Probeklausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser | 15. Juli 2016

Name: | Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ | Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note: | Unterschrift:

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)**.** Die Sprache von *Tri-Geometrie* enthält *Punkte*, *Dreiecke* und die Beziehung *„ist Ecke von“* zwischen Punkten und Dreiecken sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Tri-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

T 1 Zu jedem Dreieck gibt es genau drei verschiedene Punkte, die eine Ecke von diesem Dreieck sind.

T 2 Haben zwei Dreiecke dieselben drei Eckpunkte, so stimmen sie überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Tri-Geometrie: Sind vier verschiedene Punkte gegeben, so gibt es höchstens vier verschiedene Dreiecke, deren Ecken in diesen vier Punkten liegen.
2. Geben Sie eine vernünftige Definition dafür, was ein *Modell* für Tri-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Sind x, y, z drei verschiedene Punkte, so gibt es ein Dreieck Δ, so dass x, y und z Ecken von Δ sind.

Lösung:

1. Seien x_1, x_2, x_3, x_4 vier verschiedene Punkte. Dann gibt es genau vier Möglichkeiten, daraus drei verschiedene Punkte auszuwählen.

   Da jedes Dreieck nach T 1 genau drei Eckpunkte hat, gibt es also nur vier mögliche Kombinationen von Eckpunkten für Dreiecke.

   Da Dreiecke nach T 2 durch ihre Eckpunkte eindeutig bestimmt sind, gibt es also höchstens vier Dreiecke, deren Eckpunkte zu x_1, x_2, x_3, x_4 gehören.

2. Ein *Modell für Tri-Geometrie* ist ein Tripel $(P, D, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge D und einer Relation „$\sqsubset$“ $\subset P \times D$, mit folgenden Eigenschaften:

   – Ist $\Delta \in D$, so gibt es genau drei Elemente $x, y, z \in P$ mit $x \sqsubset \Delta$, $y \sqsubset \Delta$ und $z \sqsubset \Delta$.

- Sind $\Delta_1, \Delta_2 \in D$ und sind $x, y, z \in P$ drei verschiedene Elemente mit $x, y, z \sqsubset \Delta_1$ und $x, y, z \sqsubset \Delta_2$, so gilt bereits $\Delta_1 = \Delta_2$.

Wir fassen dabei die Elemente von P als Punkte auf, die Elemente von D als Dreiecke und die Relation „$\sqsubset$“ als „ist Ecke von“.

[Alternativ könnte man Modelle zum Beispiel auch folgendermaßen definieren: Ein *Modell für Tri-Geometrie* ist ein Paar (P, D), bestehend aus einer Menge P und einer Menge D von drei-elementigen Teilmengen von P. Dabei fassen wir die Elemente von P als Punkte auf und die Elemente von D als Dreiecke auf und modellieren die Beziehung „ist Ecke von“ einfach durch die Elementbeziehung.]

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen, denn:

   - In dem Modell $(\{0, 1, 2\}, \emptyset, \emptyset)$ für Tri-Geometrie ist der Satz offenbar *nicht* erfüllt,
   - aber in dem Modell $(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 1, 2\}\}, \in)$ ist der Satz erfüllt.

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien $\gamma, \eta \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ glatte Kurven mit $\gamma(0) = \eta(0)$ und es gelte $\widetilde{\kappa}_\gamma(t) = \widetilde{\kappa}_\eta(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Folgt dann bereits $\gamma(t) = \eta(t)$ für alle $t \in [0,1]$?
2. Gibt es eine Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ mit
$$f(i) = i \qquad \text{und} \qquad f(2 \cdot i) = i\ ?$$
3. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow H \subset \mathbb{R}^2$ und jede Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ bereits $L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(f \circ \gamma) = L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma)$?

Lösung:

1. Nein, denn: Ist $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$, so wissen wir, dass die glatte Kurve
$$\begin{aligned} \gamma_v \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot v \end{aligned}$$
als Geodäte in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die signierte Krümmung $\widetilde{\kappa}_{\gamma_v} = 0$ besitzt.

   Seien nun $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1 = \|w\|_2$ und $v \neq w$ (z.B. $v = e_1$, $w = e_2$). Wir betrachten dann $\gamma := \gamma_v$ und $\eta := \gamma_w$. Dann gilt $\gamma(0) = 0 = \eta(0)$ und
$$\forall_{t \in [0,1]} \quad \widetilde{\kappa}_\gamma(t) = 0 = \widetilde{\kappa}_\eta(t),$$
aber $\gamma(1) = v \neq w = \eta(1)$.

   [Es gibt natürlich viele andere Möglichkeiten für Gegenbeispiele.]
2. Nein, denn: Möbiustransformationen sind Isometrien der hyperbolischen Ebene (H, d_H) und somit insbesondere injektiv.
3. Nein, denn: Wir betrachten die Möbiustransformation
$$\begin{aligned} f := f_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}} \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto 4 \cdot z \end{aligned}$$

und die glatte Kurve

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\longrightarrow H \subset \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto i + i \cdot t.\end{aligned}$$

Dann ist

$$L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(f \circ \gamma) = 4 \neq 1 = L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma).$$

[Es gibt natürlich viele andere Möglichkeiten für Gegenbeispiele.]

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Hat jede quasi-isometrische Einbettung quasi-dichtes Bild?
2. Ist jede Abbildung, die endlichen Abstand zu einer quasi-isometrischen Einbettung hat, selbst eine quasi-isometrische Einbettung?

Lösung:

1. Nein, denn: Zum Beispiel ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

   eine isometrische Einbettung $(\mathbb{R}, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ (also insbesondere eine quasi-isometrische Einbettung). Aber f hat *nicht* quasi-dichtes Bild, denn für alle $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\forall_{y \in f(\mathbb{R})} \quad d_2\bigl((0, C+1), y\bigr) \geq C + 1 > C.$$

   [Es gibt natürlich viele andere Möglichkeiten für Gegenbeispiele.]

2. Ja, denn: Sei $f\colon (X,d) \longrightarrow (X', d')$ eine quasi-isometrische Einbettung metrischer Räume und sei $g\colon (X,d) \longrightarrow (X',d')$ eine Abbildung mit endlichem Abstand zu f. Also gibt es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\begin{aligned} &\forall_{x_1,x_2 \in X} \quad \frac{1}{C} \cdot d(x_1,x_2) - C \leq d'\bigl(f(x_1), f(x_2)\bigr) \leq C \cdot d(x_1,x_2) + C \\ &\forall_{x \in X} \quad d\bigl(f(x), g(x)\bigr) \leq C. \end{aligned}$$

   Also gilt für alle $x_1, x_2 \in X$, dass (Dreiecksungleichung!)

$$\begin{aligned} d'\bigl(g(x_1), g(x_2)\bigr) &\leq d'\bigl(g(x_1), f(x_1)\bigr) + d'\bigl(f(x_1), f(x_2)\bigr) + d'\bigl(f(x_2), g(x_2)\bigr) \\ &\leq C + C \cdot d(x_1,x_2) + C + C \\ &= C \cdot \cdot d(x_1,x_2) + 3 \cdot C. \end{aligned}$$

   Analog zeigt man eine entsprechende untere Abschätzung.

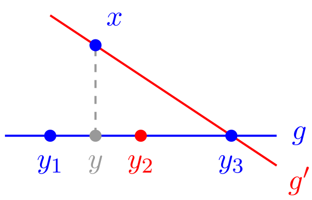
Aufgabe 4 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz von Sylvester-Gallai.
2. Formulieren Sie das Extremalprinzip.
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des Satzes von Sylvester-Gallai.

Lösung:

1. Sei M eine endliche Menge von Punkten in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgender Eigenschaft: Führt eine Gerade g in $\mathbb{R}^2$ durch zwei verschiedene Punkte aus M, so liegt auch ein dritter Punkt aus M auf g. Dann folgt bereits, dass alle Punkte aus M auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
2. Die Grundidee des *Extremalprinzips* besteht darin, Objekte zu betrachten, die sich dadurch auszeichnen, dass sie gewisse Größen maximieren oder minimieren.
3. Sei G die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$, die mindestens zwei verschiedene Punkte aus M enthalten. Man wendet dann das Extremalprinzip auf $M \times G$ an und betrachtet ein Paar (x, g) so dass x nicht auf g liegt und den Abstand von x zu g unter all diesen Punkten minimiert.

   Nach Definition von G und der Annahme über M gibt es drei verschiedene Punkte $y_1, y_2, y_3 \in M$, die auf g liegen. Mindestens zwei dieser Punkte liegen auf „derselben Seite“ von y (wie in der Abbildung) und man betrachtet dann die Gerade g' durch x und y_3. Dies führt dann zu einem Widerspruch zur Minimalität von (x, g).

4. Zum Beispiel folgt aus dem Satz von Sylvester-Gallai, dass die Fano-Ebene *nicht* nach $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie den Kongruenzsatz SWS in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Lösung: Seien Δ und Δ' nicht-entartete geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Seiten $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ bzw. a', b', c' und den diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ bzw. α', β', γ'. Es gelte $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\gamma = \gamma'$ und $\|b\|_2 = \|b'\|_2$. Dann sind $\operatorname{im}\Delta$ und $\operatorname{im}\Delta'$ kongruent, denn:

Da Translationen Isometrien sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die erste Ecke von Δ bzw. Δ' jeweils 0 ist. Da die Dreiecke nicht-entartet sind, sind (a, b) und (a', b') Basen von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$f(a) = a' \qquad \text{und} \qquad f(b) = b'$$

gegeben ist. Dann ist f eine Isometrie, denn: Wegen $\gamma = \gamma'$ ist

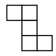
$$\frac{\langle b, -a\rangle}{\|a\|_2 \cdot \|b\|_2} = \cos\gamma = \cos\gamma' = \frac{\langle b', -a'\rangle}{\|a'\|_2 \cdot \|b'\|_2}.$$

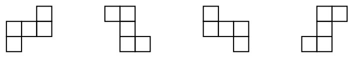
Aus $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ und $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ folgt somit

$$\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle = \big\langle f(a), f(b)\big\rangle.$$

Mit dieser Gleichung und $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ bzw. $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ kann man leicht nachrechnen, dass f eine Isometrie ist. Nach Konstruktion (und der Charakterisierung euklidischer Geodäten) ist $f(\operatorname{im}\Delta) = \operatorname{im}\Delta'$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem 2015×2015-Schachbrett:

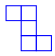
- Zu Beginn ist das Spielbrett leer.
- Ein Zug besteht darin, einen Stein der Form  so auf fünf Schachbrett-Felder zu setzen, dass er sich mit keinem anderen Stein überlappt; der Stein darf dabei auch gedreht/gespiegelt werden:



- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Stein setzen kann, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler A an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.

Lösung: Spieler A setzt seinen ersten Stein so auf das Spielbrett, dass das mittlere Feld von



auf dem zentralen Feld des Spielbretts liegt. Man beachte, dass dann die noch verbleibenden Felder unter Rotation um π symmetrisch sind und dass es nicht möglich ist, mit einem der Steine zwei Felder zu belegen, die durch Rotation um π ineinander überführt werden.

Als unterliegende Geometrie kann man dabei entweder den durch die Spielfelder (und die Nachbarschaftsrelation) gegebenen Graphen oder die von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ induzierte Geometrie verwenden.

Auf jeden Zug von B erwidert Spieler A dann einfach, indem er den um π rotierten Zug spielt – und induktiv folgt, dass diese Felder für A tatsächlich noch frei sind, da die entsprechenden Felder im vorigen Zug für B zur Verfügung standen.

Also kann Spieler A auf jeden Zug von Spieler B antworten. Da das Spiel nach endlich vielen Zügen endet, gewinnt A das Spiel.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie: Es gibt *kein* reguläres geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit Flächeninhalt $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 1/10 \cdot \pi$, für das es eine Pflasterung von (H, d_H) mit Protokachel Δ gibt.

Hinweis. Wir verwenden hier die offensichtliche hyperbolische Version der entsprechenden Begriffe für $(\mathbb{R}^2, d_2)$: Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H). Eine *Pflasterung von* (H, d_H) *mit Protokachel* Δ ist eine Menge D von geodätischen Dreiecken in (H, d_H) mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Dreieck aus D ist zu Δ kongruent (in (H, d_H)).
- Für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in D$ mit $\Delta_1 \neq \Delta_2$ gilt
  $$\Delta_1^\circ \cap \Delta_2^\circ = \emptyset$$
  und $\operatorname{im} \Delta_1 \cap \operatorname{im} \Delta_2$ ist sowohl eine Seite oder eine Ecke von Δ_1 als auch eine von Δ_2.
- Es gilt
  $$\bigcup_{\Delta_1 \in D} (\operatorname{im} \Delta_1 \cup \Delta_1^\circ) = H.$$

Lösung: Angenommen, es gäbe ein solches geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) und sei D eine entsprechende Pflasterung von (H, d_H).

- Seien α, β, γ die (hyperbolischen) Winkel von Δ. Da Δ regulär ist, gilt $\alpha = \beta = \gamma$.
- Wir bestimmen nun α: Nach dem Satz von Gauß-Bonnet ist
  $$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi - 3 \cdot \alpha.$$
  Mit der Voraussetzung $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 1/10 \cdot \pi$ folgt somit $\alpha = \frac{3}{10} \cdot \pi$.
- Sei $x \in H$ eine Ecke eines der geodätischen Dreiecke in D. Dann trifft sich in x eine gewisse Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Ecken von geodätischen Dreiecken aus D. Da die Dreiecke aus D zu Δ kongruent sind, sind auch sie reguläre geodätische Dreiecke mit Winkel $3/10 \cdot \pi$ (Isometrien von (H, d_H) sind winkeltreu!). Damit folgt
  $$2 \cdot \pi = n \cdot \alpha = n \cdot \frac{3}{10} \cdot \pi.$$
  Diese Gleichung besitzt jedoch keine ganzzahlige Lösung n.

Also kann es keine solche Pflasterung D geben.