
2. *Insbesondere: Ist $X \cong_C Y$, so folgt $F(X) \cong_D F(Y)$. Bzw.: Ist $F(X) \ncong_D F(Y)$, so ist $X \ncong_C Y$.*

Beweis. Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil. □

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

Caveat A.3.8. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

A.4 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und π kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (Bemerkung 3.3.2).

Definition A.4.1 (Sinus, Kosinus)**.** Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Graphische Darstellung. Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von cos bzw. sin in Abbildung A.1.

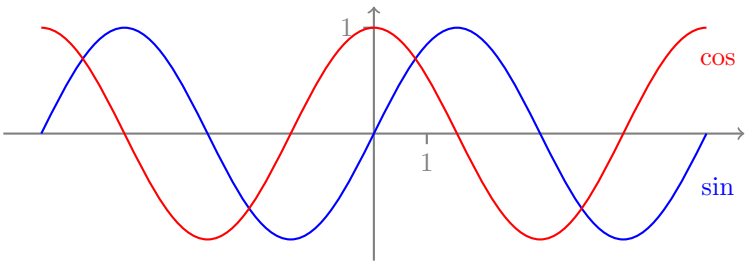


Abbildung A.1.: Graphische Darstellung von cos und sin

Symmetrie. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Differenzierbarkeit/Ableitungen. Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen cos und sin sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren!)

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Quadratsumme. Es gilt

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

denn $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$ und $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$.

Die Zahl π und ihre Hälfte. Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt; also ist cos wegen $\cos' = -\sin$ auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass $\cos(2) < 0$ ist. Also hat cos in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist $\cos(\pi/2) = 0$. Aus der Quadratsumme und der Positivität von sin auf $[0, 2]$ folgt $\sin(\pi/2) = 1$.

Additionstheoreme. Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \qquad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

Periodizität. Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x) \\ \cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) &= \sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

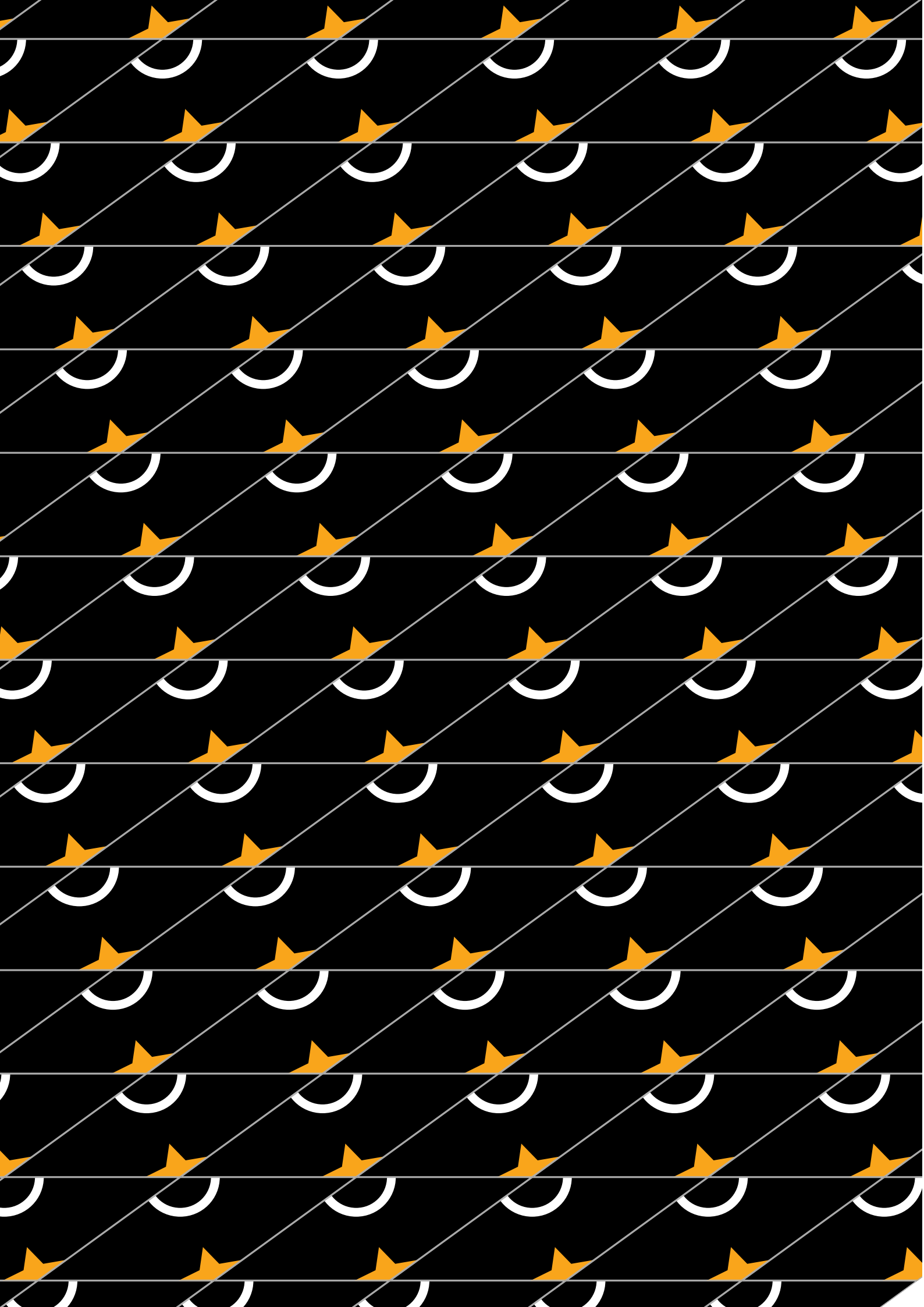
Invertierbarkeit. Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

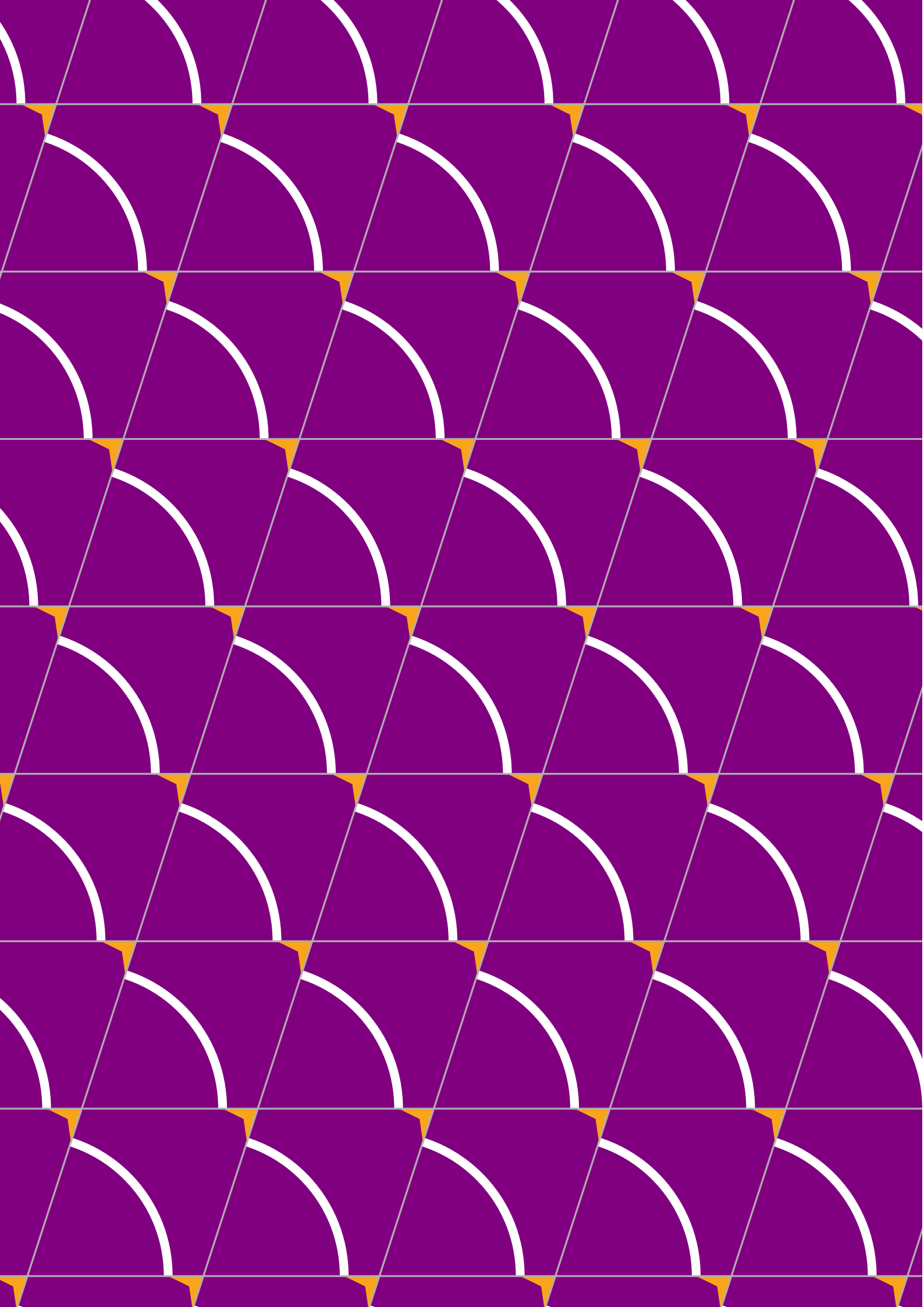
$$\begin{aligned} \cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ \sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit arccos bzw. arcsin.

A.5 Penrose-Puzzle

Aus den Vorlagen auf den folgenden beiden Seiten können leicht Teile für eine rhombische Penrose-Parkettierung gefertigt werden.





A.6 Der rote Faden

In dieser Vorlesung haben wir uns mit diversen Aspekten und Arten der Geometrie beschäftigt. Der rote Faden zeigt sich, wenn man die folgende Tabelle vervollständigt bzw. sich klar macht, an welchen Stellen Lücken bleiben (müssen).

Abschlussaufgabe (der rote Faden).

1. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man einen fairen Würfelwurf für acht Alternativen simulieren kann!

   Hinweis. Es gibt sehr viele Möglichkeiten, dies zu erreichen – versuchen Sie eine geometrische Lösung zu finden!

2. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man einen fairen Würfelwurf für fünf Alternativen simulieren kann!

   Hinweis. Es gibt sehr viele Möglichkeiten, dies zu erreichen – eine besonders schöne involviert den Ikosaeder.

3. Würfeln Sie Ihre beiden „Würfel“ und machen Sie sich Gedanken über das durch diese Koordinaten gegebene Feld in der untenstehenden Tabelle.

Was ist/kann Geometrie?	Mini-Geometrie	metrische Geometrie	euklidische Geometrie	riemannsche Geometrie	grobe Geometrie
Punkte					
Geraden					
Dreiecke					
Längen					
Winkel					
Flächeninhalte					
Krümmung					
Symmetrie					

B

Übungsblätter

Geometrie (Lehramt Gymnasium) im SS 2016
Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser April 2016

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/geometrie_ss16

https://elearning.uni-regensburg.de

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils dienstags (8:30–10:00, ohne Pause; H 32) und freitags (12:15–14:00, mit Pause; H 31) statt.

Es wird ein (Kurz)Skript zur Vorlesung geben, das eine Übersicht über die wichtigsten Themen der Vorlesung enthält. Dieses Skript wird jeweils auf den obigen Homepages aktualisiert. Beachten Sie bitte, dass dieses Kurzskript keineswegs geeignet ist, den Besuch der Vorlesung oder der Übungen zu ersetzen!

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich freitags spätestens um 12:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Freitag eine Woche später um 12:00 Uhr in die entsprechenden Briefkästen in der Mathematik abzugeben.

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte) und herausforderndere Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte).

Sie dürfen (und sollen) die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden (andernfalls werden die Punkte aberkannt). Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen an der Tafel zu präsentieren (andernfalls werden die Punkte aberkannt).

Die Übungen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen wird das Einführungsblatt, Blatt 0, besprochen.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS:

https://elearning.uni-regensburg.de

Sie können sich bis Mittwoch, den 13. April 2016, um 10:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Falls Sie noch keine Kennung des Rechenzentrums haben, wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser.

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird am Donnerstag, den 14. April 2016, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zur Einteilung der Übungsgruppen wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser (daniel.fauser@ur.de, Sprechstunde während der Vorlesungszeit: dienstags, 13:30–14:00).

Leistungsnachweise. Diese Vorlesung kann nur im vertieften Lehramtsstudiengang Mathematik eingebracht werden, im Modul LGyGeo (unbenotet: 7 ECTS, benotet: zusätzlich 2 ECTS).

- *unbenotet*: Regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen, mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen. Falls Sie nach dem aktuellen Modulkatalog (ab WS 15/16) studieren: zusätzlich Bestehen der Klausur.
- *benotet*: Zweistündige Klausur (s.u.). Die Note der Modulteilprüfung ergibt sich aus der Note der Klausur.

Klausur. Die Klausur findet am Mittwoch, den 27. Juli 2016, von 9:00 bis 11:00 Uhr, statt. Die Wiederholungsklausur ist voraussichtlich am Ende der Semesterferien; der genaue Termin wird so bald wie möglich bekanntgegeben.

Hinreichend für die Klausurzulassung ist die regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen (einmal zufriedenstellend vorrechnen und mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte aus den Übungen).

Sie müssen sich in FlexNow für die Vorlesung/Übungen und die Klausur anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig. Wir werden rechtzeitig Einträge in FlexNow vorbereiten. Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/studierende-und-studienanfaenger/index.html

Hinweise für Wiederholer. Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester die Klausurzulassung erhalten haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können mit dieser Zulassung auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Kurzskript). Außerdem kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Für den Drittversuch besteht alternativ zur Klausur auch wahlweise die Möglichkeit, die Prüfung als mündliche Prüfung abzulegen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Daniel Fauser mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser (Büro M 205; Sprechstunde während der Vorlesungszeit: dienstags, 13:30–14:00):

  daniel.fauser@ur.de

- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder an Daniel Fauser.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Daniel Fauser oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung oder das zuständige Prüfungsamt:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/ansprechpersonen/index.html

Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

http://www-cgi.uni-regensburg.de/Studentisches/FS_MathePhysik/cmsms/

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 0 vom 15. April 2016

Aufgabe 1 (Unabhängigkeit)**.** Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel (u, v, w, x) von Punkten, wobei die Punkte u, v, die Punkte v, w, die Punkte w, x und die Punkte x, u je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist (u, v, w, x) ein Viereck in Mini-Geometrie, so ist (u, v, w) ein Dreieck in Mini-Geometrie.
2. Ist (x, y, z) ein Dreieck in Mini-Geometrie, so ist (x, y, z, z) ein Viereck in Mini-Geometrie.

Aufgabe 2 (endliche Mini-Geometrie-Modelle)**.** Ein Modell $(P, G, \sqsubset)$ von Mini-Geometrie ist *endlich*, wenn die Menge P endlich ist.

1. Zeigen Sie: Ist $(P, G, \sqsubset)$ ein endliches Modell für Mini-Geometrie, so ist auch G eine endliche Menge.
2. Gilt auch die Umkehrung? D.h. ist jedes Modell $(P, G, \sqsubset)$ von Mini-Geometrie mit endlicher Menge G bereits endlich?

Aufgabe 3 (kleine Mini-Geometrien)**.**

Behauptung. Bis auf Isomorphie von Mini-Geometrien gibt es höchstens ein Mini-Geometrie-Modell $(P, G, \sqsubset)$ mit $|P| = 4$ und $|G| = 2$.

Beweis. Seien $M = (P, G, \sqsubset)$ und $M' = (P', G', \sqsubset')$ Modelle von Mini-Geometrie mit $|P| = 4 = |P'|$ und $|G| = 2 = |G'|$. Dann gibt es also Bijektionen $f\colon P \longrightarrow P'$ und $F\colon G \longrightarrow G'$. Seien $f'\colon P' \longrightarrow P$ und $F'\colon G' \longrightarrow G$ die inversen Bijektionen. Dann sind $(f, F)\colon M \longrightarrow M'$ und $(f', F')\colon M' \longrightarrow M$ zueinander inverse Isomorphismen von Mini-Geometrien. $\square$

Gibt es an dem obigen Beweis etwas auszusetzen? Ist die behauptete Aussage überhaupt wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Gradsummen)**.**

1. Sei $X = (V, E)$ ein Graph. Ist $v \in V$, so nennen wir
$$\deg v := \bigl|\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}\bigr| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$
den *Grad von v (in X)*. Zeigen Sie: Ist (V, E) ein Graph mit endlich vielen Knoten, so gilt
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|.$$
2. Folgern Sie: Die Anzahl der Menschen, die heute einer ungeraden Anzahl von Menschen die Hand geschüttelt haben, ist gerade.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Die Schule von Athen)**.**

1. Woher kennen Sie dieses Bild?
2. Wo sind auf diesem Bild Platon, Aristoteles, Pythagoras und Euklid dargestellt?
3. Warum ist Hilbert (der Mathematiker mit Hut) nicht abgebildet?

---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 15. April 2016

Aufgabe 1 (Unabhängigkeit)**.** Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel (u, v, w, x) von Punkten, wobei die Punkte u, v, die Punkte v, w, die Punkte w, x und die Punkte x, u je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ein Viereck ist *nicht-entartet*, wenn alle vier Eckpunkte verschieden sind. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

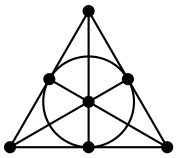
1. Sind (u, v, w) und (u, w, z) Dreiecke in Mini-Geometrie, so ist (u, v, w, z) ein Viereck in Mini-Geometrie.
2. Ist (u, v, w, x) ein nicht-entartetes Viereck in Mini-Geometrie, so ist die eindeutige Gerade durch u und v parallel zu der eindeutigen Gerade, auf der die Punkte w und x liegen.

Aufgabe 2 (Modelle über $\mathbb{F}_2$)**.**

1. Zeichnen Sie $A(\mathbb{F}_2)$ und $A(\mathbb{F}_2^3)$ und erklären Sie Ihre Bilder.
2. Sei (V, E) ein Graph mit $V \neq \emptyset$. Gibt es dann einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum W mit $A(W) \cong_{\mathsf{MG}} (V, E, \in)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Die Fano-Ebene)**.**

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $P(K)$ tatsächlich ein Modell für Mini-Geometrie ist.
2. Sei K ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte und Geraden in der Mini-Geometrie $P(K)$.
3. Wie kann man untenstehendes Bild als Skizze von $P(\mathbb{F}_2)$ verstehen? Beschriften Sie insbesondere alle Punkte und Geraden geeignet!



Aufgabe 4 (Übungsaufgaben)**.** Eine Gruppe von 17 Studenten bearbeitet drei Übungsaufgaben. Je zwei Studenten diskutieren eine dieser drei Aufgaben. Zeigen Sie, dass es dann drei Studenten und eine Aufgabe A gibt, so dass je zwei dieser drei Studenten über A diskutiert haben.
Hinweis. Verwenden Sie ein geeignetes Schubfachargument und Mini-Ramsey.

Bonusaufgabe (Isomorphie linearer Mini-Geometrien)**.** Sei K ein Körper und seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $A(K^n) \cong_{\mathsf{MG}} A(K^m)$. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ gilt.

Abgabe bis zum 22. April 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 22. April 2016

Aufgabe 1 (Heiratsbedingung)**.** Erfüllen die unten angegebenen Abbildungen $\{1,\dots,4\} \longrightarrow P(\{1,\dots,6\})$ die Heiratsbedingung? Begründen Sie Ihre Antwort!

1.
$$\begin{aligned} \{1,\dots,4\} &\longrightarrow P\bigl(\{1,\dots,6\}\bigr) \\ 1 &\longmapsto \{1,2,5,6\} \\ 2 &\longmapsto \{3,4\} \\ 3 &\longmapsto \{3,4\} \\ 4 &\longmapsto \{3,4\} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \{1,\dots,4\} &\longrightarrow P\bigl(\{1,\dots,6\}\bigr) \\ 1 &\longmapsto \{2,3,4\} \\ 2 &\longmapsto \{1,2\} \\ 3 &\longmapsto \{1,4\} \\ 4 &\longmapsto \{3\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (L-Tromino-Spiel)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem 2015×2015-Schachbrett, bei dem das zentrale Feld (also das 1008-te Feld in der 1008-ten Zeile) fehlt:

- Zu Beginn ist das Spielbrett leer.
- Ein Zug besteht darin, einen Stein der Form (sog. *L-Tromino*) so auf drei Schachbrett-Felder zu setzen, dass er sich mit keinem anderen Stein überlappt; der Stein darf dabei auch gedreht werden:

- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Stein setzen kann, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.
Hinweis. Verwenden Sie eine geeignete Symmetrie!

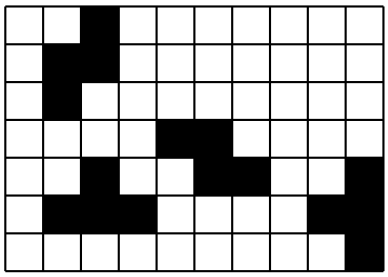
Aufgabe 3 (SET)**.**

1. Wieviele Geraden gibt es in der Mini-Geometrie $A(\mathbb{F}_3^4)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. In wievielen SETs ist Ihre Lieblings-SET-Karte enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Nutzen Sie geeignete Symmetrien und achten Sie darauf, dass Sie nichts mehrfach zählen.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Zug für Zug)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf dem untenstehenden Spielbrett:



- Spieler A beginnt und setzt eine Spielfigur auf ein freies (in obiger Abbildung weiß) Feld seiner Wahl. Danach macht Spieler B den ersten normalen Zug.
- Ein Zug besteht darin, diese Figur auf ein horizontal oder vertikal benachbartes Feld zu setzen, das die Figur bisher noch *nicht* besucht hat. Insbesondere ziehen beide Spieler mit derselben Figur!
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Modellieren Sie das Spielbrett durch einen geeigneten Graphen (eine Skizze genügt).
2. Geben Sie ein perfektes Matching für Ihren Graphen an (eine Skizze genügt).
3. Erklären Sie, warum dieses perfekte Matching zu einer Gewinnstrategie für Spieler B führt.

Bonusaufgabe (Mathematik-Wettbewerbe)**.**

1. Aus wievielen Runden besteht der *Bundeswettbewerb Mathematik*? Wie laufen diese Runden ab?
2. Wie sieht das Auswahlverfahren der deutschen Mannschaft für die *Internationale Mathematik-Olympiade* aus?

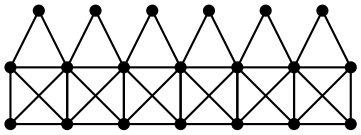
Abgabe bis zum 29. April 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

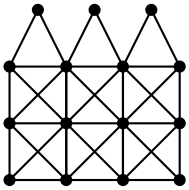
Prof. Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 29. April 2016

Aufgabe 1 (die Villa des Nikolaus)**.** Die untenstehenden Skizzen von Graphen spezifizieren jeweils, wieviele Knoten es gibt und welche Knoten durch Kanten verbunden sind. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das sechsfache Nikolaushaus (siehe unten) ist planar.



2. Das dreifache Nikolaushochhaus (siehe unten) ist planar.



Aufgabe 2 (Sechsfarbensatz)**.** Beweisen Sie den Sechsfarbensatz: Für jeden endlichen planaren Graphen (V, E) gibt es eine Abbildung $c\colon V \longrightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit

$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

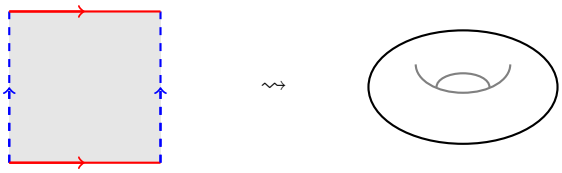
Hinweis. Gehen Sie induktiv vor und betrachten Sie Knoten von niedrigem Grad.

Aufgabe 3 (Fünf Provinzen)**.** König Quintrix herrscht über ein Reich, bestehend aus fünf zusammenhängenden Provinzen, wobei je zwei dieser Provinzen eine gemeinsame Grenze besitzen.

1. Kann sich das Reich von Quintrix auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planeten befinden? Oder auf einer Scheibe?

2. Kann sich das Reich von Quintrix auf der Oberfläche eine Torus-Planeten befinden?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
Hinweis. Den Torus erhält man durch folgende Verklebung der Seiten eines Quadrats; es kann hilfreich sein, Skizzen in dieser Quadratansicht zu erstellen.



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Einbettbarkeit in $\mathbb{R}^3$)**.** Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph in $\mathbb{R}^3$ (sogar mit geraden Kanten!) eingebettet werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

die sogenannte *Momentenkurve*.

1. Skizzieren Sie die Momentenkurve in $\mathbb{R}^3$.
2. Seien $t_1, \ldots, t_4 \in \mathbb{R}$ und sei

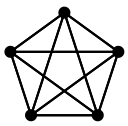
$$M(t_1, \ldots, t_4) := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie: Sind die vier Zahlen $t_1, \ldots, t_4$ alle verschieden, so ist

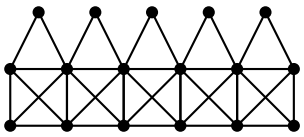
$$\det M(t_1, \ldots, t_4) \neq 0.$$

3. Schließen Sie daraus: Sind $t_1, \ldots, t_4 \in \mathbb{R}$ vier verschiedene Zahlen, so liegen die Punkte $\mu(t_1), \ldots, \mu(t_4)$ *nicht* in einer gemeinsamen Ebene in $\mathbb{R}^3$.
4. Folgern Sie: Indem man die Knoten auf die Momentenkurve abbildet und diese Punkte dann durch den Kanten entsprechenden Strecken verbindet, erhält man für jeden endlichen Graphen eine Einbettung nach $\mathbb{R}^3$.

Bonusaufgabe (Makros)**.** Schreiben Sie ein LaTeX-Makro \completegraph und ein LaTeX-Makro \nikolaus, so dass \completegraph{n} bzw. \nikolaus{n} für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ den vollständigen Graphen K_n bzw. das n-fach iterierte Nikolaushaus zeichnet:



\completegraph{5}



\nikolaus{5}

Erklären Sie auch die Funktionsweise Ihrer Makros.
Hinweis. Es könnte sich anbieten, das LaTeX-Paket tikz zu verwenden.

Abgabe bis zum 6. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 6. Mai 2016

Aufgabe 1 (Geodäten)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ eine stetige Kurve mit $L(\gamma) = 1$, so ist γ eine Geodäte.
2. Sind $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow X$ Geodäten mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$, so ist auch

$$\begin{aligned} [0,2] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [0,1] \\ \gamma_2(t-1) & \text{falls } t \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

   eine Geodäte.

Aufgabe 2 (Maximumsmetrik)**.** Wir betrachten die Maximumsmetrik d_∞ auf der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

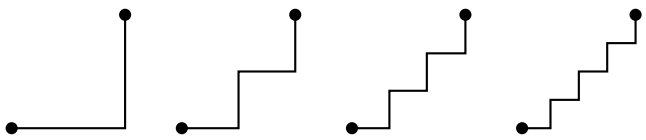
1. Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ eindeutig geodätisch?
2. Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_\infty)$ geodätisch?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 ($\sqrt{2} = 2$?!)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Erklären Sie genau, worin der Fehler besteht und welche Schritte korrekt sind.

Behauptung. Es gilt $\sqrt{2} = 2$.

Beweis. Wir betrachten die folgenden stetigen Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\gamma_n\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Treppenkurve mit n Stufen mit Stufentiefe und Stufenhöhe $1/n$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$, mit der offensichtlichen gleichmäßigen Parametrisierung:



γ_1 γ_2 γ_3 γ_4

Dann konvergiert die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto 1/2 \cdot (t,t). \end{aligned}$$

Also ist

$$L(\gamma) = L\bigl(\lim_{n\to\infty} \gamma_n\bigr) = \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) = 2.$$

Andererseits ist natürlich $L(\gamma) = \sqrt{2}$. Somit folgt $\sqrt{2} = 2$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (die unendliche Diedergruppe)**.** Wir betrachten auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die Standardmetrik d_2 und definieren die *unendliche Diedergruppe* $D_\infty := \mathrm{Isom}(\mathbb{Z}, d_2)$.

1. Zeigen Sie, dass $\{s, t\}$ ein Erzeugendensystem von D_∞ ist, wobei

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x+1, \\ t\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{s, t\})$.

2. Zeigen Sie, dass $\{t, t'\}$ ein Erzeugendensystem von D_∞ ist, wobei t wie oben definiert ist und

$$\begin{aligned} t'\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 1-x. \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{t, t'\})$.

Bonusaufgabe (geodätische Strahlen in Gruppen)**.** Sei G eine unendliche Gruppe, die ein endliches Erzeugendensystem S besitzt. Zeigen Sie, dass es dann eine isometrische Einbettung $\mathbb{N} \longrightarrow G$ gibt, wobei wir G mit der Wortmetrik $d_{G,S}$ bezüglich S und $\mathbb{N}$ mit der Standardmetrik versehen.
Hinweis. Als erstes könnte man sich überlegen, warum man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geodätische Einbettung $\{0, \ldots, n\} \longrightarrow G$ finden kann. Warum hilft das? Warum ist es so wichtig, dass S endlich ist?

Abgabe bis zum 13. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 13. Mai 2016

Aufgabe 1 (Taxi-Kongruenzsätze)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

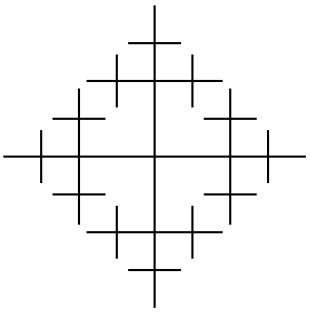
1. In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ gilt der Kongruenzsatz SSS: Sind $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ und $(\gamma_0', \gamma_1', \gamma_2')$ geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ und gilt
$$L(\gamma_0) = L(\gamma_0'), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma_1'), \quad L(\gamma_2) = L(\gamma_2'),$$
so sind die die Mengen $\operatorname{im}\gamma_0 \cup \operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2$ und $\operatorname{im}\gamma_0' \cup \operatorname{im}\gamma_1' \cup \operatorname{im}\gamma_2'$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ kongruent.

2. In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ sind Sphären von gleichem Radius kongruent: Ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sind $x, x' \in \mathbb{R}^2$, so sind die Sphären $S_x^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ und $S_{x'}^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ kongruent.

Aufgabe 2 (goldenes Schnittchen)**.** Konstruieren Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit
$$d_2(x, y) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$
mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.

Aufgabe 3 (Baumwachstum)**.** Wir betrachten den 4-*regulären Baum* T_4, d.h. den Graphen mit Knotenmenge $V := \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0\} \times \{0, \dots, 3\} \times \{1, 2, 3\}^n$ und der Kantenmenge
$$E := \bigl\{\{0, (0,0)\}\bigr\} \cup \bigl\{\{v, va\} \bigm| v \in V, a \in \{1, 2, 3\}\bigr\}.$$
Dabei steht va für das Tupel, das man erhält, wenn man a hinten an v anhängt. Sei d die von T_4 auf V induzierte Metrik.

1. Erklären Sie, wie man das untenstehende Bild als Skizze von T_4 auffassen kann, indem Sie die Knoten geeignet beschriften.



2. Bestimmen Sie für den Knoten 0 und alle $r \in \mathbb{N}$ das „Volumen“ $\bigl|B_0^{(V,d)}(r)\bigr|$.

- *Bonusaufgabe (2 Punkte).* Zeigen Sie, dass $\operatorname{Isom}(V, d_4)$ überabzählbar ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Polyduell)**.** In der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$ treffen sich 2015 Personen zu einem Polyduell. Gemäß alter Tradition stellen sie sich so auf, dass die Abstände zwischen je zwei Personen alle verschieden sind. Pünktlich zum offiziellen Startsignal erschießt jeder denjenigen, der ihm am nächsten ist (bezüglich d_2).

1. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Teilnehmer überlebt.

   Hinweis. Extremalprinzip!

2. Zeigen Sie, dass sich die (geradlinigen!) Flugbahnen zweier Kugeln *nicht* schneiden können.

Bonusaufgabe (Origami)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie Konstruierbarkeit von Punkten in $\mathbb{R}^2$ via Origami definiert ist und erklären Sie die erlaubten Konstruktionsschritte sowohl mathematisch als auch origamisch.

2. Schlagen Sie in der Literatur nach wie sich Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu Konstruierbarkeit mit Origami verhält.

Abgabe bis zum 20. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 20. Mai 2016

Aufgabe 1 (Orthogonalität)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $y \perp z$, so folgt $x \perp z$.
2. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp (y + z)$, so folgt $x \perp y$ und $x \perp z$.

Aufgabe 2 (Normen ohne Skalarprodukt)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass die Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ *nicht* von einem Skalarprodukt induziert sind.

Aufgabe 3 (Isometriegruppe des Quadrats)**.** Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} Q &:= \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\} \\ Q^\square &:= \bigl([-1,1] \times \{-1,1\}\bigr) \cup \bigl(\{-1,1\} \times [-1,1]\bigr) \\ Q^\blacksquare &:= [-1,1] \times [-1,1] \end{aligned}$$

und den Graphen

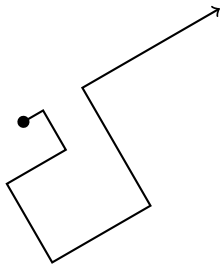
$$X^\square := (V^\square, E^\square) := \bigl(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}\}\bigr).$$

Wir versehen Q, $Q^\square$ und $Q^\blacksquare$ jeweils mit der von der euklidischen Metrik d_2 induzierten Metrik; wir versehen $V^\square$ mit der von $X^\square$ induzierten Metrik d. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Ist $f \in \operatorname{Isom}(Q, d_2)$, so bildet f diagonal gegenüberliegende Punkte auf diagonal gegenüberliegende Punkte ab (Extremalprinzip!). Folgern Sie, dass $\operatorname{Isom}(Q, d_2)$ zu $\operatorname{Isom}(V^\square, d)$ isomorph ist.
2. Zeigen Sie: Die Inklusion $Q \longrightarrow Q^\square$ induziert einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Isom}(Q^\square, d_2) \longrightarrow \operatorname{Isom}(Q, d_2)$.
3. Zeigen Sie: Die Inklusion $Q^\square \longrightarrow Q^\blacksquare$ induziert einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Isom}(Q^\blacksquare, d_2) \longrightarrow \operatorname{Isom}(Q^\square, d_2)$.
4. Bestimmen Sie die Isometriegruppe von $(Q^\square, d_2)$; d.h. geben Sie die Verknüpfungstabelle oder eine algebraische Beschreibung von $\operatorname{Isom}(Q^\square, d_2)$ an.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Perpendikulus)**.** Der Roboter Perpendikulus lebt in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$; aufgrund seines ausgeprägten Orthogonalitätsbewusstseins bewegt er sich auf Perpendikulus-Routen fort:



Eine *Perpendikulus-Route* aus $n \in \mathbb{N}$ Segmenten ist eine Folge $(s_1, \ldots, s_n)$ von n geraden Segmenten (d.h. euklidischen Geodäten) in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $j \in \{1, \ldots, n\}$, so hat s_j die Länge j, das Segment s_j endet am Anfang von s_{j+1} und s_{j+1} ist orthogonal zu s_j; dabei verstehen wir s_{n+1} als s_1. Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ eine *Perpendikulus-Zahl*, wenn es eine Perpendikulus-Route mit n Segmenten gibt.

1. Zeigen Sie, dass 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Vielfache von 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
3. Warum sind 7, 10 und 12 *keine* Perpendikulus-Zahlen?
4. Zeigen Sie, dass jede Perpendikulus-Zahl durch 8 teilbar ist.

Hinweis. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dann, wie Sie den Kern des Problems durch zwei Gleichungen beschreiben können.

Bonusaufgabe (Fixpunkte auf Bäumen)**.** Sei $T = (V, E)$ ein *Baum*, d.h. ein nicht-leerer zusammenhängender Graph, der keine Kreise enthält. Sei G eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe des Graphen T. Zeigen Sie: Dann gibt es

- einen Knoten $v \in V$ mit: für alle $f \in G$ ist $f(v) = v$
- oder eine Kante $\{v, w\} \in V$ mit: für alle $f \in G$ ist $\{f(v), f(w)\} = \{v, w\}$.

Hinweis. Extremalprinzip! Betrachten Sie einen Knoten v, für den die Menge $\{f(v) \mid f \in G\}$ minimalen Durchmesser besitzt ...

Abgabe bis zum 27. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 27. Mai 2016

Aufgabe 1 (Krümmung vs. Isometrie)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\gamma\colon I \longrightarrow V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve und sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine (lineare) Isometrie. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Dann ist auch $f \circ \gamma\colon I \longrightarrow V$ nach Bogenlänge parametrisiert.
2. Es gilt $\|\kappa_{f\circ\gamma}(t)\| = \|\kappa_\gamma(t)\|$ für alle $t \in I^\circ$.

Aufgabe 2 (Kurven-Energie)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann definieren wir die *Energie von* γ durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 \, dt.$$

(Der Vorfaktor 1/2 ist dabei aus der Physik motiviert.)

1. Zeigen Sie, dass
$$L(\gamma)^2 \leq 2 \cdot (T_1 - T_0) \cdot E(\gamma),$$
wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn die Funktion $\|\dot\gamma\|$ konstant ist.

   Hinweis. Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auf einem geeigneten Funktionenraum.

2. Was bedeutet das in der Praxis? (Zum Beispiel beim Autofahren ...)

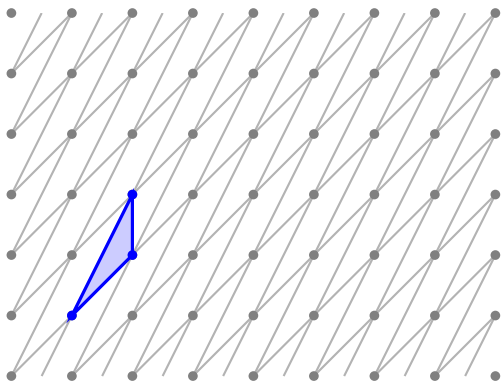
Aufgabe 3 (kleine Dreiecke)**.** Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten

$$\Delta(x, y, z) := \{t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0, 1], t_x + t_y + t_z = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nehmen an, dass $\Delta(x, y, z)$ außer x, y, z keine weiteren Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält. Zeigen Sie, dass

$$\bigl|\det(y - x, z - x)\bigr| = 1.$$

Hinweis. Warum ist $(y - x, z - x)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$?



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Winkel für Schüler)**.** Geben Sie mathematisch exakte Definitionen der folgenden Begriffe der ebenen euklidischen Geometrie und zwar so, dass ein Schüler der Klassen 5 bis 7 sie verstehen kann. Sie dürfen dabei Abstände zwischen Punkten als bekannt voraussetzen sowie Halbstrahlen.

1. Kreis
2. Winkel zwischen zwei Halbstrahlen.

Illustrieren Sie Ihre Erklärungen durch geeignete Bilder und Beispiele!
Hinweis. Es ist natürlich *nicht* davon auszugehen, dass Schüler der Klassen 5 bis 7 die trigonometrischen Funktionen cos bzw. arccos kennen.

Bonusaufgabe (Loch Ocht)**.** Der schottische See Loch Ocht ist kreisförmig mit einem Radius von einer Meile. Aufgrund des dichten Nebels ist überhaupt nur erkennbar, was weniger als eine Meile entfernt ist. In diesem See leben acht Ungeheuer (sogenannte Ochties), die ihren Hals und Kopf, ihrem großen Vorbild Nessie nacheifernd, aus dem See recken. Zeigen Sie, dass es dann zwei Ochties gibt, die sich sehen können.
Hinweis. Extremalprinzip!

Abgabe bis zum 3. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 3. Juni 2016

Aufgabe 1 (Translationen vs. Spiegelungen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

die Translation um a. Im folgenden betrachten wir Spiegelungen bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Man kann f in eine Komposition von genau 2016 Spiegelungen zerlegen.
2. Man kann f in eine Komposition von genau 2017 Spiegelungen zerlegen.

   Hinweis. „Determinante!“ sagte die Tante, die alle Invarianten kannte.

Aufgabe 2 (Isometrien vs. Spiegelungen)**.**

1. Zu $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi]$ sei

$$\begin{aligned} R_\alpha \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass man R_α als Komposition von Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$ (bzgl. Standardskalarprodukt) schreiben kann. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\operatorname{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ als Komposition von endlich vielen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. Standardskalarprodukt) geschrieben werden kann.

   Hinweis. Welche Normalformen/Spektralsätze für orthogonale Matrizen kennen Sie aus der Linearen Algebra?

Aufgabe 3 (Kongruenzsätze)**.**

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
2. Beweisen Sie den Kongruenzsatz SsW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 4 (Gleichseitigkeit für alle!)**.** Der imperiale Hofmathematiker Isosceles des Trigon Empire hat die auf der Rückseite abgedruckte Arbeit vorgelegt. Was ist schiefgelaufen? Erklären Sie genau, was korrekt ist und was nicht.

Bonusaufgabe (Lehrplan)**.** Finden Sie online den Lehrplan Mathematik für Gymnasien in Bayern und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie oft treten die Wörter „Beweis“ und „Definition“ im Lehrplan auf?
2. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für die Zukunft des Fachs „Mathematik“ an Gymnasien?

Abgabe bis zum 10. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

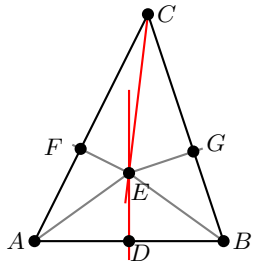
Satz (Großartiger Gleichseitigkeitssatz von Isosceles)**.** Jedes geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist gleichseitig, d.h.: Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei verschiedene Punkte, so gilt

$$\|A - B\|_2 = \|B - C\|_2 = \|C - A\|_2.$$

Beweis. Angenommen, die drei Seiten wären absurderweise nicht alle gleich lang, ohne Einschränkung etwa $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$.

Sei w die Winkelhalbierende an der Ecke C, d.h. w ist eine Gerade durch C und die Winkel zwischen w und $A - C$ bzw. zwischen w und $B - C$ sind gleich groß. Sei m die Mittelsenkrechte zu A und B, d.h. m ist orthogonal zu $B - A$ und geht durch $D := 1/2 \cdot (A + B)$.

Wegen $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$ haben m und w genau einen Schnittpunkt E. Sei F der Schnittpunkt der zu $A - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch A und C, und sei G der Schnittpunkt der zu $B - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch B und C.



Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

1. Nach Pythagoras ist $\|E - A\|_2 = \|E - B\|_2$, da m zu $B - A$ orthogonal ist und da $\|D - A\|_2 = 1/2 \cdot \|B - A\|_2 = \|D - B\|_2$.
2. Es gilt $\sphericalangle(G - E, C - E) = \sphericalangle(F - E, C - E)$; dies folgt aus der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken sowie der Konstruktion von w als Winkelhalbierende und von F bzw. G als Lotfußpunkte. Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir daher
$$\|F - C\|_2 = \|G - C\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|E - F\|_2 = \|E - G\|_2.$$
3. Mit den ersten beiden Schritten und Pythagoras folgt dann außerdem
$$\|A - F\|_2 = \|B - G\|_2.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

– Der Punkt E liegt innerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen
$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= \|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= \|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$

– Der Punkt E liegt außerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen
$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= -\|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= -\|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$

Es folgt also $\|A - C\|_2 = \|B - C\|_2$, im Widerspruch zu unserer grotesken Annahme. ■

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 10. Juni 2016

Aufgabe 1 (Pflasterungen der eukdlidischen Ebene)**.** Sei K eine endliche Menge von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

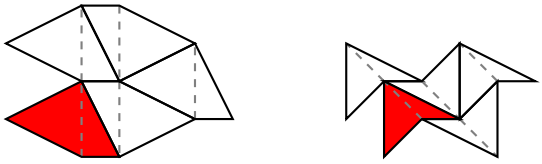
1. Ist P eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokacheln aus K, so ist P unendlich.
2. Sind P und P' Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protkacheln aus K, so gibt es eine Isometrie $g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit
$$P' = \{g \cdot Q \mid Q \in P\}.$$

Aufgabe 2 (Vierecke)**.**

1. Geben Sie eine Definition für *Vierecke* in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

   Hinweis. Vierecke sollten Polygone sein.
2. Geben Sie eine Definition für *innere Diagonalen* von Vierecken in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
3. Was müsste man alles beweisen, wenn man aus den untenstehenden Skizzen einen vollständigen Beweis dafür formulieren wollte, dass es zu jedem Viereck V in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit der Protokachel V gibt?

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die einzelnen Schritte formulieren – Sie müssen den Beweis für diese Schritte *nicht* ausführen.



Aufgabe 3 (Konstruktion des regulären Fünfecks)**.** Konstruieren Sie aus der Menge $\{(0,0),(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal ein reguläres Fünfeck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius 1. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis. Was hat Aufgabe 2 von Blatt 5 mit den Kuchenstückdreiecken eines regulären Fünfecks vom Radius 1 zu tun?

Aufgabe 4 (Inflation von Quadraten)**.** Warum kann man mit der Inflation

nicht analog zum Beweis für Penrose-Pflasterungen zeigen, dass jede Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ durch kongruente Quadrate aperiodisch ist?

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Wiederholung in Penrose-Pflasterungen)**.** Sei P eine Penrose-Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und sei $P' \subset P$ eine endliche (nicht-leere) Teilmenge. Zeigen Sie: Dann gibt es unendlich viele Isometrien $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit

$$\{g \cdot Q \mid Q \in P'\} \subset P.$$

In anderen Worten: Jedes endliche Stück von P wiederholt sich somit unendlich oft in P.

Hinweis. Erst Inflation, dann Deflation.

Abgabe bis zum 17. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 17. Juni 2016

Aufgabe 1 (hyperbolische Metrik)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $z \longmapsto z + i$ ist eine Isometrie von (H, d_H).
2. Es gilt $d_H(i, 1 + 2 \cdot i) = \sqrt{2}$.
   Hinweis. Muss man dazu $d_H(i, 1 + 2 \cdot i)$ exakt berechnen?

Aufgabe 2 (hyperbolische Spiegelung)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\overline{z}, \end{aligned}$$

wobei $\overline{z}$ die komplexe Konjugation von $z \in H \subset \mathbb{C}$ bezeichnet.

1. Veranschaulichen Sie f geeignet.
2. Zeigen Sie, dass f eine riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist.

Aufgabe 3 (positive Definitheit der hyperbolischen Metrik)**.** Seien $z, z' \in H$ mit $d_H(z, z') = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $z = z'$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die triviale Abschätzung für hyperbolische Längen; die vertikale Abschätzung hilft bei Kurven, die zu weit nach oben entfleuchen.

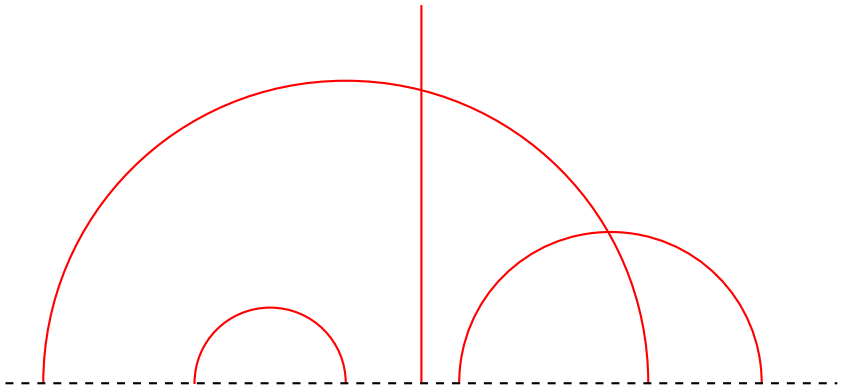
Aufgabe 4 (Inversion am Kreis)**.** Wir betrachten die Abbildung (wobei wir H als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen)

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Ein *verallgemeinerter Halbkreis* ist eine Teilmenge $K \subset H$ folgender Form:

- Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K = \{z \in H \mid |z - m| = r\}$ oder
- es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $K = \{a + i \cdot t \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Zeigen Sie: Ist K ein verallgemeinerter Halbkreis, so ist auch $f(K)$ ein verallgemeinerter Halbkreis. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!



Bitte wenden

Bonusaufgabe (riemannsche Länge vs. metrische Länge)**.** Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma).$$

Hinweis. Die Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ folgt direkt aus der Definition von d_H und der metrischen Länge $L_{(H,d_H)}$.

Die umgekehrte Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von d_H), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit der analytischen Beschreibung der metrischen Länge in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten.

Abgabe bis zum 24. Juni 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 11 vom 24. Juni 2016

Aufgabe 1 (Möbiustransformationen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A(i/2) = i$ und $f_A(i) = 2 \cdot i$.
2. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A = (z \mapsto -\overline{z})$.

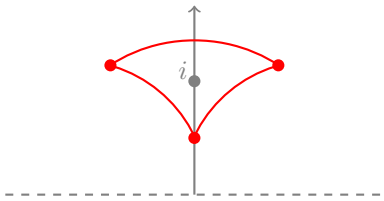
Aufgabe 2 (Stabilisator von i)**.** Zeigen Sie $\mathrm{Stab}_i = \mathrm{SO}(2)$.

Aufgabe 3 (ein hyperbolisches Dreieck)**.** Zeichnen Sie das geodätische Dreieck in (H, d_H) mit den Ecken $1 + i$, $i - 1$, $2 + 2 \cdot i$. Erklären Sie dabei genau, warum Ihre Zeichnung korrekt ist und wie Sie die entscheidenden Komponenten berechnet/konstruiert haben.

Aufgabe 4 (reguläre hyperbolische Dreiecke)**.** Sei $f\colon H \longrightarrow H$ die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir die Punkte $z_0(y) := i \cdot y$ sowie $z_1(y) := f(i \cdot y)$ und $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$.



Seien $\alpha_0(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ die entsprechenden Winkel des von $z_0(y), z_1(y), z_2(y)$ aufgespannten geodätischen Dreiecks in (H, d_H).

1. Zeigen Sie, dass $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$.
3. Zeigen Sie, dass $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$.
4. Skizzieren Sie einen Beweis für $\lim_{y \to 0} \alpha_0(y) = 0$.

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Schritte formulieren und mit geeigneten Skizzen illustrieren; Sie müssen die zugehörigen Berechnungen nicht im Detail ausführen.

Bonusaufgabe (hyperbolische Hosen)**.** Wie kann man hyperbolische Hosen (hyperbolic baby pants) stricken? Was hat das mit hyperbolischer Geometrie zu tun?

Hinweis. S.-M. Belcastro, C. Yackel. *Making Mathematics with Needlework: Ten Papers and Ten Projects*, A.K. Peters, 2007.

Abgabe bis zum 1. Juli 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 1. Juli 2016

Aufgabe 1 (Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Gruppe $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ wird von
$$\{f_A \mid A \in \operatorname{SL}(2,\mathbb{R})\} \cup \{z \mapsto -\overline{z} + 2\}$$
erzeugt.

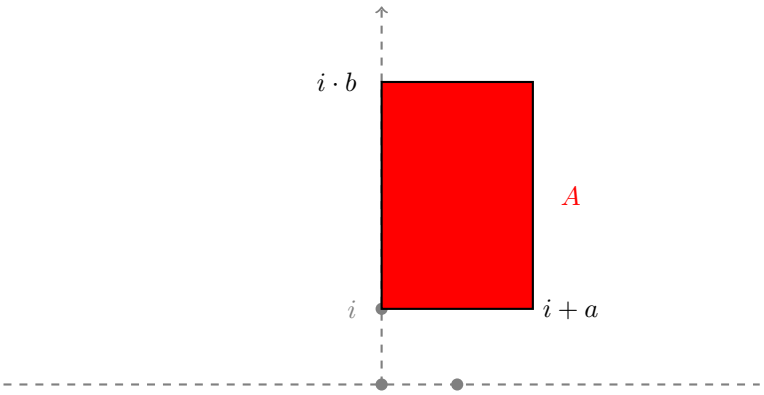
2. Die Gruppe $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ wird von
$$\{z \mapsto -\overline{z} + b \mid b \in \mathbb{R}\}$$
erzeugt.

Aufgabe 2 (Flächenwachstum von hyperbolischen Kreisscheiben)**.**

1. Zu $c \in \mathbb{R}_{>0}$ sei
$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto i + t \cdot c \cdot (1+i). \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \ln(1+c)$.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $d_H(i, i+a) \leq 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \ln(1 + a/2)$.

3. Zu $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \in \mathbb{R}_{>1}$ sei $A := \bigl\{x + i \cdot y \in H \bigm| x \in [0,a],\ y \in [1,b]\bigr\} \subset H$. Zeigen Sie, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = a \cdot \Bigl(1 - \frac{1}{b}\Bigr).$$



4. Sei $r \in \mathbb{R}_{>10}$. Folgern Sie, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(B_i^{(H,d_H)}(r)\bigr) \geq e^{\frac{r}{10}} \cdot (1 - e^{-\frac{r}{2}}).$$

Hinweis. Betrachten Sie ein geeignetes Rechteck wie in Teil 3.

Aufgabe 3 (hyperbolische Isometrien sind flächentreu)**.** Sei $A \subset H$ messbar und $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A) \subset H$ messbar ist und, dass
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(f(A)\bigr) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A).$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Cirkellimiet III)**.** Betrachten Sie den Holzschnitt *Cirkellimiet III* von M.C. Escher:

http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iii/

Falls die abgebildeten Vierecke/Dreiecke jeweils kongruente geodätische reguläre hyperbolische Vierecke/Dreiecke (im Scheibenmodell) sind, können dann die weißen Linien hyperbolische geodätische Geraden sein? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Winkel?!

Bonusaufgabe (Papiermodell)**.** Schneiden Sie hinreichend viele kongruente reguläre (euklidische) Dreiecke aus und verkleben Sie diese anhand der Kombinatorik, die von einer Pflasterung der hyperbolischen Ebene durch reguläre Dreiecke mit Winkel 45° (also $\pi/4$) beschrieben wird.

Skizzieren Sie wie man darauf aufbauend Unterrichtsmaterial für Schüler der gymnasialen Mittelstufe zur hyperbolischen Ebene erstellen kann. Welche Eigenschaften der hyperbolischen Ebene lassen sich gut an diesem Experiment illustrieren? Welche nicht?

Abgabe bis zum 8. Juli 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen

Dies ist das letzte Übungsblatt, das regulär in die Wertung eingeht.
Lösungen zu den Blättern 13 und 14 können auch abgegeben werden
und zählen dann als Bonuspunkte.

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 8. Juli 2016

Aufgabe 1 (Quasi-Isometrien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede Quasi-Isometrie ist surjektiv.
2. Jede surjektive quasi-isometrische Einbettung ist eine Quasi-Isometrie.

Aufgabe 2 (sphärische Tangentialvektoren)**.**

1. Sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass dann
$$\dot\gamma(t) \perp \gamma(t)$$
für alle $t \in [T_0, T_1]$ gilt (wobei „$\perp$“ die Orthogonalität bezüglich des gewöhnlichen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet).

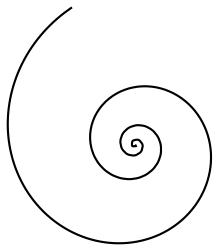
   Hinweis. Differenzieren Sie die definierende Gleichung für S^2.

2. Seien $x \in S^2$ und $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \perp x$. Konstruieren Sie eine glatte Kurve $\gamma\colon [-1, 1] \longrightarrow S^2$ mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = v$.

Aufgabe 3 (stereographische Projektion)**.**

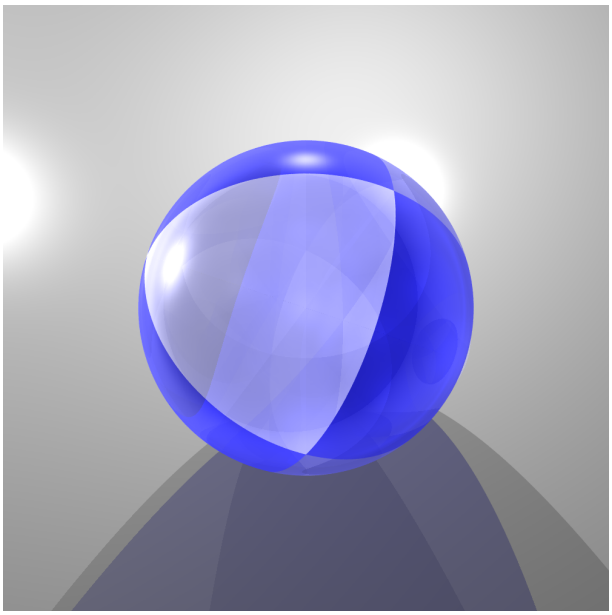
1. Sei $N := (0, 0, 1) \in S^2$ der Nordpol und sei
$$\begin{aligned} \sigma\colon S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \frac{1}{1 - x_3} \cdot (x_1, x_2) \end{aligned}$$
die *stereographische Projektion*. Zeigen Sie, dass σ winkeltreu ist.
2. Ist σ flächentreu? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Skizzieren Sie (von Hand) eine Weltkarte in stereographischer Projektion.
4. Skizzieren Sie (von Hand) eine Weltkarte in stereographischer Projektion, wenn nicht der Nordpol entfernt wird, sondern Kuala Lumpur.

Aufgabe 4 (logarithmische Spirale)**.** Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot \bigl(\sin(\ln(1 + t)), \cos(\ln(1 + t))\bigr) \end{aligned}$$
bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ eine quasi-isometrische Einbettung ist. Gibt es eine geodätische Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die „nahe“ an f liegt? Begründen Sie Ihre Antwort!



Bitte wenden

Bonusaufgabe (reguläre Pflasterungen der Sphäre)**.** Verwenden Sie Povray (http://www.povray.org/), um schöne (und mathematisch exakte!) Bilder der regulären Pflasterungen der Sphäre zu erstellen.



Freiwillige Abgabe bis zum 15. Juli, 12:30, in die Briefkästen

Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 15. Juli 2016

Aufgabe 1 (hyperbolische Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

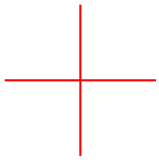
1. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2016$ ist hyperbolisch.
2. Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2016$ ist hyperbolisch.

Aufgabe 2 (Taxi-Kreuz)**.** Wir betrachten die Menge

$$X := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x \cdot y = 0\bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

und versehen X mit der Taxi-Metrik d_1.

1. Zeigen Sie, dass (X, d_1) geodätisch ist.
2. Zeigen Sie, dass (X, d_1) ein hyperbolischer metrischer Raum ist.



Aufgabe 3 (hyperbolische Geodäten)**.** Sei (X, d) ein δ-hyperbolischer metrischer Raum und seien $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow X$, $\gamma'\colon [0, L'] \longrightarrow X$ Geodäten in X mit

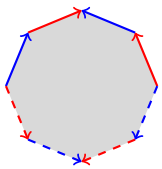
$$\gamma(0) = \gamma'(0) \qquad \text{und} \qquad d\bigl(\gamma(L), \gamma'(L')\bigr) \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass $|L - L'| \leq 1$ und

$$\forall_{t \in [0, \min(L, L')]} \quad d\bigl(\gamma(t), \gamma'(t)\bigr) \leq 2 \cdot \delta + 2.$$

Aufgabe 4 (hyperbolische Brezel)**.**

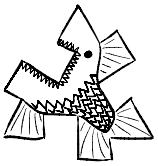
1. Was für eine Fläche M erhält man, wenn man die Seiten eines Achtecks wie unten angegeben verklebt? Skizzieren Sie M und wie M aus dem Achteck entsteht!



2. Erklären Sie anschaulich, warum M eine (glatte) zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.
3. Erklären Sie anschaulich, wie man mithilfe geeigneter regulärer Pflasterungen von (H, d_H) eine riemannsche Metrik auf M definieren kann, die lokal isometrisch zu (H, d_H) ist.

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

Freiwillige Abgabe bis zum 20. Juli direkt bei den Übungsleitern



Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] Aunt Annie's Crafts. *Flexagon*, http://www.auntannie.com/Geometric/Flexagon/Index.html Zitiert auf Seite: 92

[2] D. Austin. Penrose Tiles Talk Across Miles, *AMS Feature Column*, August 2005, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-penrose Zitiert auf Seite: 99

[3] D. Austin. Penrose Tilings Tied up in Ribbons, *AMS Feature Column*, Dezember 2005, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons Zitiert auf Seite: 99

[4] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*, zweite Auflage, De Gruyter, 2010. Zitiert auf Seite: 143, 144

[5] J. Beck. *Combinatorial Games – Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press, 2011. Zitiert auf Seite: 18

[6] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009. Zitiert auf Seite:

[7] O. Blumenthal. *Lebensgeschichte*, in: D. Hilbert. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer, 1935. Zitiert auf Seite: 7

[8] S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014. Zitiert auf Seite: 62

[9] M. Brandenburg. *Einfhrung in die Kategorientheorie: Mit ausfhrlichen Erklrungen und zahlreichen Beispielen*, Springer-Spektrum, 2015. Zitiert auf Seite: A 6

[10] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1999. Zitiert auf Seite: 159

[11] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010. Zitiert auf Seite: 94, 97

[12] A. Crans, T. Fiore, R. Satyendra. Musical Actions of Dihedral Groups, *American Mathematical Monthly* 116(6), S. 479–495, 2009. Zitiert auf Seite: 91

[13] M.W. Davis. *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, Band 32, Princeton University Press, 2008. Zitiert auf Seite: 94

[14] B.L. Davis, D. MacLagan. The card game SET, *The Mathematical Intelligencer* 25(3), S. 33–40, Juni 2003. Zitiert auf Seite: 20

[15] R. Diestel. *Graph Theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005. Zitiert auf Seite: 22, 34, 35

[16] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959–2009*, Problem Books in Mathematics, zweite Auflage, Springer, 2011. Zitiert auf Seite:

[17] A. Engel. *Problem Solving Strategies*, *Problem Books in Mathematics*, Springer, 1998. Zitiert auf Seite: 56, 65

[18] M.C. Escher. *Cirkellimiet III*, 1960. Available online at http://www.mcescher.nl/galerij/erkenning-succes/cirkellimiet-iii/ Zitiert auf Seite: 136

[19] M.C. Escher. *Cirkellimiet IV*, 1960. Available online at http://www.mcescher.nl/galerij/erkenning-succes/cirkellimiet-iv/ Zitiert auf Seite: 135

[20] Euklid. $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\widetilde{\iota}\alpha$.
Altgriechisch: http://www.physics.ntua.gr/∼mourmouras/euclid/index.html
Deutsche Übersetzung von J.F. Lorenz (1781, Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses):
http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925_00005.html
Zitiert auf Seite: 6

[21] M. Gardner. *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Game*, University of Chicago Press, 1988. Zitiert auf Seite: 92

[22] M. Gromov. Hyperbolic groups. in *Essays in group theory*, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, Band 8, S. 75–263, Springer, 1987. Zitiert auf Seite: 148, 159

[23] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, fünfte Auflage, Vieweg+Teubner, 1922. Zitiert auf Seite: 7, A 2

[24] K. Kasahara. *Origami figürlich und geometrisch*, Augustus Verlag, 2000. Zitiert auf Seite: 94

[25] S. Lang. *Algebra*, dritte überarbeitete Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 211, Springer, 2005. Zitiert auf Seite: 62

[26] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics, Band 176, Springer, 1997. Zitiert auf Seite: 104, 144

[27] C. Löh. *Geometric Group Theory, an Introduction*, Vorlesungsskript, Universität Regensburg, 2015.
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/ggt_ws1415/lecture_notes.pdf
Zitiert auf Seite: 41, 96, 97, 149, 159

[28] C. Löh, S. Krauss, N. Kilbertus (Hrsg.). *Quod erat knobelandum. Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg*, Springer Spektrum, 2016. Zitiert auf Seite: 20

[29] F. Lorenz. *Einführung in die Algebra I*, dritte Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1996. Zitiert auf Seite: 53

[30] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Zitiert auf Seite: A 6

[31] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*, The Johns Hopkins University Press, 2001. Zitiert auf Seite: 35

[32] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), S. 48–49, 1950. Zitiert auf Seite: 22

[33] J.F. Nash. Non-cooperative games, *The Annals of Mathematics*, 54(2), S. 286–295, 1951. Zitiert auf Seite: 22

[34] A.L.T. Paterson. *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, Band 29, AMS, 1988. Zitiert auf Seite: 97

[35] R. Penrose. Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane, *Math. Intelligencer* 2(1), S. 32–37, 1979/80. Zitiert auf Seite: 99

[36] A.F. Ritter. *Lecture on Penrose Tilings*, Oxford Masterclass in Geometry, Vorlesungsskript, 2014. Zitiert auf Seite: 99

[37] V. Runde. *Amenability*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Band 1774, Springer, 2002. Zitiert auf Seite: 94, 96, 97

[38] J. Rychtář. *Entangled Game – Logic Puzzle*, https://play.google.com/store/apps/details?id=cz.rychtar.android.entangledgame&hl=en Zitiert auf Seite: 35

[39] D. Schattschneider, W. Walker. *M.C. Escher Kaleidozyklen*, Taschen Verlag, Nachdruck, 1994. Zitiert auf Seite: 94

[40] K. Volkert. *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*, Klassische Texte der Wissenschaft, Springer Spektrum, 2015. Zitiert auf Seite: 7, A 2

[41] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Band 152, Springer, 1995. Zitiert auf Seite: 92