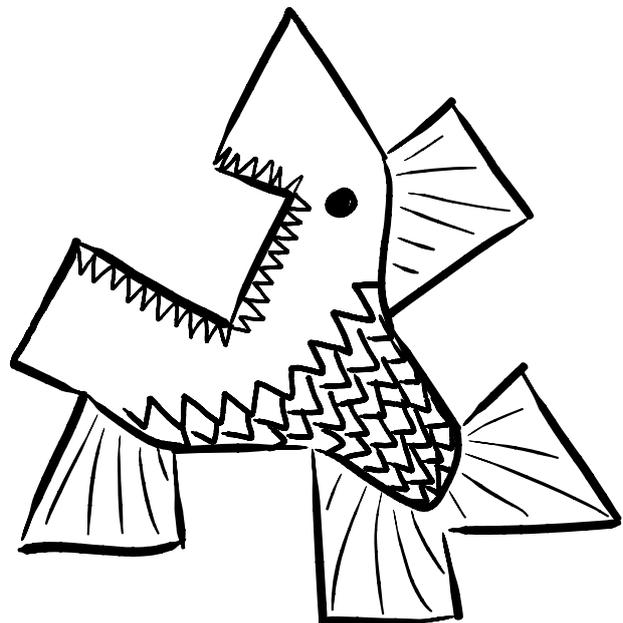
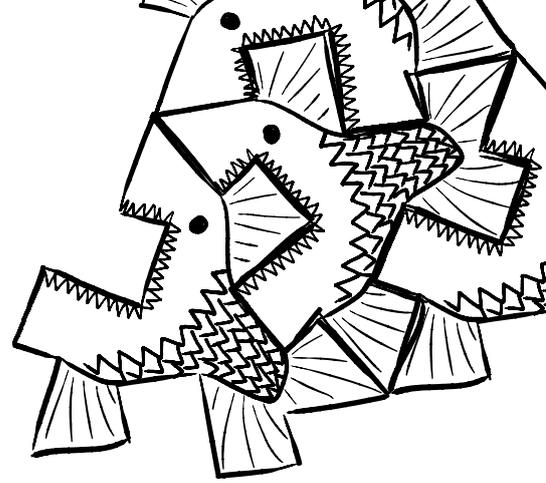
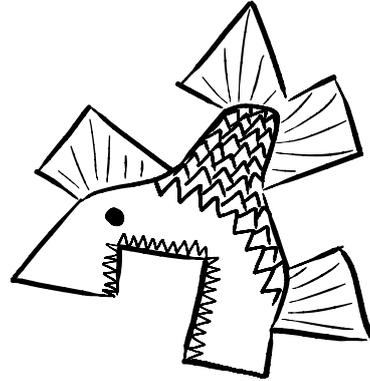


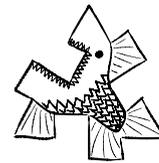
# Geometrie

Lehramt Gymnasium  
Sommersemester 2021

Clara Löh



Version vom 16. Juli 2021  
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de  
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg



# Inhaltsverzeichnis

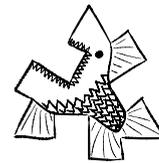
---

	Literaturhinweise	vii
0	Einführung	1
1	Mini-Geometrie	5
1.1	Axiomatische Geometrie	6
1.2	Axiome der Mini-Geometrie	8
1.3	Axiome vs. Modelle	10
1.4	Formalisierung und Verifikation	15
1.4.1	Beweisassistenten	15
1.4.2	Eine Formalisierung von Mini-Geometrie	17
1.4.3	Beweis einer offensichtlichen(?) Aussage	19
1.4.4	Beispiel-Modelle	21
1.4.5	Unabhängigkeit des Parallelenaxioms	23
1.5	Symmetrie	26
1.6	Der geometrische Blickwinkel	30
1.6.1	Ramsey-Zahlen	30
1.6.2	Das Spiel SET	31
1.6.3	Strategie via Symmetrie	33
1.6.4	Der Heiratssatz	35
1.7	Der eulersche Polyedersatz	39
1.7.1	Geometrische Realisierung von Graphen	39
1.7.2	Der eulersche Polyedersatz	43
1.7.3	Anwendung: Färbungen und Nicht-Planarität	47

2	<b>Metrische Geometrie</b>	51
2.1	Metrische Räume	52
2.2	Geodäten	57
2.3	Länge von Kurven	61
2.4	Kreise und Konstruierbarkeit	65
	2.4.1 Kreise, Sphären, Bälle	65
	2.4.2 Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	67
2.5	Symmetrie	71
2.6	Das Extremalprinzip	73
3	<b>Euklidische Geometrie</b>	79
3.1	Normierte Räume und Skalarprodukte	80
	3.1.1 Normierte Räume	80
	3.1.2 Skalarprodukte	82
	3.1.3 Orthogonalität	84
3.2	Kurven	86
	3.2.1 Analytische Grundlagen	86
	3.2.2 Länge von Kurven	88
	3.2.3 Parametrisierung nach Bogenlänge	90
	3.2.4 Krümmung von Kurven	92
3.3	Winkel	96
	3.3.1 Winkel	96
	3.3.2 Winkelsumme in euklidischen Dreiecken	99
	3.3.3 Flächeninhalte	101
3.4	Symmetrie	105
	3.4.1 Winkeltreue	105
	3.4.2 Die euklidische Isometriegruppe	107
	3.4.3 Kongruenz	110
	3.4.4 Reguläre Polygone	112
	3.4.5 Reguläre Polyeder	116
3.5	Pflasterungen der euklidischen Ebene	119
	3.5.1 Reguläre Pflasterungen der Ebene	120
	3.5.2 Aperiodische Pflasterungen der Ebene	121
4	<b>Elementare riemannsche Geometrie</b>	125
4.1	Was ist riemannsche Geometrie?	126
	4.1.1 Wozu riemannsche Geometrie?	126
	4.1.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündel	127
	4.1.3 Riemannsche Metriken	128
	4.1.4 Metriken aus riemannschen Metriken	129
4.2	Konstruktion der hyperbolischen Ebene	130
4.3	Länge von Kurven	131
4.4	Symmetrie	136
	4.4.1 Riemannsche Isometrien	136
	4.4.2 Möbiustransformationen	137
	4.4.3 Transitivität der Möbiustransformationen	142
	4.4.4 Geodäten der hyperbolischen Ebene	144
	4.4.5 Winkel	148

4.4.6	Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene	150
4.5	Hyperbolische Dreiecke	152
4.5.1	Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet	153
4.5.2	Reguläre hyperbolische Dreiecke	157
4.5.3	Hyperbolische Dreiecke sind dünn	161
4.6	Vergleich mit sphärischer Geometrie	164
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>A.1</b>
A.1	Der rote Faden	A.2
A.2	Hilberts Axiomatik	A.3
A.3	Eine viel zu kurze Einführung in Lean	A.7
A.3.1	Grundlagen	A.7
A.3.2	Beweise	A.8
A.4	Kategorien	A.10
A.5	Funktoren	A.13
A.6	Elementare Analysis von Sinus und Kosinus	A.16
A.7	Das Banach-Tarski-Paradoxon	A.18
A.8	Penrose-Puzzle	A.21
<b>B</b>	<b>Übungsblätter</b>	<b>B.1</b>
<b>C</b>	<b>Quellcode</b>	<b>C.1</b>
<b>D</b>	<b>Organisatorisches</b>	<b>D.1</b>
	Literaturverzeichnis	C.1
	Symbolverzeichnis	C.7
	Index	C.9





# Literaturhinweise

---

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

## Axiomatische Geometrie

- F. Borceux. *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy I*, Springer, 2013.
- Euklid. *Στοιχεῖα*.  
Altgriechisch: <http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/index.html>  
Deutsche Übersetzung von J.F. Lorenz (1781, Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses):  
[http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925\\_00005.html](http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925_00005.html)
- D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, fünfte Auflage, Vieweg+Teubner, 1922.
- J.M. Lee. *Axiomatic Geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts, 21, American Mathematical Society, 2013.

## Graphentheorie

- R. Diestel. *Graph Theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, 173, Springer, 2005.
- J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

## Metrische und grobe Geometrie

- M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.
- M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Springer, 1999.
- C. Löh. *Geometric Group Theory, an Introduction*, Universitext, Springer, 2018.

## Hyperbolische Geometrie

- J. Andersen. *Hyperbolic Geometry*, zweite Auflage, Universitext, Springer, 2005.
- C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*, zweite Auflage, De Gruyter, 2010.
- R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer, 1992.
- J.M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics, Band 176, Springer, 1997.

## Grundlagen

- J. Avigad, L. de Moura, S. Kong. *Theorem Proving in Lean*, Release 3.23.0, [https://leanprover.github.io/theorem\\_proving\\_in\\_lean/](https://leanprover.github.io/theorem_proving_in_lean/), 2021.
- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
- P.J. Cameron. *Sets, Logic and Categories*, Universitext, Springer, 1998.

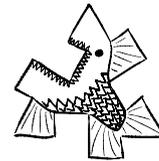
- L. Lamport. How to write a 21st century proof, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 11(1), 43–63, 2012.
- R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010.

## Weiterführende Literatur

- E.A. Abbott. *Flatland, A Romance of Many Dimensions*, Dover Publications, 1992.
- M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004.
- E. Brooke-Hitching. *The Phantom Atlas: The Greatest Myths, Lies and Blunders on Maps*, Simon+Schuster, 2016.
- W. Chyr. *Manifold Garden*, Computerspiel, 2019.
- R. Coulon, E. A. Matsumoto, H. Segerman, S. J. Trettel. Ray-marching Thurston geometries, Preprint, arXiv:2010.15801 [math.GT], 2020.
- D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959–2009*, Problem Books in Mathematics, zweite Auflage, Springer, 2011.
- M.C. Escher. *M.C. Escher – The official website*, <http://www.mcescher.com/>
- M. Gessen. *Perfect Rigor: A Genius and the Mathematical Breakthrough of the Century*, Houghton Mifflin Harcourt, 2009.
- D.R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, 20 anniversary edition, Basic Books, 1999.
- D. Kehlmann. *Die Vermessung der Welt*, Rowohlt Verlag, 2005.
- Mobius Digital. *Outer Wilds*, Computerspiel, 2019.
- Polytron Corporation. *FEZ*, Computerspiel <http://fezgame.com/>
- H. Segerman. *Visualizing mathematics with 3D printing*, Johns Hopkins University Press, 2016.
- Ustwo. *Monument Valley*, Computerspiel <http://www.monumentvalleygame.com/>

- Valve. *Portal*, Computerspiel, 2007.
- Zeno Rogue. *HyperRogue*, Computerspiel  
<https://roguetemple.com/z/hyper/>

# 0



## Einführung

---

### Was ist Geometrie?

Das Wort *Geometrie* besteht aus zwei, altgriechischen, Komponenten:

- $\gamma\eta$ : die Erde
- $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\tilde{\nu}$ : messen

Die Geometrie hat sich von ihren Ursprüngen in der Landvermessung zu einem außerordentlich vielseitigen mathematischen Gebiet entwickelt. Einerseits helfen Methoden aus der Analysis, Algebra, Topologie, ... geometrische Fragestellungen zu beantworten; andererseits sind geometrische Argumente oft der Schlüssel zur Lösung von Problemen aus anderen Gebieten der Mathematik; zum Beispiel trägt die sogenannte arithmetische Geometrie zur Lösung zahlentheoretischer Probleme bei.

Eine naheliegende Beschreibung von Geometrie wäre, dass Geometrie der Teil der Mathematik ist, der sich mit der Untersuchung geometrischer Objekte befasst. Aber was sind geometrische Objekte? Diese Frage führt zu vielen weiteren grundsätzlichen Fragen über die Fundamente der Mathematik und hat in der historischen Entwicklung der Geometrie eine Schlüsselrolle eingenommen. In der modernen Mathematik gibt es so viele Varianten von Theorien mit geometrischen Einflüssen, dass die Beantwortung dieser Frage immer vom Blickwinkel und vom Kontext des Betrachters abhängt. Zum Beispiel fällt die Untersuchung der Algebra der komplexwertigen stetigen

Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum je nach Blickwinkel in die Analysis, in die Topologie, in die Algebra oder in die Geometrie.

In dieser Vorlesung werden wir verschiedene Facetten der Geometrie, ihre Bezüge zu anderen mathematischen Gebieten sowie ihre Anwendungen kennenlernen. Insbesondere werden wir uns mit dem Parallelenaxiom, Symmetrien und lokalen und globalen Krümmungsphänomenen beschäftigen.

Dabei werden wir auch darauf eingehen, wie diese abstrakten Formen der Geometrie wertvolles Hintergrundwissen für die Schulgeometrie liefern und somit zu einem fundierten Geometrieunterricht führen; die Anwendungen liefern zusätzliche Anregungen, um den Unterricht kurzweiliger zu gestalten und den Schülern Gelegenheit zu geben, zu entdecken, dass Geometrie nicht nur schön und faszinierend, sondern auch sehr praktisch ist.

Typische Fragen in der Geometrie sind:

- Was sind eigentlich Punkte, Geraden, Dreiecke, Winkel . . . ?
- In welchem Verhältnis können Geraden zueinander stehen?
- Wie einzigartig ist die euklidische Geometrie?
- Wie kann man die Ebene pflastern?
- Kann man längentreue ebene Landkarten zeichnen?
- Wie kann man mit geometrischen Methoden Spiele gewinnen?
- Wie kann man Computern Geometrie beibringen?

Wie jede mathematische Theorie besitzt auch die Geometrie zwei natürliche Zugänge:

- einen axiomatischen Zugang und
- einen konkreten Zugang.

Im axiomatischen Zugang wird die klassische Geometrie ausgehend von wenigen Axiomen entwickelt; dieser Zugang geht auf das zusammenfassende Werk von Euklid zurück. Im konkreten Zugang wird die Geometrie in expliziten Modellen (zum Beispiel der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ ) entwickelt. Während der axiomatische Zugang konzeptionell deutlicher macht, welche Phänomene auf welche Annahmen zurückzuführen sind, ist der konkrete Zugang unter Verwendung der modernen Methoden der Analysis und Algebra oft bequemer und besitzt andere Möglichkeiten der Verallgemeinerung (zum Beispiel in der riemannschen oder groben Geometrie). Eine der größten Herausforderungen in der Geometrie ist, die korrekte Formalisierung von vermeintlich „offensichtlichen“ Objekten oder Argumenten.

Im Schulunterricht sind die Grenzen zwischen dem axiomatischen Zugang und dem konkreten Zugang sehr stark verwischt; oft bleibt auch diffus, wie die Objekte genau definiert sind und welche Argumente die Schüler verwenden

dürfen. Jedem Lehrer sollte aber bewusst sein, an welchen Stellen Unsauberkeiten, Abkürzungen oder Vereinfachungen stattgefunden haben bzw. in Kauf genommen werden.

## Über diese Vorlesung

Wir werden in dieser Vorlesung einen Mittelweg gehen. Wir werden zunächst kurz auf die axiomatische Sichtweise eingehen und dann den Schwerpunkt auf die metrische Geometrie legen. Wir werden daher strukturell in folgender Reihenfolge vorgehen, die Anwendungen jeweils an geeigneter Stelle behandeln und uns von Computern helfen lassen:

- axiomatische Geometrie und Mini-Geometrie
- metrische Geometrie
- normierte Geometrie
- elementare riemannsche Geometrie

Auf ganz natürliche Weise werden wir dabei Begriffen und Themen aus der Schulmathematik begegnen sowie auch Aspekten der Geometrie, die in Zukunft Bestandteil der Schulmathematik werden könnten. Wichtiger als die Beherrschung des aktuellen Lehrplans ist es, ein solides Fundament der Geometrie zu erlernen, das es erlaubt, Geometrie inhaltlich korrekt, nachvollziehbar und souverän zu lehren, und auf das der Unterricht im Rahmen des aktuellen und der zukünftigen Lehrpläne aufbauen kann.

**Anmerkung zum Lernen (Skript).** Diese Vorlesung wird online stattfinden, basierend auf den folgenden Bausteinen:

- Angeleitetes Selbststudium mit diesem Vorlesungsskript,
- interaktive Online-Vorlesungen,
- interaktive Online-Übungsgruppen.

Die Details finden Sie unter:

[http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie\\_ss21/org.pdf](http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie_ss21/org.pdf)

Dieses Vorlesungsskript dokumentiert den Fortschritt dieser Vorlesung, die besprochenen Themen und zusätzliches optionales Material.

Zusätzliches Material wird in GRIPS und auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt:

[http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie\\_ss21/](http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie_ss21/)

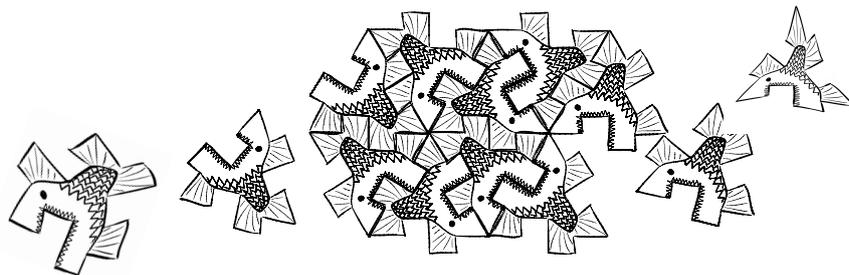
**Anmerkung zum Lernen** (Fingerübungen). Dieses Vorlesungsskript enthält einige Selbsttests und Fingerübungen, deren Feedback teilweise in die PDF-Datei integriert ist. Diese Funktionalität beruht auf PDF Layers (*nicht* auf JavaScript) und wird von vielen PDF-Viewern unterstützt, z.B. Acrobat Reader, Evince, Foxit Reader, Okular, . . . . Einfacher Test, ob das funktioniert: Haben Sie auf “Nein” gedrückt?

Sie sollten natürlich erst dann die Hinweise und Antworten ansehen, wenn Sie bereits über das Problem nachgedacht haben; man kann schließlich nie wissen, was passiert, wenn man voreilig auf irgendeinen  drückt.

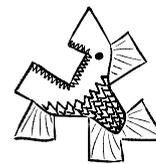
**Literaturaufgabe** (Bibliothek). Wie finden Sie im Regensburger Katalog und in der Teilbibliothek Mathematik Literatur über Geometrie? Wo finden Sie die Mathematik-Schulbücher?

Falls Sie während der Pandemie an Langeweile leiden, finden Sie auf S. ix diverse Anregungen.

**Konvention.** Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen enthält 0.



# 1



## Mini-Geometrie

---

Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion axiomatischer Geometrie und den Axiomen einer sehr übersichtlichen, kombinatorischen Geometrie, der Mini-Geometrie. Bereits an der Mini-Geometrie lassen sich viele zentrale Phänomene der Geometrie illustrieren.

Zunächst werden wir den axiomatischen Standpunkt etwas ausbauen und Grundbegriffe der Modelltheorie einführen; mit der Sprache der Modelltheorie lässt sich insbesondere die historisch für die Entwicklung der Geometrie entscheidende Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms formulieren. Danach studieren wir den Begriff der Symmetrie.

Wir werden erste Anwendungen kombinatorischer Geometrie kennenlernen, in denen der geometrische Blickwinkel auf andere Gebiete eine tragende Rolle spielt. Zum Abschluss konzentrieren wir uns auf die eulersche Polyederformel – einem weitreichenden Satz aus der geometrischen Graphentheorie.

Als Ergänzung der formalen Methoden werden wir einige Aspekte von Mini-Geometrie in einem Beweisassistenten formalisieren.

### Überblick über dieses Kapitel.

1.1	Axiomatische Geometrie	6
1.2	Axiome der Mini-Geometrie	8
1.3	Axiome vs. Modelle	10
1.4	Formalisierung und Verifikation	15
1.5	Symmetrie	26
1.6	Der geometrische Blickwinkel	30
1.7	Der eulersche Polyedersatz	39

**Schlüsselbeispiel.** Vektorräume, Graphen

## 1.1 Axiomatische Geometrie

Im axiomatischen Zugang zur Geometrie wird die klassische ebene und räumliche Geometrie ausgehend von wenigen Axiomen entwickelt; dieser Zugang geht auf das zusammenfassende Werk von Euklid [23] (ca. 3. Jahrhundert vor Christus, Alexandria) zurück.

Euklids *Elemente* tragen bereits die charakteristische Struktur rigoroser mathematischer Texte: Sie bestehen systematisch aus

- Definitionen
- Postulaten, Axiomen
- Sätzen, die daraus hergeleitet werden.

Das Erste Buch beginnt wie folgt [23]:

*Definitionen*

1. Ein Punkt ist, was keine Theile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie ist, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
- ⋮
13. Grenze heißt, was das Ende eine Dinges ist;
- ⋮
35. Parallel sind gerade Linien in einer Ebne, die, so weit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Besondere Beachtung verdient das *Parallelenaxiom* (in der Übersetzung von Lorenz Axiom 11; im Original wohl eher Postulat 5):

*Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.*

Im Gegensatz zu den anderen Postulaten und Axiomen ist das Parallelenaxiom auffällig unhandlich. Es wurde daher lange versucht, die folgende Frage zu beantworten:

**Frage 1.1.1 (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms).** Kann das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen/Postulaten von Euklid abgeleitet werden?

Erst mit der Konstruktion der hyperbolischen Geometrie (Anfang des 19. Jahrhunderts) konnte diese Frage endgültig (negativ) beantwortet werden.

Während viele Beweisgerüste in Euklids Werk noch heute verwendet werden, hält die Formulierung der Definitionen dem modernen Anspruch an eine präzise Formalisierung nicht stand.

Hilbert hat 1899 die *Grundlagen der Geometrie* [29, 57] neu organisiert und formalisiert. Hilberts Formalisierung beruht auf drei Klassen von Objekten, nämlich *Punkten*, *Geraden* und *Ebenen*. Im Gegensatz zu Euklid löst er sich von einer konkreten Beschreibung dieser Objekte und spezifiziert nur axiomatisch wie sich diese zueinander verhalten. Diesen Blickwinkel soll er selbst wie folgt illustriert haben [9]:

„Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.“

Hilberts Axiome teilen sich in die folgenden Gruppen ein (Anhang A.2):

*I. Axiome der Verknüpfung*

...

*II. Axiome der Anordnung*

...

*III. Axiom der Parallelen*

*In einer Ebene  $\alpha$  lässt sich durch einen Punkt  $A$  ausserhalb einer Geraden  $a$  stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade  $a$  nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu  $a$  durch den Punkt  $A$ .*

*IV. Axiome der Congruenz*

...

*V. Axiom der Stetigkeit*

...

Hilbert zeigt, dass die euklidische Geometrie in  $\mathbb{R}^3$  durch diese Axiome (bis auf Isomorphie) eindeutig festgelegt wird. Außerdem weist er nach, dass diese Axiome unabhängig voneinander sind.

## 1.2 Axiome der Mini-Geometrie

Wir beginnen nun mit der Formulierung der Axiome einer sehr übersichtlichen, kombinatorischen Geometrie, der Mini-Geometrie. Die Mini-Geometrie formalisiert eine einfache Geometrie, die aus Punkten, Geraden, und dem Verhältnis zwischen Punkten und Geraden besteht:

**Definition 1.2.1** (Mini-Geometrie-Axiome). Die Sprache der Mini-Geometrie enthält *Punkte*, *Geraden* und die Beziehung „*liegt auf*“ zwischen Punkten und Geraden sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Mini-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

**MG 1** Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine Gerade, so dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen.

**MG 2** Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

Die Logik erster Stufe enthält die üblichen logischen Verknüpfungen und Quantoren (erster Stufe); außerdem nehmen wir die gängigen Axiome für die Gleichheitsbeziehung an. Genau genommen bilden Punkte, Geraden und „*liegt auf*“ Prädikate; wir wollen diese Formalisierung an dieser Stelle nicht bis ins letzte Detail ausführen.

**Fingerübung 1.2.2.** Welche der folgenden Sätze sind zulässige (aber nicht notwendig wahre!) Sätze in der Sprache der Mini-Geometrie?

- Eine Gerade ist eine Länge ohne Breite.  
 Ja  Nein
- Auf jeder Geraden liegt mindestens ein Punkt.  
 Ja  Nein
- Auf jeder Geraden liegen mindestens drei verschiedene Punkte.  
 Ja  Nein
- Je zwei Geraden sind senkrecht zueinander.  
 Ja  Nein

Aufbauend auf den Axiomen der obigen Mini-Geometrie können wir weitere zentrale geometrische Begriffe einführen:

**Definition 1.2.3** (Schnittpunkte von Geraden). Ein Punkt  $x$  in Mini-Geometrie ist ein *Schnittpunkt* der Geraden  $g$  und  $h$ , wenn  $x$  auf  $g$  liegt und  $x$  auf  $h$  liegt.

**Definition 1.2.4** (parallel). Zwei Geraden in Mini-Geometrie heißen *parallel*, wenn sie keine Schnittpunkte haben.

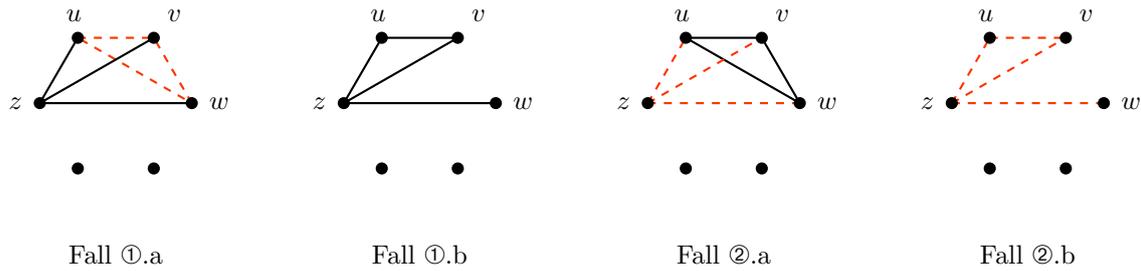


Abbildung 1.1.: Schematische Veranschaulichung der Situation in Beweis von Proposition 1.2.6; existente Geraden sind als schwarze Linien eingezeichnet, nicht-existente Geraden sind als rot gestrichelte Linien eingezeichnet.

**Definition 1.2.5** (Dreieck, Anti-Dreieck).

- Ein *Dreieck* in Mini-Geometrie ist ein Tripel  $(x, y, z)$  von Punkten  $x, y, z$  mit der Eigenschaft, dass je zwei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen; die Punkte  $x, y, z$  heißen *Eckpunkte* des Dreiecks  $(x, y, z)$ . Ein Dreieck  $(x, y, z)$  ist *entartet*, wenn die Eckpunkte nicht alle verschieden sind.
- Ein *Anti-Dreieck* in Mini-Geometrie ist ein Tripel  $(x, y, z)$  von Punkten  $x, y, z$  mit der Eigenschaft, dass keine zwei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen; die Punkte  $x, y, z$  heißen *Eckpunkte* des Anti-Dreiecks  $(x, y, z)$ . Ein Anti-Dreieck  $(x, y, z)$  ist *entartet*, wenn die Eckpunkte nicht alle verschieden sind.

Man beachte, dass in einem Dreieck in Mini-Geometrie die Seiten (d.h. Geraden durch je zwei der Eckpunkte) durch die Eckpunkte nach MG 1 bereits eindeutig bestimmt sind.

Zum Beispiel kann man den folgenden Satz über Dreiecke in Mini-Geometrie aus den Mini-Geometrie-Axiomen ableiten:

**Proposition 1.2.6** (Mini-Ramsey). *In Mini-Geometrie gilt: Es seien sechs verschiedene Punkte gegeben. Dann gibt es drei von diesen sechs Punkten, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden, oder es gibt drei von diesen sechs Punkten, die ein nicht-entartetes Anti-Dreieck bilden.*

**Caveat 1.2.7.** Man beachte, dass sich die beiden Alternativen im Mini-Ramsey-Satz *nicht* gegenseitig ausschließen! Eine Formulierung mit „entweder ... oder ...“ wäre also *nicht* korrekt.

*Beweis.* Der Beweis beruht auf einer geeigneten Anwendung des *Schubfachprinzips*, d.h.:

Sei  $z$  einer der sechs Punkte. Wir betrachten nun die Beziehung von  $z$  zu den **fünf** weiteren gegebenen Punkten. Nach dem Schubfachprinzip (denn  $2 \cdot 2 + 1 = 5$ ) gibt es drei verschiedene Punkte  $u, v, w$  dieser fünf Punkte mit der Eigenschaft,

- ① dass jeder der Punkte  $u, v, w$  auf einer Geraden durch  $z$  liegt oder
- ② dass keiner der Punkte  $u, v, w$  auf einer Geraden durch  $z$  liegt.

Im Fall ① bilden

- (a) entweder  $u, v, w$  ein Anti-Dreieck
- (b) oder zwei dieser Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden; ohne Einschränkung seien dies  $u$  und  $v$ . Im letzteren Fall ist dann  $(z, u, v)$  ein nicht-entartetes Dreieck.

Im Fall ② bilden analog

- (a) entweder  $u, v, w$  ein nicht-entartetes Dreieck
- (b) oder es gibt zwei dieser Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen; zusammen mit  $z$  bilden diese beiden Punkte dann ein nicht-entartetes Anti-Dreieck.  $\square$

**Caveat 1.2.8 (Anschauung).** Es ist verlockend, die Argumente im Beweis von Proposition 1.2.6 schematisch wie in Abbildung 1.1 zu veranschaulichen. Man muss sich jedoch dessen bewusst sein, dass Punkte und Geraden einer Mini-Geometrie im allgemeinen nichts mit klassischen Punkten und Geraden in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  zu tun haben (Bierseidel!) und diese Skizzen wirklich nur eine schematische Darstellung der Beziehung zwischen Punkten und Geraden sind.

## 1.3 Axiome vs. Modelle

Zentrale Fragen zu Axiomensystemen (nicht nur in der Geometrie) sind:

- Sind die Axiome erfüllbar? Auf wieviele Arten lassen sich die Axiome erfüllen?
- Welche Aussagen lassen sich aus den gegebenen Axiomen ableiten?
- Welche Aussagen gelten in allen Modellen, die die Axiome erfüllen? Ist das dieselbe Frage wie die vorige Frage?
- Braucht man wirklich alle dieser Axiome? Oder gibt es Abhängigkeiten zwischen den Axiomen?

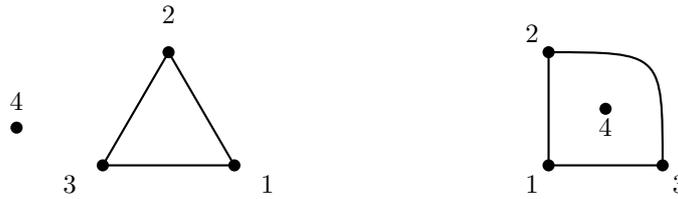


Abbildung 1.2.: Zwei schematische Darstellungen des folgenden Graphen:  
 $(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$

Um diese Fragen diskutieren zu können, benötigen wir Grundbegriffe der Modelltheorie. Ein Modell eines Axiomensystems ist eine mengentheoretische Interpretation der Begriffe, die die geforderten Axiome erfüllt. Zum Beispiel sind Gruppen nichts anderes als mengentheoretische Modelle der Gruppenaxiome. Um den technischen Aufwand zu minimieren werden wir uns hier auf eine vereinfachte Version für Mini-Geometrie beschränken:

**Definition 1.3.1** (Modell für Mini-Geometrie). Ein *Modell für Mini-Geometrie* (kurz: eine Mini-Geometrie) ist ein Tripel  $(P, G, \sqsubset)$ , bestehend aus einer Menge  $P$ , einer Menge  $G$  und einer Relation  $\sqsubset$  auf  $P \times G$  mit folgender Eigenschaft:

Interpretiert man die Elemente aus  $P$  als Punkte, die Elemente aus  $G$  als Geraden und die Relation  $\sqsubset$  als „liegt auf“, so sind die Mini-Geometrie-Axiome aus Definition 1.2.1 erfüllt.

Explizit bedeutet dies, dass  $(P, G, \sqsubset)$  genau dann eine Mini-Geometrie ist, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

**MG 1** Zu je **zwei verschiedenen** Punkten gibt es **höchstens eine** Gerade, so dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen, d.h.:

$$\forall x, y \in P \quad \forall g, h \in G \quad (x \neq y \wedge x \sqsubset g \wedge y \sqsubset g \wedge x \sqsubset h \wedge y \sqsubset h) \implies g = h.$$

**MG 2** Auf jeder Geraden liegen mindestens **zwei verschiedene Punkte**, d.h.:

$$\forall g \in G \quad \exists x, y \in P \quad x \neq y \wedge x \sqsubset g \wedge y \sqsubset g.$$

In Modellen haben wir dann neben den Axiomen den gesamten Werkzeugkasten der Mengenlehre zur Verfügung. Zum Beispiel können wir definieren, dass eine Mini-Geometrie  $(P, G, \sqsubset)$  *endlich* ist, wenn die Menge  $P$  endlich ist.

Die Frage nach der Erfüllbarkeit der Axiome ist nichts anderes als die Frage nach der Existenz von Modellen. Einige wichtige Beispiele für Mini-Geometrie-Modelle sind:

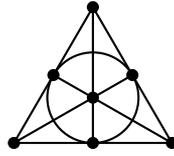


Abbildung 1.3.: Die Fano-Ebene, schematisch; jede Gerade in dieser Mini-Geometrie enthält genau drei Punkte

**Beispiel 1.3.2** (Graphen). Ein *Graph* ist ein Paar  $X = (V, E)$ , wobei  $V$  eine Menge und  $E$  eine Menge von zwei-elementigen Teilmengen von  $V$  ist; wir nennen die Elemente von  $V$  *Knoten von  $X$*  und die Elemente von  $E$  *Kanten von  $X$* . Graphen werden oft wie in Abbildung 1.2 veranschaulicht; essentiell ist jedoch immer nur die Kombinatorik der Knoten und Kanten, *nicht* die konkrete bildliche Darstellung.

Ist  $X$  ein Graph, so ist

$$(V, E, \in)$$

eine Mini-Geometrie (nachrechnen!). Genauer gesagt entsprechen Graphen genau den Mini-Geometrien, in denen jede Gerade genau zwei Punkte enthält (nachrechnen!).

**Beispiel 1.3.3** (affine Geraden in Vektorräumen). Sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann ist das durch

$$(V, \{v + U \mid U \subset V \text{ ist ein eindimensionaler } K\text{-Unterraum}, v \in V\}, \in)$$

definierte Tripel  $A(V)$  eine Mini-Geometrie (nachrechnen!). Zum Beispiel erhält man so durch  $A(\mathbb{R}^2)$  bzw.  $A(\mathbb{R}^3)$  die gewöhnlichen Begriffe für Punkte und Geraden in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 1.3.4** (projektive Ebene). Sei  $K$  ein Körper und

$$P^2(K) := \{K \cdot v \mid v \in K^3 \setminus \{0\}\}$$

die zugehörige projektive Ebene. Dann ist das durch

$$(P^2(K), \{U \subset K^3 \mid U \text{ ist ein zweidimensionaler } K\text{-Unterraum}\}, \subset)$$

definierte Tripel  $P(K)$  eine Mini-Geometrie (Übungsaufgabe). Zum Beispiel ist  $P(\mathbb{F}_2)$  die sogenannte *Fano-Ebene* (Abbildung 1.3; Übungsaufgabe).

**Beispiel 1.3.5** (Großkreise). Sei  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$  die zweidimensionale Sphäre. Kreise in  $\mathbb{R}^3$  um 0, die ganz in  $S^2$  liegen, heißen *Großkreise von  $S^2$*  (Abbildung 1.4). Wir betrachten dann das folgende Tripel

$$(S^2, \text{Menge aller Großkreise in } S^2, \in).$$

Abbildung 1.4.: Großkreise auf  $S^2$ 

Dieses Tripel bildet *keine* Mini-Geometrie, denn zum Beispiel gibt es unendlich viele verschiedene Großkreise, die durch den Nord- und den Südpol (d.h. durch  $(0, 0, 1)$  und  $(0, 0, -1)$ ) gehen.

**Fingerübung 1.3.6** (Großkreise auf der Erde?). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Erdoberfläche die runde Sphäre  $S^2$  ist. Welche der folgenden Kreise sind immer Großkreise?

1. Längenkreise  Ja  Nein
2. Breitenkreise  Ja  Nein
3. Der Nullmeridian  Ja  Nein
4. Der Äquator  Ja  Nein

Da wir nun gesehen haben, dass es Modelle für Mini-Geometrie gibt, ist die Frage berechtigt, welche Aussagen über Mini-Geometrien aus den Axiomen folgen. Wir müssen nun zunächst zwischen zwei Arten von Folgerungen unterscheiden:

- Aussagen, die (syntaktische) logische Folgerungen aus den Mini-Geometrie-Axiomen aus Definition 1.2.1 sind.
- Aussagen, die in allen Mini-Geometrie-Modellen gelten.

Tatsächlich handelt es sich (da wir uns in Logik erster Stufe befinden) dabei um dieselbe Menge von Aussagen; dies ist Gegenstand des Gödelschen *Vollständigkeitssatzes* [51, Kapitel 3].

**Definition 1.3.7** (Unabhängigkeit). Sei  $A$  ein Axiomensystem und sei  $S$  ein Satz in der  $A$  unterliegenden Sprache. Dann ist  $S$  *unabhängig von*  $A$ , wenn weder  $S$  noch  $\neg S$  aus  $A$  logisch folgt.

**Bemerkung 1.3.8** (Unabhängigkeit in Mini-Geometrie). Ein Satz  $S$  über Mini-Geometrie ist nach dem Vollständigkeitssatz also genau dann unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen, wenn es sowohl ein Mini-Geometrie-Modell gibt, in dem  $S$  erfüllt ist, als auch ein Mini-Geometrie-Modell gibt, in dem die Negation  $\neg S$  erfüllt ist. Im folgenden werden wir immer diese Charakterisierung von Unabhängigkeit verwenden.

Im Kontext der Mini-Geometrie lässt sich somit die Frage 1.1.1 nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms leicht beantworten:

**Beispiel 1.3.9** (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms in Mini-Geometrie). Der Satz

Ist  $x$  ein Punkt und ist  $g$  eine Gerade, so dass  $x$  nicht auf  $g$  liegt, so gibt es genau eine zu  $g$  parallele Gerade  $h$ , auf der  $x$  liegt.

ist unabhängig von den Axiomen der Mini-Geometrie, denn es gibt sowohl Mini-Geometrien, die diesen Satz erfüllen, als auch Mini-Geometrien, die diesen Satz nicht erfüllen:

- In der Mini-Geometrie  $A(\mathbb{R}^2)$  ist das Parallelenaxiom erfüllt.
- In der Mini-Geometrie zu den Graphen

$$(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 1\}\})$$

bzw.

$$(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\})$$

ist das Parallelenaxiom *nicht* erfüllt (im ersten Fall gibt es nicht genug Parallelen, im zweiten Fall gibt es zuviele Parallelen).

**Fingerübung 1.3.10.** Skizzieren Sie die Graphen in Beispiel 1.3.9! Geben Sie weitere Beispiele für Mini-Geometrie-Modelle, die das Parallelenaxiom *nicht* erfüllen.

**Ausblick 1.3.11** (prominente Unabhängigkeiten).

- Das *Auswahlaxiom* ist unabhängig von den anderen Axiomen der (Zermelo-Fraenkelschen) Mengenlehre [56].
- Die *Kontinuumshypothese* ist unabhängig von der Mengenlehre ZFC [56].
- Das *Parallelenaxiom* ist unabhängig von den anderen Axiomen Hilberts der Geometrie. Wir werden in Kapitel 4 genauer auf die Konstruktion einer Geometrie eingehen, die alle (ebenen) Hilbertschen Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt.

**Ausblick 1.3.12** (Unvollständigkeit). Neben der Unabhängigkeit stellt sich in der Modelltheorie auch die Frage danach, inwieweit es möglich ist, innerhalb eines Axiomensystems nachzuweisen, dass dieses Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Nach den Gödelschen *Unvollständigkeitssätzen* ist dies für kein Axiomensystem möglich, das stark genug ist, um Peano-Arithmetik zu modellieren [51, Kapitel 6].

Da sich die Peano-Arithmetik innerhalb der Mengenlehre ZFC modellieren lässt, ist es insbesondere (unter der Annahme, dass ZFC konsistent ist) nicht möglich, in ZFC zu beweisen, dass ZFC widerspruchsfrei ist(!).

Es bleibt noch die Frage nach der Eindeutigkeit der Erfüllbarkeit unserer Axiome zu beantworten. Die obigen Beispiele suggerieren, dass es viele Mini-Geometrie-Modelle gibt, die „essentiell verschieden“ sind; dies werden wir im nächsten Abschnitt präzisieren.

Die Hilbertsche Axiomatik der Geometrie ist in dieser Hinsicht vollständig: bis auf Isomorphie besitzt sie nur ein einziges Modell, nämlich die uns vertraute euklidische Geometrie in  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.4 Formalisierung und Verifikation

Wir formalisieren nun ein Fragment von Mini-Geometrie in einem Beweisassistenten.

### 1.4.1 Beweisassistenten

Beweise sind ein wesentlicher Bestandteil der Mathematik und das formale, objektive Beweiskonzept unterscheidet die Mathematik von den meisten anderen Wissenschaften.

- Was ist wichtig an Beweisen? Korrektheit!
- Was ist interessant an Beweisen? Die unterliegenden Ideen.

Leider enthalten viele konventionelle Beweise kleinere (oder gar größere) Ungenauigkeiten und Lücken. Die meisten dieser Probleme lassen sich beheben; es wäre aber vorteilhaft für den Leser, wenn es im Voraus eine Korrektheitsgarantie gäbe.

- Was ist ein Beweisassistent?

Ein Beweisassistent ist eine Programmiersprache sowie ein zugehöriger Interpreter/Compiler, die es erlauben, mathematische Objekte und Sachverhalte zu formalisieren; dazu gehören zum Beispiel Definitionen, Sätze, Beweise und Beispiele für die Theorie. Die Hauptaufgabe eines

Beweisassistenten ist dabei nicht, Beweise zu *finden*, sondern zu *überprüfen*, ob Beweise korrekt sind. Beweisassistenten können also eine Verifikation für Korrektheit liefern (basierend auf der Annahme, dass der Beweisassistent selbst korrekt arbeitet).

- Wozu braucht man Beweisassistenten?

Beweisassistenten helfen dabei, Fehler zu finden und zu vermeiden. Indirekt führen sie damit auch zu einem generellen besseren Verständnis von mathematischen Zusammenhängen und werden es langfristig erlauben, Ergebnisse systematischer und strukturierter auf neue Kontexte zu verallgemeinern. Neben der theoretischen Mathematik finden Beweisassistenten vor allem bei der Modellierung und Validierung von komplizierten Prozessen und Algorithmen in der Informatik bzw. Industrie Anwendung.

- Warum werden Beweisassistenten nicht standardmäßig in der Mathematik verwendet?

Bislang ist die Formalisierung von mathematischen Theorien in Beweisassistenten immer noch aufwendiger als auf Papier (weil man ja viel sorgfältiger arbeiten muss ...). Sobald eine kritische Masse an mathematischem Grundwissen formalisiert ist, wird sich dies aber ändern. Da es einige Projekte gibt, die genau an dieser Stelle ansetzen [59], wird sich das mittelfristig ändern und es ist zu erwarten, dass Beweisassistenten vermehrt eingesetzt werden, sowohl in der Forschung als auch in der Lehre.

Eine große Herausforderung ist es, die Formalisierung in einem Beweisassistenten so zu gestalten, dass sie nicht nur für den Interpreter/Compiler einfach zu verifizieren ist, sondern auch für einen menschlichen Leser: Das Schöne an der Mathematik sind ja nicht technische Details, sondern die unterliegenden Ideen.

Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Formalisierung in einem Beweisassistenten ein grundlegendes Verständnis von Formalisierung benötigt. Bei der Implementierung in Beweisassistenten muss insbesondere darauf geachtet werden, dass die dem jeweiligen Beweisassistenten zugrundeliegenden logischen Fundamente mit der intendierten mathematischen Bedeutung übereinstimmen. Im folgenden werden wir diesen subtilen Punkt im wesentlichen ignorieren.

- Welche Beweisassistenten gibt es?

Es gibt diverse Beweisassistenten, die breit eingesetzt werden, z.B. `Coq`, `Isabelle`, `Lean`, ... Wir verwenden `Lean` [33, 4].

- Warum `Lean`?

Der Beweisassistent `Lean` wird derzeit sehr aktiv und dynamisch entwickelt, verfügt bereits über viele mathematische Bibliotheken und wird

in mehreren großen Formalisierungsprojekten in der Mathematik eingesetzt. Außerdem verfügt er über eine Web-Plattform, auf der man ohne eigene Installation experimentieren kann.

## 1.4.2 Eine Formalisierung von Mini-Geometrie

Wir formalisieren Mini-Geometrie in Lean. Genauer gesagt, formalisieren wir Mini-Geometrie-Modelle in Lean.

**Interaktives Tool 1.4.1.** Sie finden den nachfolgenden Quellcode auf der Homepage zur Vorlesung:

[http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie\\_ss21/minigeometry.lean](http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie_ss21/minigeometry.lean)

Sie können mit diesem Quellcode in einer lokalen Lean-Installation [34] oder auf der Lean-Web-Plattform experimentieren:

<https://leanprover-community.github.io/lean-web-editor/>

Eine detaillierte und fundierte Einführung in Lean würde an dieser Stelle zu weit führen. Eine minimalistische Einführung ist in Anhang A.3 zusammengestellt. Die grundlegende Struktur und die mathematischen Schlüsse in den nachfolgenden Beispielen sollten aus sich heraus verständlich sein.

Unsere Implementierung von Mini-Geometrie beginnt mit allgemeinen Deklarationen und Importen:

```
import tactic -- standard proof tactics
```

```
open classical -- we want to work in classical logic
```

Die Formalisierung von Mini-Geometrie-Modellen in Lean orientiert sich an Definition 1.3.1. Der Übersichtlichkeit und Wiederverwendbarkeit halber formalisieren wir die beide Axiome MG 1 und MG 2 einzeln und kombinieren sie dann in der Typklasse MG.

```
/-
MG 1: For each two different points, there exists at most one
line such that both points lie on this line.
-/
def satisfies_MG1
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"
  (lies_on : P → G → Prop)
:= ∀ x y : P, ∀ g h : G,
  ( x ≠ y
  ∧ lies_on x g ∧ lies_on y g
  ∧ lies_on x h ∧ lies_on y h)
  → g = h
```

```

/-
MG 2: For each line, there exist at least two points
that lie on this line.
-/
def satisfies_MG2
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"
  (lies_on : P → G → Prop)
:= ∀ g : G, ∃ x y : P,
  x ≠ y
  ∧ lies_on x g ∧ lies_on y g

/-
Lean version of Mini Geometry models:
-/
class MG
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"
:= (lies_on : P → G → Prop)
   (MG1 : satisfies_MG1 P G lies_on)
   (MG2 : satisfies_MG2 P G lies_on)

```

Instanzen dieser Typklasse `MG` sind Mini-Geometrie-Modelle. Liegt uns eine solche Instanz vor, d.h. Typen `P` und `G`, die eine Implementierung von `MG P G` zulassen, so können wir in einem solchen Modell Schnittpunkte, Parallellität, Dreiecke, ... formalisieren:

**Fingerübung 1.4.2.** Drücken Sie zunächst die Schnittpunkteigenschaft, Parallellität und die Dreieckseigenschaft in gewöhnlichen Mini-Geometrie-Modellen durch logische Formeln aus. Vergleichen Sie diese mit den untenstehenden Formeln in Lean.

```

/- Tests whether x is an intersection of g and h -/
def is_intersection_of
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (g : G)
  (h : G)
:= MG.lies_on x g
  ∧ MG.lies_on x h

/- Tests whether g and h are parallel -/
def are_parallel
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (g : G)

```

```

      (h : G)
:= ¬ (∃ x : P, is_intersection_of P G x g h)

/- Tests whether x and y lie on a common line -/
def lie_on_a_common_line
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (y : P)
:= ∃ g : G, ( MG.lies_on x g
             ∧ MG.lies_on y g )

/- Tests whether (x,y,z) is a triangle -/
def is_triangle
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (y : P)
  (z : P)
:= lie_on_a_common_line P G x y
  ∧ lie_on_a_common_line P G y z
  ∧ lie_on_a_common_line P G z x

```

### 1.4.3 Beweis einer offensichtlichen(?) Aussage

Wir betrachten die folgende Aussagen in Mini-Geometrie:

- Die Punkte  $x$  und  $y$  liegen auf einer gemeinsamen Geraden.
- Die Punkte  $y$  und  $x$  liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Im mathematisch-umgangssprachlichen Gebrauch unterscheiden wir normalerweise nicht besonders streng zwischen diesen Aussagen (letztendlich besagen ja beide, dass beide Punkte auf  $g$  liegen).

Sobald man diese Aussagen durch logische Formeln formalisiert, wird jedoch ein kleiner Unterschied deutlich:

**Fingerübung 1.4.3.** Wie kann man diese Aussagen in gewöhnlichen Mini-Geometrie-Modellen  $(P, G, \sqsubset)$  durch eine logische Formeln ausdrücken?

Die erste:

Die zweite:

Letztendlich sind diese beiden Aussagen äquivalent (denn  $A \wedge B$  ist äquivalent zu  $B \wedge A$ ). Dies benötigt aber einen (kleinen) Beweis. Wir nutzen die Gelegenheit, um zu sehen, wie Behauptungen/Beweise in Lean aufgebaut sind:

```

lemma lie_on_a_common_line_sym
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (y : P)
  (line_xy: lie_on_a_common_line P G x y)
: lie_on_a_common_line P G y x
:=
begin
  -- extracting a witness g for the fact that x and y
  -- lie on a common line
  rcases line_xy with ⟨ g : G, xy_in_g ⟩,
  -- xy_in_g shows that x_in_g and y_in_g
  have x_in_g : MG.lies_on x g,
    by {apply xy_in_g.1},
  have y_in_g : MG.lies_on y g,
    by {apply xy_in_g.2},
  -- we now only recombine the statements in a different order
  show lie_on_a_common_line P G y x,
    by {unfold lie_on_a_common_line,      -- unfolding the
        definition
        use g,                             -- taking care of ∃
        exact and.intro y_in_g x_in_g}, -- reassembling the
    ^-statement
end

```

Was passiert hier?

- Gegeben ist ein Mini-Geometrie-Modell mit Punkten  $P$  und Geraden  $G$ , sowie Punkte  $x$  und  $y$ , die außerdem `lie_on_a_common_line P G x y` erfüllen.
- Behauptet wird, dass dann auch `lie_on_a_common_line P G y x` gilt.
- Beweis: Die Eigenschaft `lie_on_a_common_line P G x y` ist eine **Existenz-Aussage**. Mithilfe von `rcases line_xy` kann man einen entsprechenden Zeugen für diese Existenzaussage **extrahieren**: `g`.

Dieser Zeuge erfüllt `MG.lies_on x g ∧ MG.lies_on y g`. Diese **Und-Aussage** erhält den Namen `xy_in_g`.

Aus dieser **Und-Aussage** kann man die einzelnen beiden Aussagen `MG.lies_on x g` und `MG.lies_on y g` **extrahieren** (mithilfe `.1` und `.2`).

Indem man diese beiden Aussagen nun in der anderen Reihenfolge mithilfe von `and.intro` zu einer **Und-Aussage zusammensetzt**, erhält man `MG.lies_on y g ∧ MG.lies_on x g`.

Die Behauptung `lie_on_a_common_line P G y x` ist eine Existenz-Aussage. Die obigen Argumente zeigen, dass `g` ein entsprechender Zeuge

ist. Mithilfe von `use g` kann man so die gewünschte Existenz-Aussage **konstruieren**.

Selbstverständlich lässt sich das in Lean auch kürzer behandeln. Wir haben hier die ausführliche Darstellung gewählt, da wesentliche **Eliminations-** und **Introduktions**phänomene auftreten, die charakteristisch für das Arbeiten mit Beweisassistenten sind.

### 1.4.4 Beispiel-Modelle

Wir geben zwei Beispiele von Mini-Geometrie-Modellen in Lean: Ein leeres Modell (keine Punkte, keine Gerade) und ein Modell, das auf dem Graphen aus Abbildung 1.5 beruht.

Um diese Beispiele zu Instanzen der Typklasse `MG` zu machen, müssen wir selbstverständlich auch Beweise liefern, dass die beiden Mini-Geometrie-Axiome erfüllt sind.

```
def empty_lies_on
  (x : empty)
  (g : empty)
:= false

lemma empty_satisfies_MG1
: satisfies_MG1 empty empty empty_lies_on
:=
begin -- this is so simple that it can be checked automatically
  by tauto,
end

lemma empty_satisfies_MG2
: satisfies_MG2 empty empty empty_lies_on
:=
begin -- this is also almost automatic; found via hint
  by {unfold satisfies_MG2,
      simp at *,
      exact dec_trivial},
end

-- Thus: The empty model indeed is a Mini Geometry:
instance empty_MG : MG empty empty
:= MG.mk empty_lies_on
      empty_satisfies_MG1
      empty_satisfies_MG2
```

Abbildung 1.5.: Der Graph  $(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 1\}\})$ , schematisch

Für das I-Modell (Abbildung 1.5) verwenden wir abstrakte Aufzählungsdatentypen. Im Prinzip lassen sich alle Fragen dazu durch iterierte Fallunterscheidungen (*cases*) behandeln.

```

inductive I_P : Type
| I_0
| I_1
| I_2

inductive I_G : Type
| I_01

def I_lies_on
  (x : I_P)
  (y : I_G)
  : Prop
:=
begin
  -- thanks to the special structure of the I model,
  -- we only need to check whether x is I_0 or I_1;
  -- we use a case distinction:
  cases x,
  case I_P.I_0 : {exact true},
  case I_P.I_1 : {exact true},
  case I_P.I_2 : {exact false},
end

-- in the I model, all lines are equal (there is only one line)
lemma I_G_all_equal
  (g : I_G)
  (h : I_G)
  : (g = h)
:=
begin
  -- we use a case distinction:
  cases g,      -- only one possible case for g: g = I_01
  cases h,      -- only one possible case for h: h = I_01
  exact rfl, -- thus, g = h, by reflexivity
end

```

```

lemma I_satisfies_MG1
: satisfies_MG1 I_P I_G I_lies_on
:=
begin
  -- in order to show this forall-statement,
  -- we prove the statement for each member
  assume x y : I_P,
  assume g h : I_G,
  show ( x ≠ y
        ∧ I_lies_on x g ∧ I_lies_on y g
        ∧ I_lies_on x h ∧ I_lies_on y h)
    → g = h,
  by {intro, -- adding the assumption on the left hand side of
      the implication
      exact I_G_all_equal g h}, -- there is only one line!
end

lemma I_satisfies_MG2
: satisfies_MG2 I_P I_G I_lies_on
:=
begin
  assume g : I_G, -- there is only one possibility! I_G.I_01
  show ∃ x y : I_P, x ≠ y
        ∧ I_lies_on x g ∧ I_lies_on y g,
  begin
    use I_P.I_0, -- take x as "0"
    use I_P.I_1, -- take y as "1"
    by tauto, -- now it can simply be checked automatically
  end
end

-- The I model indeed is a Mini Geometry
instance I_MG : MG I_P I_G
:= MG.mk I_lies_on
      I_satisfies_MG1
      I_satisfies_MG2

```

### 1.4.5 Unabhängigkeit des Parallelenaxioms

Wir formalisieren das Parallelenaxiom in Mini-Geometrie und beweisen, dass dieses unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen ist; wir gehen dabei ähnlich wie in Beispiel 1.3.9 vor.

```

def is_parallel_through
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (g : G)
  (h : G)
:= MG.lies_on x h ∧ are_parallel P G g h

def parallel_postulate
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
:= ∀ x : P, ∀ g : G,
  (¬ MG.lies_on x g)
  → (∃ h : G, is_parallel_through P G x g h
      ∧ (∀ k : G, is_parallel_through P G x g k → k =
        h ))

```

Um zu zeigen, dass das Parallelenaxiom unabhängig ist, müssen wir ein Mini-Geometrie-Modell in Lean bereitstellen, das `parallel_postulate` erfüllt, und ein solches Modell bereitstellen, das `parallel_postulate` nicht erfüllt. Wir verwenden dazu die Beispiele aus Kapitel 1.4.4, d.h. das leere Modell und das I-Modell.

Das leere Modell erfüllt `parallel_postulate`:

```

lemma pp_empty_MG
: parallel_postulate empty empty
:=
begin
  -- again, this is so simple
  -- that this can be basically solved automatically
  assume x,
  show _,
  by {cases x}
end

```

Das I-Modell erfüllt die Negation von `parallel_postulate`:

```

lemma not_pp_I_MG
: ¬ parallel_postulate I_P I_G
:=
begin
  -- these will be our witnesses:
  let x : I_P := I_P.I_2,
  let g : I_G := I_G.I_01,

  -- x does not lie on g
  have x_not_on_g: ¬ MG.lies_on x g,
  by {exact not_of_eq_false rfl},

```

```

-- but there is no parallel through x
have no_parallel_through_x:
  ¬ (∃ h : I_G, is_parallel_through I_P I_G x g h),
begin -- by exhaustive search
  exact (finset.exists_mem_empty_iff (λ (x : I_G),
    are_parallel I_P I_G g x)).mp,
end,

-- we can now combine these properties into establishing that
-- the parallel postulate is not satisfied,
-- because of x and g
by {unfold parallel_postulate,
  refine not_forall.mpr _,
  use x,
  refine not_forall.mpr _,
  use g,
  finish},
end

```

Wir können nun diese beiden Beispiele verwenden, um zu zeigen, dass das Parallelenaxiom unabhängig von Mini-Geometrie ist:

```

theorem pp_is_independent_of_MG
: (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G, @parallel_postulate P G
  MGPG)
^ (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G, ¬ @parallel_postulate P G
  MGPG)
:=
begin
  have pp_example: ∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G,
    @parallel_postulate P G MGPG,
    begin -- the empty MG is such an example
      use empty,
      use empty,
      use empty_MG,
      exact pp_empty_MG,
    end,

  have pp_nonexample: (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G, ¬
    @parallel_postulate P G MGPG),
    begin -- the I MG is such a non-example
      use I_P,
      use I_G,
      use I_MG,
      exact not_pp_I_MG,
    end,
end,

```

```

-- it remains to combine both parts into the and-statement
by {exact and.intro pp_example pp_nonexample},
end

```

## 1.5 Symmetrie

Mathematische Theorien bestehen nicht nur aus den grundlegenden Objekten (z.B. Vektorräumen, Maßräumen, topologischen Räumen, ...), sondern auch aus strukturerhaltenden Morphismen zwischen diesen Objekten (z.B. linearen Abbildungen, messbaren Abbildungen, stetigen Abbildungen, ...). Mathematische Theorien bilden also sogenannte Kategorien (Anhang A.4). In diesem Rahmen lässt sich auch formulieren, wann Objekte im wesentlichen gleich (d.h. isomorph) sind und was die Symmetrien eines Objekts sein sollen. In „anschaulichen“ Geometrien wird dieser Symmetriebegriff mit dem anschaulichen Symmetriebegriff übereinstimmen.

Wir werden uns hier zunächst auf Mini-Geometrie beschränken. Insbesondere führen wir den Isomorphiebegriff und Symmetriegruppen für Mini-Geometrie ein und betrachten grundlegende Beispiele.

**Definition 1.5.1** (Morphismen von Mini-Geometrien). Seien  $M = (P, G, \sqsubset)$  und  $M' = (P', G', \sqsubset')$  Mini-Geometrien.

- Ein *Morphismus*  $M \rightarrow M'$  ist ein Paar  $(f: P \rightarrow P', F: G \rightarrow G')$  von Abbildungen, die im folgenden Sinne strukturerhaltend sind:

$$\forall_{x \in P} \quad \forall_{g \in G} \quad x \sqsubset g \implies f(x) \sqsubset' F(g).$$

- Sind  $(f, F): (P, G, \sqsubset) \rightarrow (P', G', \sqsubset')$  und  $(f', F'): (P', G', \sqsubset') \rightarrow (P'', G'', \sqsubset'')$  Morphismen von Mini-Geometrien, so definieren wir die *Verknüpfung* durch

$$(f', F') \circ (f, F) := (f' \circ f, F' \circ F).$$

- Ist  $M = (P, G, \sqsubset)$  eine Mini-Geometrie, so schreiben wir

$$\text{id}_M := (\text{id}_P, \text{id}_G)$$

für den *Identitätsmorphismus*  $M \rightarrow M$ .

- Mini-Geometrien  $M, M'$  sind *isomorph*, wenn es Morphismen  $\varphi: M \rightarrow M'$  und  $\psi: M' \rightarrow M$  mit

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{M'} \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi = \text{id}_M$$

gibt. In diesem Fall sind  $\varphi$  und  $\psi$  *Isomorphismen* und wir schreiben kurz  $M \cong_{\text{MG}} M'$ .

**Fingerübung 1.5.2.** Wo ist in der Definition von Morphismen von Mini-Geometrien eingebaut, dass Punkte nicht auf Geraden abgebildet werden können und umgekehrt?

**Hinweis**

Man beachte, dass die Verknüpfung zweier Morphismen von Mini-Geometrien wieder einen Morphismus von Mini-Geometrien liefert, dass der Identitätsmorphismus neutral bezüglich Verknüpfung von Morphismen ist und dass die Verknüpfung assoziativ ist (nachrechnen!). Insbesondere bilden Mini-Geometrien somit tatsächlich eine Kategorie.

**Fingerübung 1.5.3 (Isomorphie).** Wiederholen Sie die Definitionen des Isomorphiebegriffs für Vektorräume, Gruppen, topologische Räume (wie heißen Isomorphismen hier?), ... Versuchen Sie dabei, die Verwendung von „bijektiv“ zu vermeiden!

**Beispiel 1.5.4 (Morphismen von Graphen).** Seien  $X = (V, E)$  und  $X' = (V', E')$  Graphen. Ein *Morphismus*  $X \rightarrow X'$  von Graphen ist eine Abbildung  $f: V \rightarrow V'$ , die mit der Kantenstruktur verträglich ist, d.h.

$$\forall_{\{x,y\} \in E} \quad \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

Eine solche Abbildung  $f: V \rightarrow V'$  ist also genau dann ein Morphismus von Graphen, wenn  $(f, F)$  mit

$$\begin{aligned} F: E &\rightarrow E' \\ \{x, y\} &\mapsto \{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

einen Morphismus  $(V, E, \in) \rightarrow (V', E', \in)$  zwischen den zugehörigen Mini-Geometrien definiert (nachrechnen!).

**Beispiel 1.5.5 (affin lineare Abbildungen).** Sei  $K$  ein Körper und seien  $V$  und  $V'$  Vektorräume über  $K$ . Ist  $f: V \rightarrow V'$  affin  $K$ -linear (d.h. die Abbildung  $f - f(0): V \rightarrow V'$  ist  $K$ -linear), so ist  $(f, F)$  mit  $F: v + U \mapsto f(v + U)$  genau dann ein Morphismus  $A(V) \rightarrow A(V')$  von Mini-Geometrien, wenn  $f$  injektiv ist (nachrechnen!).

**Proposition 1.5.6 (Isomorphie und Kardinalität).** Seien  $M = (P, G, \sqsubset)$  und  $M' = (P', G', \sqsubset')$  Mini-Geometrien mit  $M \cong_{\text{MG}} M'$ . Dann folgt

$$|P| = |P'| \quad \text{und} \quad |G| = |G'|.$$

*Beweis.* Seien  $(f, F): M \rightarrow M'$  und  $(f', F'): M' \rightarrow M$  zueinander inverse Mini-Geometrie-Isomorphismen. Dann sind  $f$  und  $f'$  bzw.  $F$  und  $F'$  zueinander inverse Bijektionen. Damit folgt  $|P| = |P'|$  und  $|G| = |G'|$ .  $\square$

**Korollar 1.5.7.** *Insbesondere gibt es unendlich viele paarweise nicht isomorphe Modelle von Mini-Geometrie.*

*Beweis.* Wir müssen dazu nur eine Folge von Mini-Geometrien finden, **die**  $M_n := (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \emptyset)$  ein Modell für Mini-Geometrie, das genau  $n$  Punkte enthält. Mit der vorigen Proposition folgt somit die Behauptung.  $\square$

**Proposition 1.5.8** (Isomorphie linearer Mini-Geometrien). *Sei  $K$  ein Körper und  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$A(K^n) \cong_{\text{MG}} A(K^m) \iff n = m.$$

*Beweis.* Ist  $n = m$ , so ist  $\text{id}_{A(K^n)}$  ein solcher Mini-Geometrie-Isomorphismus.

Ist  $n \neq m$ , so können wir wie folgt verfahren: Um die Notation übersichtlich zu halten behandeln wir nur den Fall, dass  $n = 2$  und  $m = 3$  ist (der allgemeine Fall lässt sich analog behandeln; Übungsaufgabe).

Die Idee ist es, ein geeignetes Mini-Analogon von Ebenen zu betrachten und dann lineare Algebra zur Hilfe zu holen: Zu einer Mini-Geometrie  $M = (P, G, \sqsubset)$  und zwei Geraden  $g, h \in G$ , die genau einen Schnittpunkt besitzen, betrachten wir die Menge

$$E_M(g, h) := \left\{ x \in P \mid \exists_{k \in G} x \sqsubset k \wedge (\exists_{y, z \in P} y \neq z \wedge y \sqsubset k \wedge y \sqsubset g \wedge z \sqsubset k \wedge z \sqsubset h) \right\}$$

aller Punkte, die auf Geraden liegen, die sowohl  $g$  als auch  $h$  schneiden – und zwar nicht nur im Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  (Abbildung 1.6).

Seien nun  $g$  und  $h$  Geraden in  $A(K^3)$ , deren einziger Schnittpunkt  $0$  ist. Dann zeigt lineare Algebra, dass  $E_{A(K^3)}(g, h)$  ein zweidimensionaler  $K$ -Unterraum von  $K^3$  ist (nachrechnen!). Insbesondere gibt es einen Punkt  $x$  in  $A(K^3)$ , der *nicht* in  $E_{A(K^3)}(g, h)$  liegt.

*Angenommen*, es gibt einen Isomorphismus  $(f, F): A(K^3) \rightarrow A(K^2)$  von Mini-Geometrien. Dann gilt (nachrechnen!)

$$f(E_{A(K^3)}(g, h)) = E_{A(K^2)}(F(g), F(h)) =: E$$

und  $f(x)$  liegt *nicht* in  $E$ . Andererseits ist  $E$  aber ein zweidimensionaler affiner  $K$ -Unterraum von  $K^2$ , und somit  $E = K^2$ , im Widerspruch zur Existenz von  $f(x)$ . Also ist  $A(K^2) \not\cong_{\text{MG}} A(K^3)$ .  $\square$

Wie im allgemeinen kategoriellen Kontext werden wir nun die Symmetriegruppe als Automorphismengruppe einführen:

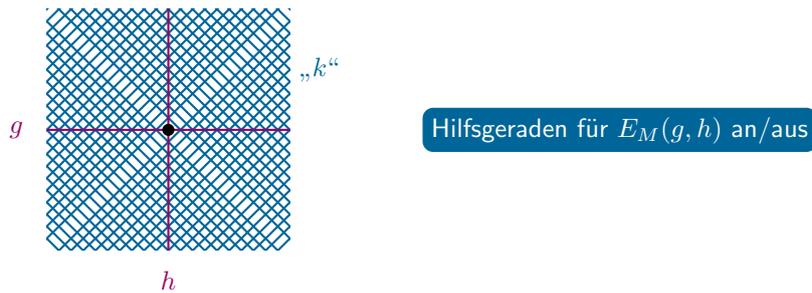


Abbildung 1.6.: Die „Ebene“  $E_M(g, h)$  in Mini-Geometrie, schematisch

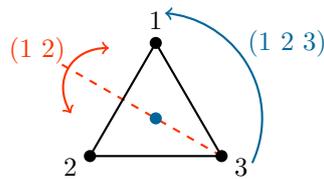


Abbildung 1.7.: Zwei Elemente der Symmetriegruppe von  $M^\Delta$ , schematisch

**Definition 1.5.9** (Symmetriegruppe einer Mini-Geometrie). Sei  $M$  ein Modell für Mini-Geometrie. Die Menge aller Mini-Geometrie-Isomorphismen  $M \rightarrow M$  bildet bezüglich Verknüpfung eine Gruppe (nachrechnen!), die sogenannte *Symmetriegruppe*  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M)$  von  $M$ .

**Beispiel 1.5.10** (algebraische Symmetriegruppen als Symmetriegruppen von Mini-Geometrien). Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\text{Aut}_{\text{MG}}(M_n) \cong_{\text{Group}} ? ,$$

wobei  $M_n$  die Mini-Geometrie aus dem Beweis von Korollar 1.5.7 ist und  $S_n$  die symmetrische Gruppe von Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  bezeichnet. Insbesondere ist  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M_2) \cong_{\text{Group}} \mathbb{Z}/2$  und  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M_n)$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  *nicht* abelsch.

**Beispiel 1.5.11** (Symmetriegruppen von kombinatorischen Drei- und Vierecken). Sei  $M^\Delta$  die Mini-Geometrie zum Graphen  $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\})$  und sei  $M^\square$  die Mini-Geometrie zu  $(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$ . Dann gilt (nachrechnen! Abbildung 1.7)

$$\text{Aut}_{\text{MG}}(M^\Delta) \cong_{\text{Group}} S_3;$$

genauer besteht  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M^\Delta)$  aus der Identität, den beiden „Rotationen“  $(1\ 2\ 3)$  und  $(3\ 1\ 2)$ , sowie den „Spiegelungen“  $(1\ 2)$ ,  $(2\ 3)$ ,  $(1\ 3)$  (wir geben jeweils nur die Abbildungen auf den Punkten an; wie sehen die zugehörigen Abbildungen auf den Geraden aus?).

Die Gruppe  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M^\square)$  enthält genau acht Elemente; genauer ist

$$\text{Aut}_{\text{MG}}(M^\square) \cong_{\text{Group}} \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2,$$

wobei das nicht-triviale Element aus  $\mathbb{Z}/2$  durch Inversion auf  $\mathbb{Z}/4$  operiert (nachrechnen!).

Mithilfe von Symmetriegruppen lässt sich zum Beispiel auch der Begriff von Gruppenoperationen auf Mini-Geometrien einführen.

## 1.6 Der geometrische Blickwinkel

Wir geben nun erste elementare Beispiele für Anwendungen kombinatorischer Geometrie, in denen der geometrische Blickwinkel eine tragende Rolle spielt. Themen dieser Art eignen sich zum Beispiel auch für Zulassungsarbeiten oder Schülerprojekte.

### 1.6.1 Ramsey-Zahlen

Wir beginnen mit einem Beispiel aus der Kombinatorik, den sogenannten Ramsey-Zahlen. Einen einfachen Ramsey-Satz haben wir bereits in Proposition 1.2.6 kennengelernt.

**Proposition 1.6.1** (Bekanntschaften). *Unter sechs Personen gibt es immer drei, die sich gegenseitig alle kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.*

*Beweis.* Wir modellieren diese Situation wie folgt durch einen Graphen  $X$ :

- Die sechs Personen bilden die sechs Knoten von  $X$ .
- Es gibt genau dann eine Kante in  $X$  zwischen zwei Knoten, wenn sich die zugehörigen Personen kennen.

Wendet man nun Proposition 1.2.6 auf die zu  $X$  gehörige Mini-Geometrie an, so folgt die Behauptung.  $\square$

**Fingerübung 1.6.2.** Wäre die Proposition 1.6.1 auch mit „entweder ... oder ...“ wahr?

Ja  Nein

Die analoge Aussage für fünf Personen ist im allgemeinen *nicht* richtig; man kann leicht ein Gegenbeispiel angeben (nachrechnen!). Zusammen mit Proposition 1.2.6 folgt somit, dass die sogenannte Ramsey-Zahl  $R(3,3)$  gleich 6 ist.

**Definition 1.6.3** (Ramsey-Zahl). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die *Ramsey-Zahl*  $R(n, n)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $R$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $X$  ein Graph mit  $R$  Knoten, so gibt es  $n$  Knoten in  $X$ , die paarweise durch Kanten verbunden sind, oder es gibt  $n$  Knoten in  $X$ , von denen keine zwei durch eine Kante verbunden sind.

**Ausblick 1.6.4** (der Satz von Ramsey). Es ist bekannt, dass  $R(n, n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  endlich ist (nach dem *Satz von Ramsey*); im allgemeinen ist es jedoch äußerst schwierig, den genauen Wert  $R(n, n)$  zu berechnen. Die einzigen(!) bekannten Werte sind:

$$R(2, 2) = 2, \quad R(3, 3) = ? \quad , \quad R(4, 4) = 18.$$

Es gibt vielfältige Varianten von Ramsey-Zahlen und des Satzes von Ramsey. Sie sind zum Beispiel ein beliebtes Hilfsmittel in kombinatorischen Aufgaben in Mathematik-Wettbewerben (LWM, BWM, IMO, ...).

**Ausblick 1.6.5** (der Satz von Hales-Jewett). Der *Satz von Hales-Jewett* ist eine Variante des Satzes von Ramsey mit folgender Anwendung [7]:

Für jede Kantenlänge  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $d \in \mathbb{N}$ , so dass für das Tic-Tac-Toe-Spiel auf dem Würfel  $\{1, \dots, n\}^d$  der erste Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

## 1.6.2 Das Spiel SET

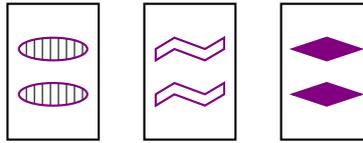
Das Kartenspiel SET<sup>1</sup> wird mit 81 Karten gespielt. Jede der Karten zeigt vier Attribute, wobei die Attribute die folgenden Werte annehmen können:

<i>Typ</i>	<i>mögliche Werte</i>
Anzahl	1, 2, 3
Schattierung	gefüllt, gestreift, leer
Farbe	rot, grün, violett
Form	Oval, Schlange, Raute

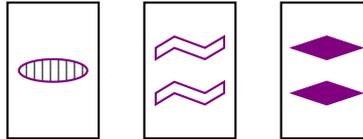
Zu jeder Werte-Kombination der vier Attribute gibt es genau eine Karte. Ziel des Spieles ist es, unter den ausliegenden Karten ein sogenanntes *SET* von drei Karten zu finden, d.h. drei Karten zu finden, so dass die Karten bezüglich jedem der vier Attribute entweder alle gleich oder alle unterschiedlich sind.

<sup>1</sup>SET ist eine Trademark von SET Enterprises, Inc.

**Beispiel 1.6.6.** Die folgenden drei Karten bilden ein SET:



Andererseits bilden die folgende Karten *kein* SET, **denn**



**Interaktives Tool 1.6.7** (SET online). Lösen Sie das tägliche SET-Puzzle:

<https://www.setgame.com/set/puzzle>

Zu Beginn des Spiels werden zwölf Karten offen auf den Tisch gelegt. Alle Spieler betrachten diese Karten gleichzeitig; wer ein SET entdeckt, ruft „SET!“ und entfernt die entsprechenden drei Karten. Daraufhin werden die offenen Karten auf dem Tisch durch drei neue Karten ergänzt, etc.

Es kann aber passieren, dass es unter den ausliegenden Karten kein SET gibt. In diesem Fall werden so lange weitere offene Karten hinzugefügt bis ein SET auffindbar ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die folgende Frage:

**Frage 1.6.8.** Was ist die maximale Anzahl an Karten, die *kein* SET enthält?

Wir geben nun eine Übersetzung dieser Frage in Mini-Geometrie an: Dazu betrachten wir die Mini-Geometrie  $A(\mathbb{F}_3^4)$ . Die vier Koordinaten-Achsen entsprechen dabei den vier Attributen, die Koordinaten-Einträge aus  $\mathbb{F}_3$  den drei jeweils möglichen Werten des Attributs. Man stellt leicht fest, dass eine drei-elementige Teilmenge von  $\mathbb{F}_3^4$  genau dann ein SET bildet, wenn sie ein affiner eindimensionaler  $\mathbb{F}_3$ -Unterraum von  $\mathbb{F}_3^4$  ist, d.h., wenn sie eine Gerade in der Mini-Geometrie  $A(\mathbb{F}_3^4)$  ist: Wir betrachten dazu eine einzelne Koordinate (d.h. ein Attribut). Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\{x + \mathbb{F}_3 \cdot y \mid x, y \in \mathbb{F}_3\} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{F}_3\} \cup \{\mathbb{F}_3\}$$

gilt. Die linke Seite beschreibt die **möglichen Koordinatenmengen in Geraden** in  $A(\mathbb{F}_3^4)$ . Der erste Teil der Menge auf der rechten Seite entspricht dem Fall, dass die **Werte dieses Attributs bei allen drei Karten gleich sind**; der zweite Teil entspricht dem Fall, dass **die Werte des betrachteten Attributs bei allen drei Karten verschieden sind**.

Frage 1.6.8 ist also äquivalent zur folgenden Frage:

**Frage 1.6.9.** Was ist die größte Anzahl von Punkten in  $A(\mathbb{F}_3^4)$ , die *keine* Gerade enthält?

Man kann mit elementaren Mitteln der linearen Algebra und der Kombinatorik zeigen, dass die Antwort auf diese Frage 20 ist [17]; die Formulierung als geometrisches Problem hilft in diesem Fall dabei, die Argumente übersichtlich zu organisieren. Je 21 SET-Karten enthalten also mindestens ein SET.

### 1.6.3 Strategie via Symmetrie

Wir zeigen an einem einfachen Beispiel wie der Symmetrie-Begriff in der Spieltheorie Verwendung findet:

**Proposition 1.6.10** (Godzilla vs. King Kong [41, Aufgabe 5.3]). *Godzilla und King Kong treffen sich in Manhattan um folgendes Spiel zu spielen:*

- *Am Anfang stecken sie einen  $2020 \times 2021$  Häuserblocks großen rechteckigen Bereich der Stadt ab. Wir gehen davon aus, dass alle Blocks gleich große Quadrate sind.*
- *Ein Zug besteht darin, einen zusammenhängenden Bereich an Blocks dem Erdboden gleichzumachen, der zwischen einem und 2020 Blocks groß ist.*
- *Godzilla und King Kong ziehen abwechselnd.*
- *Derjenige, der den letzten Häuserblock ausradiert, gewinnt.*
- *Godzilla beginnt die Verwüstung mit dem ersten Zug.*

*Dann besitzt Godzilla eine Gewinn-Strategie.*

*Beweis.* Wir modellieren das entsprechende Spielbrett durch den folgenden Graphen  $X = (V, E)$ :

- Die Knotenmenge von  $X$  ist die Menge

$$\{-1010, \dots, 1010\} \times \{1, \dots, 2020\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

- Zwei Knoten  $(x, y)$  und  $(x', y')$  bilden genau dann eine Kante, wenn  $x = x'$  und  $|y - y'| = 1$  oder wenn  $|x - x'| = 1$  und  $y = y'$  ist.

Die Knoten entsprechen den Häuserblocks und die Wahl der Kanten stellt sicher, dass ein Bereich von Häuserblocks genau dann zusammenhängend ist, wenn die entsprechenden Knoten in  $X$  einen zusammenhängenden Untergraphen definieren (d.h. je zwei dieser Knoten sind durch einen Kantenweg innerhalb dieser Menge von Knoten verbunden).

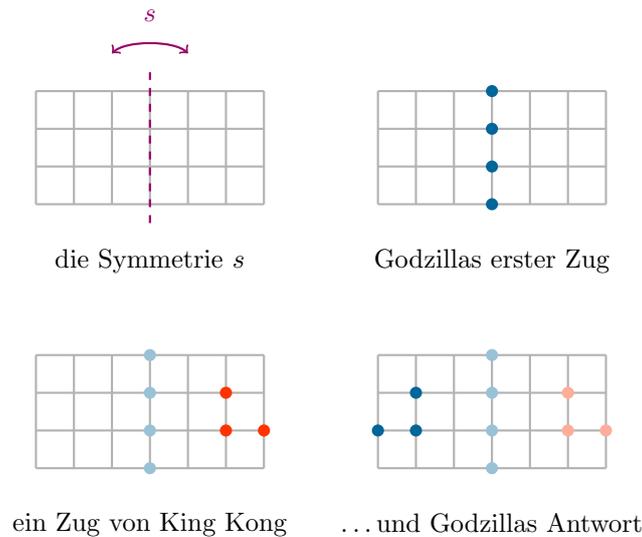


Abbildung 1.8.: Godzilla vs. King Kong

Die Idee ist, den durch

$$\begin{aligned}
 s: V &\longrightarrow V \\
 (x, y) &\longmapsto (-x, y)
 \end{aligned}$$

definierten „Spiegelungs“-Automorphismus von  $X$  zu nutzen (Abbildung 1.8).

In seinem ersten Zug verwüstet Godzilla den Bereich  $\{0\} \times \{1, \dots, 2020\}$ . Jeder noch unzerstörte zusammenhängende Bereich der Stadt liegt nun entweder in  $\{-1010, \dots, -1\} \times \{1, \dots, 2020\}$  oder in  $\{1, \dots, 1010\} \times \{1, \dots, 2020\}$ . Induktiv folgt dann: Jedesmal, wenn King Kong einen Zug durchführt, kann Godzilla den mithilfe von  $s$  „gespiegelten“ Zug durchführen. Also wird Godzilla mit dieser Strategie die Gelegenheit haben, den letzten Block auszuradien und gewinnt somit.  $\square$

**Ausblick 1.6.11** (Nash-Gleichgewichte). Auch in Nashs berühmtem Beweis der Existenz sogenannter *Nash-Gleichgewichte* [46, 47] spielt der geometrische Blickwinkel eine wichtige Rolle: die Existenz dieser Gleichgewichte wird aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz (einem Satz aus der Topologie) gefolgert. Diese Arbeiten von Nash (und ihre Anwendungen) bilden die Grundlage für seinen Gewinn des Nobel-Preises.

### 1.6.4 Der Heiratssatz

Der Heiratssatz ist ein wichtiges Hilfsmittel aus der Kombinatorik, das in vielen Situationen eingesetzt werden kann, um die (Nicht-)Existenz injektiver Abbildungen zu garantieren. Wir stellen zunächst den kombinatorischen Heiratssatz vor und beweisen ihn dann geometrisch mithilfe von Graphen. Im Anschluss geben wir eine erste Anwendung des Heiratssatzes.

**Satz 1.6.12 (Heiratssatz).** *Seien  $F$  und  $M$  endliche Mengen und sei  $T: F \rightarrow P(M)$  eine Abbildung; dabei bezeichnet  $P(M)$  die Potenzmenge von  $M$ . Die Heiratsbedingung für  $T$  lautet*

$$\forall A \subset F \quad \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right| \geq |A|.$$

*Dann gibt es genau dann eine injektive Abbildung  $H: F \rightarrow M$  mit*

$$\forall f \in F \quad H(f) \in T(f),$$

*wenn  $T$  die Heiratsbedingung erfüllt; man bezeichnet  $H$  in diesem Fall als  $(F, M, T)$ -Heirat.*

**Bemerkung 1.6.13** (woher kommt der Name?). Die namensgebende Interpretation dieses Satzes ist, sich vorzustellen, dass  $F$  eine Menge von Frauen ist,  $M$  eine Menge von Männern ist, und für jede Frau  $f \in F$ , die Menge  $T(f) \subset M$  die Menge der Traumänner von  $f$  ist. Der Satz gibt also ein Kriterium dafür, wie man jede Frau so mit einem Mann verheiraten kann, dass alle Frauen glücklich sind und keine zwei Frauen denselben Mann teilen müssen.

**Fingerübung 1.6.14** (Heiratsbedingung). Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} F &:= \{\text{Gutemine, Jellosubmarine, Sevenofnine}\}, \\ M &:= \{\text{Majestix, Methusalix, Miraculix, Blorx}\}. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Abbildungen  $F \rightarrow M$  erfüllen die Heiratsbedingung (wobei wir die offensichtlichen Abkürzungen verwenden)?

1.  $G \mapsto \{\text{B}\}, J \mapsto \{\text{B}\}, S \mapsto \{\text{B}\}$

Ja  Nein

2.  $G \mapsto \{\text{Ma, Me}\}, J \mapsto \{\text{Ma, Me, Mi}\}, S \mapsto \{\text{Mi, B}\}$

Ja  Nein

Es gibt viele Möglichkeiten, den Heiratssatz zu beweisen [18]. Wir übersetzen den Satz in die Graphentheorie und gehen dann per Induktion über die Anzahl der Elemente von  $F$  vor.

**Definition 1.6.15** (Matching, perfektes Matching). Sei  $X = (V, E)$  ein Graph.

- Sei  $F \subset V$ . Ein *Matching für  $F$  in  $X$*  ist eine Menge  $H \subset E$  von Kanten mit folgenden Eigenschaften: Jeder Knoten aus  $F$  ist in einer Kante aus  $H$  enthalten und

$$\forall_{e, e' \in H} \quad e \neq e' \implies e \cap e' = \emptyset$$

(d.h. die Kanten aus  $H$  haben keine gemeinsamen Knoten).

- Ein *perfektes Matching für  $X$*  ist ein Matching für die ganze Knotenmenge  $V$  in  $X$ .

**Bemerkung 1.6.16** (Heirat  $\leftrightarrow$  Matching; Beweis von Satz 1.6.12). Betrachtet man im Heiratssatz den Graphen

$$(F \sqcup M, \{\{f, m\} \mid m \in T(f)\})$$

und sieht man Matchings als Entsprechung zu injektiven Abbildungen an, so sieht man, dass der Heiratssatz (Satz 1.6.12) aus der untenstehenden graphentheoretischen Version (Satz 1.6.17) folgt (nachrechnen!).

**Satz 1.6.17** (graphentheoretischer Heiratssatz). Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher Graph und sei  $F \subset V$  mit der Eigenschaft, dass  $X$  keine Kante zwischen zwei Knoten in  $F$  enthält. Dann existiert genau dann ein Matching für  $F$  in  $X$ , wenn die (graphentheoretische) Heiratsbedingung

$$\forall_{A \subset F} \quad |N_X(A)| \geq |A|$$

für  $F$  in  $X$  erfüllt ist. Dabei ist  $N_X(A) := \{w \in V \mid \exists_{v \in A} \{w, v\} \in E\}$  die Menge aller zu  $A$  benachbarten Knoten in  $X$ .

*Proof.* Es ist klar, dass die Heiratsbedingung notwendig ist für die Existenz eines Matchings.

Warum ist die Heiratsbedingung hinreichend? Um dies nachzuweisen, gehen wir induktiv vor (über die Anzahl  $|F|$ ).

*Induktionsanfang.* Ist  $|F| \leq 1$ , so gilt die Behauptung offensichtlich.

*Induktionsvoraussetzung.* Sei also  $|F| \geq 2$  und die Heiratsbedingung sei in allen Fällen mit kleinerer „Frauenmenge“ als hinreichend nachgewiesen.

*Induktionsschritt.* Dann ist die Heiratsbedingung auch für  $F$  hinreichend, denn: Wir unterscheiden zwei Fälle (diese decken alle Möglichkeiten ab!):

- ① Es gelte die stärkere Heiratsbedingung

$$|N_X(A)| \geq |A| + 1$$

für alle nicht-leeren Teilmengen  $A \subset F$  mit  $A \neq F$ . Wir wählen in diesem Fall eine Kante  $\{f, m\} \in E$  mit  $f \in F$  und betrachten den Graphen  $X'$ , den wir aus  $X$  erhalten, indem wir die Knoten  $f, m$  und alle mit  $f$  oder  $m$  verbundenen Kanten aus  $X$  entfernen (Abbildung 1.9).

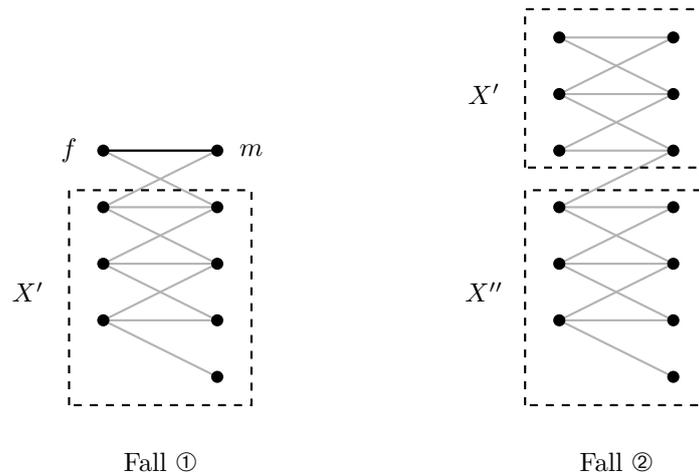


Abbildung 1.9.: Die beiden Fälle im Induktionsschritt des Beweises des graphentheoretischen Heiratsatzes

Jede nicht-leere Teilmenge  $A \subset F \setminus \{f\}$  erfüllt dann

$$|N_{X'}(A)| \geq |N_X(A)| - 1 \geq |A| + 1 - 1 \geq |A|.$$

**Warum hilft das?**

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Matching  $H'$  für  $F \setminus \{f\}$  in  $X'$ . Dann ist  $H' \cup \{f, m\}$  ein Matching für  $F$  in  $X$  (nachrechnen!).

② Es gebe eine nicht-leere Teilmenge  $A \subset F$  mit  $A \neq F$  und

$$|N_X(A)| = |A|.$$

Wir zerlegen nun  $X$  in die folgenden Graphen  $X'$  und  $X''$  (Abbildung 1.9): Den Graphen  $X'$  konstruieren wir durch

$$X' := (A \cup N_X(A), \{\{f, m\} \mid f \in A, m \in N_X(A)\}),$$

den Graphen  $X''$  konstruieren wir durch

$$X'' := ((F \setminus A) \cup (N_X(F \setminus A) \setminus N_X(A)), \{\{f, m\} \mid f \in F \setminus A, m \in N_X(F \setminus A) \setminus N_X(A)\}).$$

Nach Voraussetzung erfüllt  $X'$  die Heiratsbedingung für  $A$  (nachrechnen!). Außerdem erfüllt auch  $X''$  die Heiratsbedingung für  $F \setminus A$ , denn: Sei  $B \subset F \setminus A$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
|N_{X''}(B)| &= |N_X(B) \setminus N_X(A)| && \text{(Konstruktion von } X'') \\
&= |N_X(B \cup A) \setminus N_X(A)| \geq |N_X(B \cup A)| - |N_X(A)| && \text{(da } N_X(B \cup A) = N_X(B) \cup N_X(A)) \\
&\geq |N_X(B \cup A)| - |A| && \text{(Warum?) } \\
&\geq |B \cup A| - |A| && \text{(Warum?) } \\
&= |B| && \text{(Warum?) } .
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $X'$  somit ein Matching für  $A$  und  $X''$  ein Matching für  $F \setminus A$ . Zusammen ergeben diese Matchings ein Matching für  $F$  in  $X$  (nachrechnen!).  $\square$

**Korollar 1.6.18** (Spielkartenauswahl). *Wir betrachten ein gewöhnliches Kartenspiel mit 52 Karten (in vier Farben, in denen es jeweils Karten mit den Werten 2, ..., 10, B, D, K, A gibt). Diese 52 Karten werden gemischt und auf 13 Stapel zu je vier Karten verteilt. Dann ist es möglich, so aus jedem Stapel eine Karte auszuwählen, dass die ausgewählten 13 Karten je genau eine mit dem Wert 2, ..., 10, B, D, K, A enthalten.*

**Interaktives Tool 1.6.19.** Probieren Sie das mit Spielkarten aus!

*Beweis.* Wir modellieren die Situation wie folgt:

- Wir setzen  $F := \{2, \dots, 10, B, D, K, A\}$ ; die Menge  $F$  ist also die Menge der möglichen Kartenwerte.
- Sei  $M := \{1, \dots, 13\}$ ; die Elemente von  $M$  repräsentieren die 13 Stapel.
- Als Abbildung  $T: F \rightarrow P(M)$  wählen wir die Abbildung, die jedem Kartenwert die Stapel zuordnet, in denen der Wert auftritt.

Warum ist die Heiratsbedingung für  $T$  erfüllt? Sei  $A \subset F$ . Wir setzen

$$n := |A| \quad \text{und} \quad m := \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right|$$

und betrachten die Anzahlen der involvierten Karten. Da jeder Kartenwert auf genau vier Karten auftritt, betrifft die Menge  $A$  genau  $4 \cdot n$  Karten. Wegen  $T$  finden diese Platz in  $m$  Stapeln. Da jeder Stapel genau vier Karten enthält, ist also

$$4 \cdot n \leq 4 \cdot m,$$

und damit

$$|A| = n \leq m = \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right|.$$

Also erfüllt  $T$  die Heiratsbedingung. Nach dem Heiratssatz (Satz 1.6.12) gibt es eine  $(F, M, T)$ -Heirat. Nach Konstruktion liefert diese eine Auswahl von Karten aus jedem Stapel mit der gewünschten Eigenschaft.  $\square$

Ein weiteres klassisches Anwendungsbeispiel für den Heiratssatz ist die Vervollständigung von lateinischen Quadraten [5].

## 1.7 Der eulersche Polyedersatz

Wir werden uns nun mit der Frage beschäftigen, welche Graphen sich „überkreuzungsfrei in der Ebene zeichnen lassen“. Ein wichtiger Schritt bei der Beantwortung dieser Frage ist der eulersche Polyedersatz. Dieser hilft bei der Klassifikation regulärer Polyeder, bei Färbungsproblemen, sowie bei Problemen, die zunächst nicht aus der Graphentheorie stammen. In Kapitel 1.7.1 werden wir das Zeichnen eines Graphen in der Ebene präzisieren und in Kapitel 1.7.2 dann den eulerschen Polyedersatz beweisen; erste Anwendungen diskutieren wir in Kapitel 1.7.3.

### 1.7.1 Geometrische Realisierung von Graphen

Um zu präzisieren, was es bedeuten soll, einen Graphen überkreuzungsfrei in der Ebene zu zeichnen, verwenden wir den Begriff der geometrischen Realisierung eines Graphen. Die geometrische Realisierung eines Graphen übersetzt Graphen in topologische Räume und zwar so, dass

- Knoten durch Punkte und
- Kanten durch Intervalle/Strecken modelliert werden.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall von Graphen mit endlicher Knotenmenge.

**Definition 1.7.1** (geometrische Realisierung). Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher Graph. Dann definieren wir die *geometrische Realisierung*  $X_{\mathbb{R}}$  von  $X$  als den topologischen Raum mit der unterliegenden Menge

$$X_{\mathbb{R}} := \{e_v \mid v \in V\} \cup \{\{v, w\}_{\mathbb{R}} \mid \{v, w\} \in E\} \subset \bigoplus_V \mathbb{R},$$

wobei  $(e_v)_{v \in V}$  die Standardbasisvektoren von  $\bigoplus_V \mathbb{R}$  sind und wir für Kanten  $\{v, w\}$  die konvexe Hülle von  $\{e_v, e_w\}$  in  $\bigoplus_V \mathbb{R}$  mit

$$\{v, w\}_{\mathbb{R}} := \{t \cdot e_v + (1 - t) \cdot e_w \mid t \in [0, 1]\}$$

bezeichnen. Wir versehen  $X_{\mathbb{R}}$  mit der Teilraumtopologie der Standardtopologie auf  $\bigoplus_V \mathbb{R}$ .

**Beispiel 1.7.2** (geometrische Realisierung). Die geometrischen Realisierungen der folgenden Graphen sind in Abbildung 1.10 skizziert:

$$X := (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}\}) \quad \text{und} \quad X' := (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\})$$

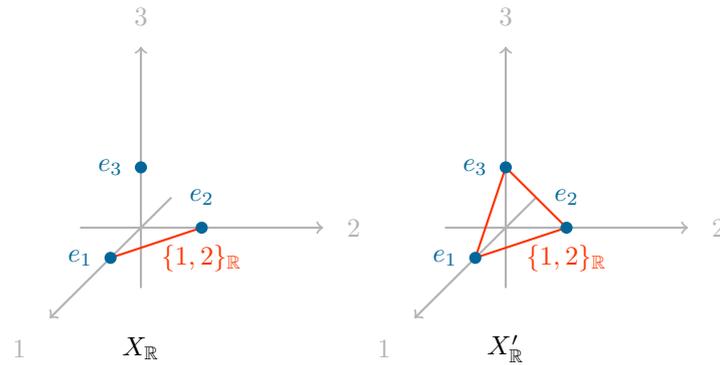


Abbildung 1.10.: Einfache geometrische Realisierungen

**Ausblick 1.7.3** (geometrische Realisierung von unendlichen Graphen). Analog lässt sich auch die geometrische Realisierung unendlicher Graphen definieren. Bei der Topologie ist jedoch Vorsicht geboten: Die „richtige“ Topologie ist dann die schwache Topologie, d.h. die Topologie, in der eine Menge genau dann offen ist, wenn ihre Durchschnitte mit den geometrischen Realisierungen aller endlichen Untergraphen offen sind (in den geometrischen Realisierungen der endlichen Untergraphen).

Die geometrische Realisierung ist im folgenden Sinne verträglich mit Morphismen von Graphen:

**Proposition 1.7.4** (Funktorialität der geometrischen Realisierung). *Seien  $X = (V, E)$ ,  $X' = (V', E')$  endliche Graphen und sei  $f: X \rightarrow X'$  ein Morphismus von Graphen (s. Beispiel 1.5.4).*

1. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbb{R}}: X_{\mathbb{R}} &\longrightarrow X'_{\mathbb{R}} \\
 e_v &\longmapsto e_{f(v)} && \text{für } v \in V \\
 t \cdot e_v + (1-t) \cdot e_w &\longmapsto t \cdot e_{f(v)} + (1-t) \cdot e_{f(w)} && \text{für } \{v, w\} \in E, t \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig.

2. Diese Konstruktion ist funktoriell, d.h. es gilt

$$(\text{id}_X)_{\mathbb{R}} = (\text{id}_V)_{\mathbb{R}} = \text{id}_{X_{\mathbb{R}}}$$

und für alle Morphismen  $f': X' \rightarrow X''$  von Graphen ist

$$(f' \circ f)_{\mathbb{R}} = f'_{\mathbb{R}} \circ f_{\mathbb{R}}.$$

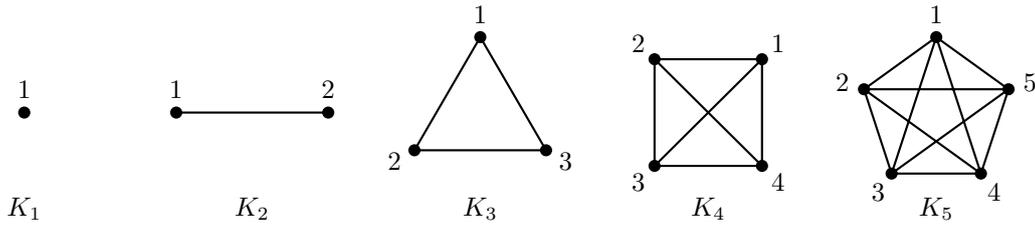


Abbildung 1.11.: Vollständige Graphen

*Beweis.* 1. Nach Konstruktion ist  $f_{\mathbb{R}}$  nichts anderes als die Einschränkung der auf den Basen  $(e_v)_{v \in V}$  bzw.  $(e_{v'})_{v' \in V'}$  von  $\bigoplus_V \mathbb{R}$  bzw.  $\bigoplus_{V'} \mathbb{R}$  durch  $f$  definierten  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $\bigoplus_V \mathbb{R} \rightarrow \bigoplus_{V'} \mathbb{R}$  auf  $X_{\mathbb{R}}$ . Insbesondere ist  $f_{\mathbb{R}}$  wohldefiniert und (da  $V$  und  $V'$  endlich-dimensional sind) stetig.

2. Die Verträglichkeitseigenschaften folgen durch einfaches Nachrechnen anhand der Definition (oder aus der im Beweis des ersten Teils gegebenen Beschreibung).  $\square$

In anderen Worten: die geometrische Realisierung liefert einen Funktor (Anhang A.5) von der Kategorie der endlichen Graphen in die Kategorie der topologischen Räume. Insbesondere haben isomorphe Graphen homöomorphe geometrische Realisierungen (nachrechnen!).

Von besonderem Interesse sind Graphen, deren geometrische Realisierung als Teilraum von  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden kann, die also „überkreuzungsfrei in der Ebene gezeichnet werden können“:

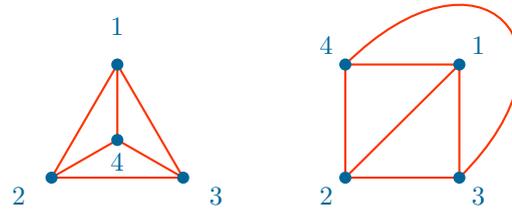
**Definition 1.7.5** (einbettbar, planar). Sei  $X$  ein endlicher Graph.

- Ist  $Z$  ein topologischer Raum, so nennen wir eine injektive stetige Abbildung  $X_{\mathbb{R}} \rightarrow Z$  eine *Einbettung von  $X$  nach  $Z$* . Falls eine solche Einbettung existiert, nennen wir  $X$  *in  $Z$  einbettbar*.
- Einbettungen von  $X$  nach  $\mathbb{R}^2$  (mit der Standardtopologie) heißen *planare Einbettungen von  $X$* . Der Graph  $X$  ist *planar*, wenn er nach  $\mathbb{R}^2$  einbettbar ist.

**Beispiel 1.7.6** (vollständige Graphen). Zu  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir den *vollständigen Graphen*

$$K_n := (\{1, \dots, n\}, \{\{j, k\} \mid j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k\})$$

(Abbildung 1.11). Offensichtlich sind  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  planar. Auch  $K_4$  ist planar; Beispiele für planare Einbettungen von  $K_4$  finden sich in Abbildung 1.12.

Abbildung 1.12.: Zwei planare Einbettungen von  $K_4$ 

**Proposition 1.7.7.** *Ein endlicher Graph ist genau dann planar, wenn er in die Einheitssphäre  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$  eingebettet werden kann.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein endlicher Graph.

Ist  $f: X_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung von  $X$ , so liefert die Verknüpfung

$$i \circ f: X_{\mathbb{R}} \longrightarrow S^2$$

eine Einbettung von  $X$  nach  $S^2$ , wobei  $i: \mathbb{R}^2 \hookrightarrow S^2$  die folgende, stetige, Einbettung von  $\mathbb{R}^2$  in die obere Hemisphäre von  $S^2$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \\ (x, y) &\longmapsto (s(x), s(y), \sqrt{1 - 1/2 \cdot s(x)^2 - 1/2 \cdot s(y)^2}) \end{aligned}$$

Dabei ist  $s := 2/\pi \cdot \arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  die injektive Schrumpfungsfunktion.

Sei umgekehrt  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow S^2$  eine Einbettung von  $X$  in  $S^2$ . Mit topologischen Hilfsmitteln folgt, dass  $f$  *nicht* surjektiv ist; ohne Einschränkung liege der Nordpol  $N := (0, 0, 1)$  *nicht* in  $f(X_{\mathbb{R}})$ . Die *stereographische Projektion*

$$\begin{aligned} \sigma: S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \frac{1}{1 - x_3} \cdot (x_1, x_2) \end{aligned}$$

ist stetig und injektiv (sogar ein Homöomorphismus). Somit ist

$$\sigma \circ f: X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine planare Einbettung von  $X$ . □

**Bemerkung 1.7.8 (Einbettbarkeit in  $\mathbb{R}^3$ ).** Man kann zeigen, dass jeder endliche Graph in  $\mathbb{R}^3$  einbettbar ist (z.B. über die Momentenkurve; Übungsaufgabe).

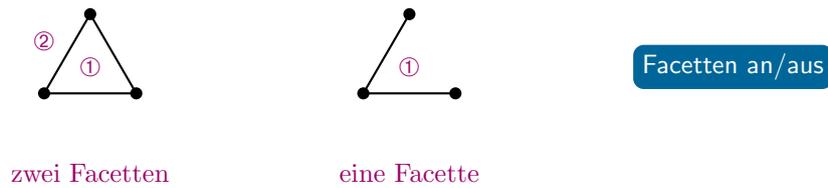


Abbildung 1.13.: Facetten von planaren Einbettungen

Ausprobieren legt die Vermutung nahe, dass der Graph  $K_5$  nicht planar ist. Aber wie können wir zeigen, dass ein Graph *nicht* planar ist? Alle möglichen Abbildungen von der geometrischen Realisierung nach  $\mathbb{R}^2$  zu überprüfen, scheint nicht praktikabel zu sein. Ein wichtiges Hilfsmittel in diesem Zusammenhang ist die eulersche Polyederformel.

## 1.7.2 Der eulersche Polyedersatz

Der eulersche Polyedersatz stellt für planare Graphen eine Beziehung zwischen der Anzahl der Knoten, der Kanten und der Gebiete, in die die Ebene durch den Graphen „zerlegt“ wird, her. Als ersten Schritt geben wir eine formale Definition dieser Gebiete und beweisen dann den eulerschen Polyedersatz mithilfe des Jordanschen Kurvensatzes.

**Definition 1.7.9** (Facette einer planaren Einbettung). Sei  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung eines endlichen planaren Graphen  $X$ . Die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements  $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$  heißen *Facetten der Einbettung*  $f$ .

**Beispiel 1.7.10** (Facetten). In Abbildung 1.13 finden sich Beispiele für Facetten von planaren Einbettungen.

**Definition 1.7.11** (Weg, Kreis, zusammenhängend). Sei  $X = (V, E)$  ein Graph.

- Ein *Weg* in  $X$  ist eine Folge  $(v_0, \dots, v_n)$  verschiedener Knoten in  $V$  mit

$$\forall_{j \in \{0, \dots, n-1\}} \{v_j, v_{j+1}\} \in E.$$

In diesem Fall ist  $n$  die *Länge* des Weges  $(v_0, \dots, v_n)$ .

- Ein *Kreis* in  $X$  ist ein Weg  $(v_0, \dots, v_n)$  in  $X$  mit  $\{v_n, v_0\} \in E$ .
- Der Graph  $X$  ist *zusammenhängend*, wenn es für alle Knoten  $v, w$  von  $X$  einen Weg in  $X$  von  $v$  nach  $w$  gibt.

**Fingerübung 1.7.12** (Kreise). Wir betrachten den folgenden Graphen:  $X := (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$ .

1. Gibt es in  $X$  einen Weg von 1 nach 1 ?

Ja  Nein

2. Ist  $(1, 2, 3)$  ein Kreis in  $X$  ?

Ja  Nein

3. Ist  $(4, 3, 2, 1)$  ein Kreis in  $X$  ?

Ja  Nein

4. Ist  $(1, 2, 4, 3)$  ein Kreis in  $X$  ?

Ja  Nein

**Bemerkung 1.7.13** (topologischer Zusammenhang). Man kann leicht zeigen, dass ein endlicher Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn seine geometrische Realisierung im topologischen Sinne (weg)zusammenhängend ist (nachrechnen!).

**Satz 1.7.14** (eulerscher Polyedersatz). Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit  $V \neq \emptyset$  und sei  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung mit genau  $F$  Facetten. Dann gilt

$$|V| - |E| + F = 2.$$

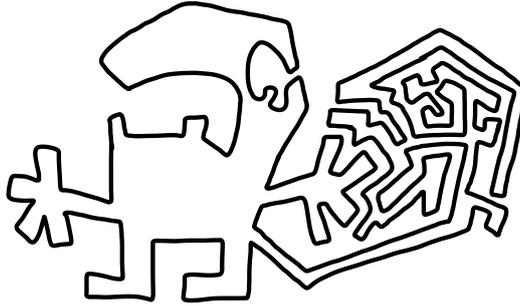
Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.

Für den Beweis verwenden wir die folgende Version des Jordanschen Kurvensatzes:

**Satz 1.7.15** (Jordanscher Kurvensatz).

1. Ist  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und wegzusammenhängend und ist  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und injektiv mit  $f((0, 1]) \subset U$ , so ist  $U \setminus f([0, 1])$  wegzusammenhängend.
2. Ist  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und injektiv, so hat  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten und  $f(S^1)$  bildet den Rand dieser beiden Wegzusammenhangskomponenten. Außerdem ist genau eine dieser beiden Komponenten beschränkt.

**Fingerübung 1.7.16.** Skizzieren Sie die Situationen in den beiden Teilen des Jordanschen Kurvensatzes!

Abbildung 1.14.: Eine Einbettung von  $S^1$  nach  $\mathbb{R}^2$ 

Dieser Satz mag zunächst „offensichtlich“ erscheinen. Man beachte jedoch, dass die Kurven auch vergleichsweise wild in  $\mathbb{R}^2$  eingebettet sein können (Abbildung 1.14). Wir werden den Jordanschen Kurvensatz hier nicht beweisen, da dafür fortgeschrittenere Methoden aus der algebraischen Topologie oder der Analysis nötig sind [50, 45].

*Beweis (von Satz 1.7.14).* Wir beweisen den eulerschen Polyedersatz per Induktion über die Anzahl der Kanten des planaren Graphen.

*Induktionsanfang.* Ein zusammenhängender nicht-leerer Graph ohne Kanten besteht nur aus einem einzigen Knoten; solche Graphen sind planar und jede planare Einbettung besitzt offenbar genau eine Facette. Somit ist der eulersche Polyedersatz in diesem Fall erfüllt.

*Induktionsvoraussetzung.* Sei  $X = (V, E)$  ein zusammenhängender planarer Graph, der mindestens eine Kante enthält, und der eulersche Polyedersatz sei in allen Fällen mit kleinerer Kantenmenge bereits gezeigt.

*Induktionsschritt.* Wir zeigen, dass dann auch  $X$  den eulerschen Polyedersatz erfüllt. Dazu unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- ① Es gibt einen Knoten  $v \in V$  vom Grad 1.<sup>2</sup> In diesem Fall bezeichnen wir die an  $v$  angrenzende Kante mit  $e$  und betrachten den Graphen (Abbildung 1.15)

$$X' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}).$$

Dann ist mit  $X$  auch  $X'$  ein endlicher zusammenhängender planarer Graph und  $f' := f|_{X'_\mathbb{R}} : X'_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine planare Einbettung von  $X'$ . Wenden wir den ersten Teil des Jordanschen Kurvensatzes (Satz 1.7.15) auf die Facette von  $f$  an, in der  $f(e_\mathbb{R})$  enthalten ist, so folgt, dass auch  $f'$  genau  $F$  Facetten hat. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit, dass

<sup>2</sup>Der Grad eines Knoten  $v \in V$  ist definiert durch  $\deg v := |\{e \in E \mid v \in e\}|$ .

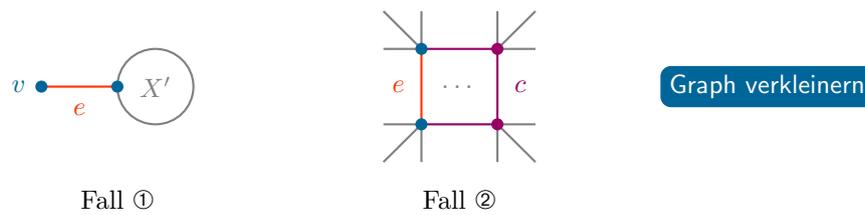


Abbildung 1.15.: Die beiden Fälle im Beweis des eulerschen Polyedersatzes, schematisch

$$\begin{aligned}
 |V| - |E| + F &= |V \setminus \{v\}| + 1 - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\
 &= |V \setminus \{v\}| - |E \setminus \{e\}| + F \\
 &= 2. \quad (\text{Warum?})
 \end{aligned}$$

- ② Es gibt keinen Knoten in  $X$  vom Grad 1. Da  $X$  mindestens eine Kante enthält, sieht man leicht, dass  $X$  mindestens einen Kreis enthält (nachrechnen!). Sei  $e \in E$  eine Kante, die auf einem Kreis  $c$  in  $X$  liegt. Dann ist auch der Graph (Abbildung 1.15)

$$X' := (V, E \setminus \{e\})$$

zusammenhängend (nachrechnen!) und als Untergraph von  $X$  endlich und planar. Außerdem ist  $f' := f|_{X'} : X'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung von  $X'$ . Wieviele Facetten hat  $f'$ ? Wendet man  $f$  auf die geometrische Realisierung des Kreises  $c$  an, so erhält man eine Einbettung von  $S^1$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Nach dem zweiten Teil des Jordanschen Kurvensatzes (Satz 1.7.15) zerlegt diese  $\mathbb{R}^2$  in zwei Wegzusammenhangskomponenten und  $f(e_{\mathbb{R}})$  liegt auf dem Rand dieser beiden Wegzusammenhangskomponenten. Daraus folgt:

- Die Facetten von  $f$ , in deren Rand  $f(e_{\mathbb{R}})$  nicht liegt, sind auch Facetten von  $f'$
- und die beiden Facetten von  $f$ , in deren Rand  $f(e_{\mathbb{R}})$  liegt, sind in einer Facette von  $f'$  enthalten.

Also hat  $f'$  genau  $F - 1$  Facetten und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
 |V| - |E| + F &= |V| - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\
 &= |V| - |E \setminus \{e\}| + F - 1 \\
 &= 2, \quad (\text{Warum?})
 \end{aligned}$$

wie behauptet.  $\square$

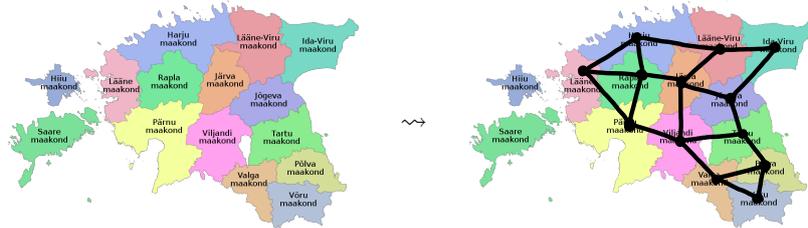


Abbildung 1.16.: Der duale Graph einer Landkarte (Estland; basierend auf Daten des Estonian Land Board (1.2006))

**Anmerkung zum Lernen.** Der eulersche Polyedersatz lässt sich leicht merken, indem man Knoten als nulldimensional ansieht, Kanten als eindimensional und Facetten als zweidimensional. Die Vorzeichen in der Wechselsumme entsprechen dann jeweils genau  $(-1)^{\text{Dimension}}$ .

**Ausblick 1.7.17** (Euler-Charakteristik). Der eulersche Polyedersatz ist der Prototyp des wichtigen Satzes aus der algebraischen Topologie, dass die sogenannte Euler-Charakteristik (eine höherdimensionale Version der Wechselsumme „ $|V| - |E| + F$ “) nicht von der gewählten Zerlegung des topologischen Raumes abhängt, sondern sogar nur vom sogenannten Homotopietyp des Raumes [28].

### 1.7.3 Anwendung: Färbungen und Nicht-Planarität

Wir geben nun erste klassische Anwendungen des eulerschen Polyedersatzes: Färbungsprobleme für Landkarten und Nicht-Planaritätsbeweise; weitere Anwendungen werden im Verlauf der Vorlesung folgen. Als erste Anwendung betrachten wir die folgende Frage:

**Frage 1.7.18.** Wieviele Farben benötigt man höchstens um eine ebene Landkarte mit zusammenhängenden<sup>3</sup> Ländern so zu färben, dass aneinandergrenzende Länder verschiedene Farben haben?

Man betrachtet zu einer Landkarte den *dualen Graphen*: Die Länder bilden die Knoten; zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden,

<sup>3</sup>Tatsächlich finden sich in der Praxis auch viele unzusammenhängende Gebiete in Landkarten, z.B. sind einige Kantone der Schweiz nicht zusammenhängend, und die Grenze zwischen Indien und Bangladesch beinhaltet viele Enklaven (bis zum 1. August 2015 auch die Enklave dritter Ordnung(!) *Dahala Khabgrabari*)

wenn es eine Grenze positiver Länge zwischen diesen Ländern gibt (Abbildung 1.16). Ein topologisches Argument zeigt, dass der duale Graph einer Landkarte mit zusammenhängenden Ländern planar ist. Daher übersetzt sich Frage 1.7.18 zur Frage über die Knotenfärbbarkeit von planaren Graphen. Der eulersche Polyedersatz liefert eine erste Antwort:

**Korollar 1.7.19 (Sechsfarbensatz).** *Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher zusammenhängender planarer Graph.*

1. Ist  $|V| \geq 3$ , so gilt

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

2. Insbesondere gibt es einen Knoten in  $X$ , der höchstens Grad 5 hat.

3. Also ist der Graph  $X$  mit sechs Farben färbbar, d.h. es gibt eine Abbildung  $c: V \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  mit

$$\forall_{\{v,w\} \in E} c(v) \neq c(w).$$

*Beweis.* 1. Sei  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung von  $X$  und sei ohne Einschränkung  $|V| \geq 4$ . Nach dem eulerschen Polyedersatz (Satz 1.7.14) erfüllt dann die Anzahl  $F$  der Facetten von  $f$  die Gleichung

$$F = 2 - |V| + |E|.$$

Da im Fall  $|V| \geq 4$  jede Facette von mindestens  $?$  Kanten begrenzt wird und jede Kante im Rand von höchstens  $?$  Facetten liegt, folgt

$$\frac{2 \cdot |E|}{3} \geq F = 2 - |V| + |E|.$$

Somit erhalten wir  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 3 \cdot 2$ , wie behauptet.

2. Hätten alle Knoten Grad mindestens 6, so wäre

$$6 \cdot |V| \leq \sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|,$$

im Widerspruch zum ersten Teil.

3. Der Sechsfarbensatz folgt nun per Induktion aus dem zweiten Teil (Übungsaufgabe).  $\square$

**Ausblick 1.7.20 (Fünffarbensatz und Vierfarbensatz).** Man kann mit elementaren Mitteln und dem Jordanschen Kurvensatz den Beweis des Sechsfarbensatzes zu einem Beweis des *Fünffarbensatzes* (d.h., dass jeder endliche planare Graph 5-färbbar ist) verbessern [18]. Tatsächlich gilt sogar der *Vierfarbensatz*; für diesen ist jedoch kein kurzer Beweis bekannt und alle bekannten Beweise beruhen auf Computerunterstützung, um die Komplexität

Abbildung 1.17.: Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$ 

der Fallunterscheidungen zu meistern. Mittlerweile gibt es auch einen Coq-verifizierten formalisierten Beweis [26].

Eine weitere wichtige Anwendung des eulerschen Polyedersatzes ist der Beweis der Nicht-Planarität gewisser Graphen:

Die wesentlichen Beispiele sind hierbei  $K_5$  (s. Beispiel 1.7.6) und der Graph (Abbildung 1.17)

$$K_{3,3} := (\{(1,0), \dots, (3,0), (1,1), \dots, (3,1)\}, \{(j,0), (k,1) \mid j, k \in \{1,2,3\}\}).$$

**Korollar 1.7.21** (Nicht-Planarität von  $K_5$  und  $K_{3,3}$ ). *Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.*

*Beweis.* Wir beginnen mit  $K_5$ : *Angenommen*,  $K_5$  ist planar. Nach Korollar 1.7.19 gilt dann (nachrechnen!)

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

was nicht sein kann. Also ist  $K_5$  *nicht* planar.

Warum ist  $K_{3,3}$  nicht planar? Eine direkte Anwendung von Korollar 1.7.19 funktioniert nicht, aber wir können das Argument aus dem Beweis von Korollar 1.7.19 anpassen: *Angenommen*,  $K_{3,3}$  ist planar. Sei  $F$  die Anzahl der Facetten einer planaren Einbettung von  $K_{3,3}$  und seien  $V$  bzw.  $E$  die Mengen der Knoten bzw. Kanten von  $K_{3,3}$ . Da  $K_{3,3}$  keine Kreise der Länge 3 enthält, folgt mit demselben Argument wie im Beweis von Korollar 1.7.19, dass

$$\frac{9}{2} = \frac{2 \cdot |E|}{4} \geq F = 2 - |V| + |E| = 5,$$

was nicht sein kann. Also ist auch  $K_{3,3}$  *nicht* planar.  $\square$

**Fingerübung 1.7.22.** Was hat Korollar 1.7.21 mit dem *Three utilities problem* zu tun?

**Ausblick 1.7.23** (der Satz von Kuratowski). Der *Satz von Kuratowski* [18] zeigt, dass  $K_5$  und  $K_{3,3}$  die Wurzel aller nicht-planaren Graphen sind, d.h. jeder nicht-planare Graph enthält eine Unterteilung von  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Untergraph. Analoge Sätze über verbotene Untergraphen gelten auch für die

Einbettbarkeit in kompliziertere Flächen als  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $S^2$ , z.B. für den Torus [44].

**Ausblick 1.7.24** (der Satz von Fary-Wagner). Nach dem *Satz von Fary-Wagner* kann jeder endliche planare Graph auch so nach  $\mathbb{R}^2$  eingebettet werden, dass die Kanten des Graphen als gerade Strecken eingebettet werden [18]. Dieses Phänomen wird zum Beispiel auch im *Entangled Game* [54] verwendet.

**Anmerkung zum Lernen** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1. Berücksichtigen Sie dabei die folgenden Fragen:

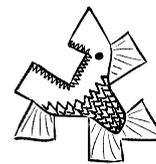
- Was ist Mini-Geometrie?
- Was sind Mini-Geometrie-Modelle?
- Was ist Unabhängigkeit? Wie kann man Unabhängigkeit nachweisen?
- Wie kann man Mini-Geometrie in **Lean** formalisieren?
- Was ist Symmetrie?
- Welche Sätze aus der Graphentheorie haben Sie kennengelernt?
- Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
- Welche Anwendungen gibt es?

## Ausblick

In den folgenden Kapiteln werden wir weitere Geometrien genauer untersuchen. Dabei werden wir uns ähnlich zu unserer Betrachtung der Mini-Geometrie an den folgenden fundamentalen Fragen orientieren:

- Wie können wir Geometrien mit zusätzlicher Struktur wie z.B. Längen, Winkel, Flächeninhalte, Krümmung, ... beschreiben?
- Was sind in solchen Geometrien „Geraden“?
- Was können wir über Symmetrien solcher Geometrien aussagen?
- Welche Anwendungen besitzen diese Geometrien?
- Welche Bezüge bestehen zur Schulmathematik?
- Wie kann man mit Computern solche Geometrien untersuchen?

# 2



## Metrische Geometrie

---

Im vorigen Kapitel haben wir uns im wesentlichen mit kombinatorischen Geometrien befasst. Wir werden nun damit beginnen, Geometrien mit zusätzlicher Struktur zu untersuchen. Als ersten Schritt in diese Richtung betrachten wir Geometrie mit einem Abstandsbegriff, d.h. die Geometrie metrischer Räume. Insbesondere werden wir uns mit der Länge von Kurven, mit Kreisen und mit Isometrien beschäftigen. Dabei werden wir auch kurz auf Konstruierbarkeitsfragen und auf das sogenannte Extremalprinzip eingehen.

Dieser Ansatz wird im folgenden Kapitel, mit der Einführung von Winkeln, vertieft und erweitert.

### Überblick über dieses Kapitel.

2.1	Metrische Räume	52
2.2	Geodäten	57
2.3	Länge von Kurven	61
2.4	Kreise und Konstruierbarkeit	65
2.5	Symmetrie	71
2.6	Das Extremalprinzip	73

**Schlüsselbeispiel.** euklidische Räume als metrische Räume, Graphen als metrische Räume

## 2.1 Metrische Räume

Wir beginnen mit einer Erinnerung an den Begriff der metrischen Räume und an klassische Beispiele metrischer Räume. Ein metrischer Raum ist eine Menge zusammen mit einem Abstandsbegriff für Punkte dieser Menge:

**Definition 2.1.1** (metrischer Raum). Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften ist:

- Für alle  $x, y \in X$  gilt genau dann  $d(x, y) = 0$ , wenn  $x = y$  ist.
- *Symmetrie*. Für alle  $x, y \in X$  gilt  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- *Dreiecksungleichung*. Für alle  $x, y, z \in X$  gilt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

In diesem Fall nennt man  $d$  eine *Metrik* auf der Menge  $X$ .

**Beispiel 2.1.2** ( $\mathbb{R}^n$  als metrischer Raum). Zu  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$$

eine Metrik auf  $\mathbb{R}^n$ , die *euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$* . Wir werden diese Metrik auch als *Standardmetrik auf  $\mathbb{R}^n$*  bezeichnen. Insbesondere erbt auch jede Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  durch Einschränkung der Standardmetrik eine Metrik.

Andere häufig auftretende Metriken auf  $\mathbb{R}^n$  sind die *Taxi-Metrik* (oder  $\ell^1$ -Metrik)

$$d_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

und die *Maximumsmetrik* (oder  $\ell^\infty$ -Metrik)

$$d_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j - y_j|.$$

**Fingerübung 2.1.3.** Bestimmen Sie den Abstand der beiden Punkte  $(1, 2020)$  und  $(20, 21)$  bezüglich der Metriken  $d_2$ ,  $d_1$  und  $d_\infty$ .

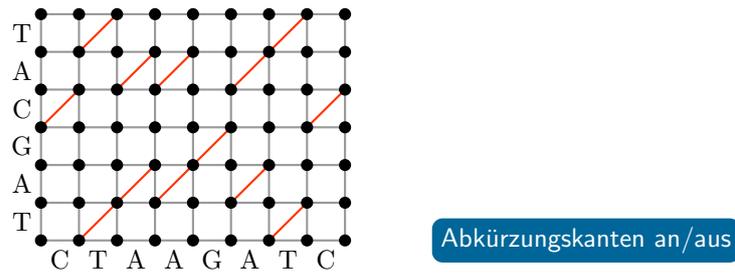


Abbildung 2.1.: Vergleich zweier DNA-Sequenzen  $a = \text{CTAAGATC}$  und  $b = \text{TAGCAT}$ ; die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge ist 5, eine solche Teilfolge ist TAGAT.

Wir können jeden zusammenhängenden Graphen mit der durch die Kombinatorik induzierten Metrik ausstatten, die in vielen Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik auftritt:

**Beispiel 2.1.4** (Graphen als metrische Räume). Sei  $X = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph. Dann definiert

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(v, w) \longmapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } v \text{ nach } w \text{ der Länge } n\}$$

eine Metrik auf der Knotenmenge  $V$  (nachrechnen!).

**Beispiel 2.1.5** (längste gemeinsame Teilfolge). Gegeben seien zwei endliche Folgen  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_m)$  über einer gemeinsamen Menge  $M$ . Gesucht ist die Länge der *längsten gemeinsamen Teilfolgen* von  $a$  und  $b$ , d.h. gesucht ist die größte Zahl  $r \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass es  $i_1 < \dots < i_r \in \{1, \dots, n\}$  und  $j_1 < \dots < j_r \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \quad a_{i_k} = b_{j_k}$$

gibt. Diese Länge kann man zum Beispiel wie folgt mithilfe eines Graphen bestimmen: Wir betrachten dazu den Graphen  $X_{a,b}$  mit der Knotenmenge

$$V_{a,b} := \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$$

und der Kantenmenge

$$\begin{aligned} E_{a,b} := & \{ \{(i, j), (i+1, j)\} \mid (i, j) \in \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, m\} \} \\ & \cup \{ \{(i, j), (i, j+1)\} \mid (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\} \} \\ & \cup \{ \{(i, j), (i+1, j+1)\} \mid (i, j) \in V_{a,b} \text{ und } a_{i+1} = b_{j+1} \}; \end{aligned}$$

d.h. stimmen die Symbole in den Folgen  $a$  und  $b$  an den entsprechenden Indizes überein, so fügen wir eine **Abkürzung** ein. Die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge von  $a$  und  $b$  ist dann genau

$$n + m - d((0, 0), (n, m)),$$

wobei  $d$  die von  $X_{a,b}$  induzierte Metrik auf  $V_{a,b}$  bezeichnet (nachrechnen!). Der Abstand zwischen Knoten in Graphen kann zum Beispiel mit dem *Algorithmus von Dijkstra* bestimmt werden; damit erhält man insbesondere also eine algorithmische Lösung dieses Teilfolgenproblems.

Zum Beispiel kann man auf diese Weise DNA-Sequenzen vergleichen (Abbildung 2.1); in diesem Fall besteht  $M$  aus den Symbolen A, C, G, T.

**Beispiel 2.1.6** (Zauberwürfel). Wie kompliziert können optimale Lösungen des Zauberwürfels (Rubik's Cube<sup>1</sup>) sein? Wir betrachten dazu den folgenden Graphen  $X$ :

- Die *Knotenmenge* von  $X$  ist die Menge aller Positionen des Zauberwürfels, die von der Grundposition (in der alle Seiten des Würfels einfarbig sind) erreichbar sind.
- Wir verbinden zwei Knoten in  $X$  genau dann durch eine *Kante*, wenn die zugehörigen Positionen durch eine Vierteldrehung einer der Würfelseiten auseinander hervorgehen.

Der Abstand eines Knotens von der Grundposition in der von  $X$  induzierten Metrik gibt dann an, wieviele Züge (d.h. Vierteldrehungen von Würfelseiten) nötig sind, um aus dieser Position die Grundposition zu erreichen.

Im Jahr 2014 konnte (mithilfe von ausgiebigen Computerberechnungen) nachgewiesen, dass der maximale Abstand von der Grundposition 26 ist (<http://www.cube20.org/qtm/>).

Analog konnte 2010 gezeigt werden, dass der maximale Abstand von der Grundposition 20 beträgt, wenn man in jedem Zug nicht nur Vierteldrehungen einer Seite, sondern beliebige Drehungen einer Seite durchführen darf (<http://www.cube20.org/>).

**Beispiel 2.1.7** (Gruppen als metrische Räume). Ist  $G$  eine Gruppe und ist  $S \subset G$  eine Erzeugendensystem von  $G$  (d.h. jedes Element von  $G$  kann als Produkt von Elementen aus  $S \cup S^{-1}$  geschrieben werden), so definiert man den zugehörigen *Cayley-Graphen*  $\text{Cay}(G, S)$  durch

$$\text{Cay}(G, S) := (G, \{\{g, g \cdot s\} \mid s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}).$$

D.h. der Graph  $\text{Cay}(G, S)$  hat die Gruppenelemente von  $G$  als Knoten und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich durch ein Element aus  $S \cup S^{-1} \setminus \{e\}$  (via Rechtsmultiplikation) unterscheiden.

<sup>1</sup>Rubik's Cube ist eine Trademark von *Rubik's Brand Ltd*

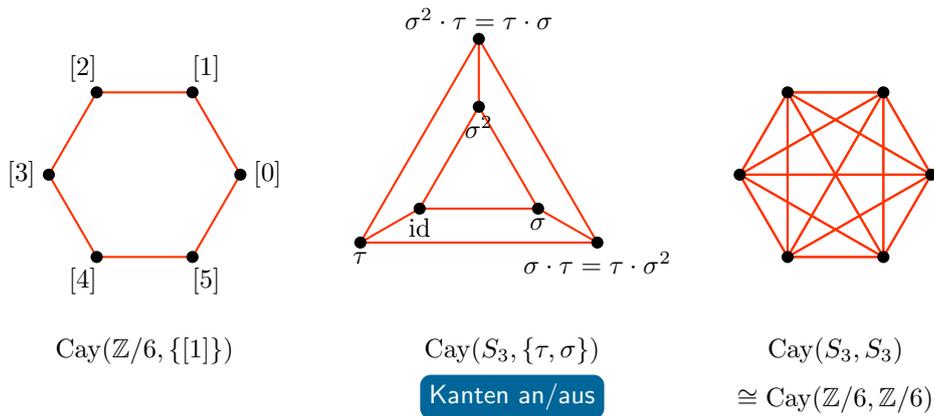


Abbildung 2.2.: Beispiele für Cayley-Graphen von kleinen Gruppen; dabei ist  $\sigma = (1\ 2\ 3)$  und  $\tau = (1\ 2)$

Insbesondere erbt dann die Gruppe  $G$  als Knotenmenge von  $\text{Cay}(G, S)$  eine Metrik  $d_{G,S}$ , die sogenannte *Wortmetrik von  $G$  bezüglich  $S$* . Man kann Gruppen somit als geometrische Objekte auffassen; dieser Blickwinkel spielt in der *Geometrischen Gruppentheorie* [37, 19] eine wichtige Rolle.

Beispiele für Cayley-Graphen finden sich in Abbildung 2.2.

**Fingerübung 2.1.8 (Kontaktgraphen).** Sei  $M$  eine Menge von Personen, z.B. alle Einwohner eines Landkreises. Wir betrachten den folgenden Graphen:

- Knoten sind alle Personen in  $M$ .
- Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Personen in den letzten 14 Tagen einen Risikokontakt gebildet haben.

Es handelt sich dabei um einen endlichen Graphen; der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Einwohner des Landkreises so stark miteinander vernetzt sind, dass der Graph zusammenhängend ist.

1. Welche Interpretation hat der Abstand zwischen zwei Personen in diesem Graphen?
2. Zeichnen Sie einen solchen Graphen für Ihr direktes Umfeld.
3. Wie verändert sich der Graph für Regensburg bei Öffnung von Kindergärten? Grundschulen? Gymnasien? Hochschulen? Diskotheken?

Ein weiteres wichtiges Konstruktionsprinzip metrischer Räume sind sogenannte riemannsche Mannigfaltigkeiten; im Zusammenhang mit der Konstruktion der hyperbolischen Ebene (Kapitel 4) werden wir genauer darauf eingehen.

Zwischen metrischen Räumen gibt es mehrere verschiedene interessante Begriffe von Morphismen. Wir werden uns zunächst auf isometrische Einbettungen beschränken:

**Definition 2.1.9** (isometrische Einbettung, Isometrie, Isometriegruppe). Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume und sei  $f: X \rightarrow X'$  eine Abbildung.

- Die Abbildung  $f$  ist eine *isometrische Einbettung*, wenn

$$\forall x, y \in X \quad d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

- Die Abbildung  $f$  ist eine *Isometrie*, wenn  $f$  eine isometrische Einbettung ist und es eine isometrische Einbettung  $f': X' \rightarrow X$  mit  $f' \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ f' = \text{id}_{X'}$  gibt.
- Wir bezeichnen die Gruppe aller Isometrien  $X \rightarrow X$  (bezüglich Komposition) als *Isometriegruppe von  $(X, d)$*  oder *Symmetriegruppe von  $(X, d)$*  und schreiben dafür  $\text{Isom}(X, d)$ .

Eine isometrische Einbettung ist also genau dann eine Isometrie, wenn sie bijektiv ist (nachrechnen!). Nach Definition ist die Isometriegruppe gerade die Automorphismengruppe in der Kategorie der metrischen Räume und isometrischen Einbettungen.

**Fingerübung 2.1.10.** Welche der folgenden Abbildungen sind isometrische Einbettungen bezüglich der Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  ?

1.  $x \mapsto x + 1$

Ja  Nein

2.  $x \mapsto -x$

Ja  Nein

3.  $x \mapsto 2021 \cdot x$

Ja  Nein

4.  $x \mapsto x^{2021}$

Ja  Nein

**Beispiel 2.1.11** (Gruppen als Untergruppen von Isometriegruppen). Ist  $G$  eine Gruppe und ist  $S \subset G$  ein Erzeugendensystem von  $G$ , so ist

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Isom}(\text{Cay}(G, S)) \\ g &\longmapsto (h \mapsto g \cdot h) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter injektiver Gruppenhomomorphismus (denn die Links-translation mit einem Gruppenelement liefert einen Automorphismus des Graphen  $\text{Cay}(G, S)$  und jeder Graphenautomorphismus ist eine Isometrie bezüglich der Graphenmetrik). Auf diese Weise können wir jede Gruppe als Untergruppe einer Isometriegruppe ansehen. Dies ist also eine metrische Version des *Satzes von Cayley*.

## 2.2 Geodäten

Ein zentraler Baustein für Mini-Geometrie sind neben den Punkten die Geraden. Es stellt sich daher die folgende Frage:

**Frage 2.2.1.** Was sind „Geraden“ in metrischen Räumen?

Eine naheliegende Definition für Geraden in metrischen Räumen ist, dass sie ein metrisches Abbild der reellen Geraden sind; dies führt zum Begriff der Geodäten. Im folgenden führen wir Geodäten ein, untersuchen den Fall euklidischer Räume und gehen am Schluss auf geodätische Dreiecke ein.

**Definition 2.2.2** ((metrische) Geodäte). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Eine *Geodäte in  $X$  der Länge  $L$*  ist eine isometrische Einbettung  $[0, L] \rightarrow X$ . Eine isometrische Einbettung  $[0, \infty) \rightarrow X$  bezeichnen wir auch als *geodätischen Strahl*, eine isometrische Einbettung  $\mathbb{R} \rightarrow X$  auch als *geodätische Gerade*. In all diesen Fällen betrachten wir die Standardmetrik auf  $[0, L]$ ,  $[0, \infty)$  und  $\mathbb{R}$ .

**Caveat 2.2.3** (metrische vs. riemannsche Geodäten). Der in der riemannschen Geometrie verwendete Geodäten-Begriff ist zwar eng verwandt mit den obigen metrischen Geodäten, aber nicht äquivalent.

**Proposition 2.2.4** (Geodäten und Isometrien). *Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume, sei  $f: X \rightarrow X'$  eine isometrische Einbettung und sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann gilt: Ist  $\gamma: I \rightarrow X$  eine Geodäte, so ist auch  $f \circ \gamma: I \rightarrow X'$  eine Geodäte.*

*Beweis.* Dies folgt aus der Tatsache, dass die Komposition isometrischer Einbettungen eine isometrische Einbettung ist (nachrechnen! S. C.10ff).  $\square$

Im euklidischen Fall passiert genau das, was wir erwarten würden: Die Geodäten sind genau die affin linearen Geraden:

**Fingerübung 2.2.5** (euklidische Strecken). Seien  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und sei  $L \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wie kann man die „gerade Strecke“ von  $x$  nach  $y$  als Abbildung  $[0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschreiben?

$$t \mapsto ?$$

Welchen Punkt erhält man zum „Zeitpunkt  $t = L/2$ “?

**Den Punkt**

**Proposition 2.2.6** (euklidische Geodäten). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y$ . Dann gibt es genau eine Geodäte in  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der euklidischen Metrik, die in  $x$  beginnt und in  $y$  endet, nämlich

$$\begin{aligned} [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + \frac{t}{L} \cdot (y - x). \end{aligned}$$

wobei  $L := d_2(x, y)$ .

Für den Beweis der Eindeutigkeit verwenden wir das folgende Lemma:

**Lemma 2.2.7.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $x, z, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$  Punkte mit  $z \neq \bar{z}$  und  $d_2(x, z) = d_2(x, \bar{z})$ . Dann gilt

$$d_2\left(x, \frac{1}{2}(z + \bar{z})\right) < d_2(x, z) = d_2(x, \bar{z}).$$

**Fingerübung 2.2.8.** Skizzieren Sie die Situation in Lemma 2.2.7.

*Beweis (von Lemma 2.2.7.* Um die Notation übersichtlich zu halten, verlegen wir die Situation an den Nullpunkt: Indem wir die Situation um  $-x$  verschieben, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $x = 0$  ist (denn die Translation um  $-x$  ist eine Isometrie von  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ).

Die Grundidee ist, zu zeigen, dass sich die rechte Seite um ein nicht-triviales Quadrat von der linken Seite unterscheidet. Sei  $m := 1/2 \cdot (z + \bar{z})$ . Mit der Definition der euklidischen Metrik  $d_2$  folgt

$$\begin{aligned} d_2(0, z)^2 &= d_2(0, m + (z - m))^2 \\ &= d_2(0, m)^2 + d_2(0, z - m)^2 + \sum_{j=1}^n 2 \cdot m_j \cdot (z_j - m_j) && \text{(Definition von } d_2) \\ &= d_2(0, m)^2 + d_2(0, z - m)^2 + \sum_{j=1}^n 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j + \bar{z}_j) \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j - \bar{z}_j) && \text{(Definition von } m) \\ &= d_2(0, m)^2 + d_2(0, z - m)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n (z_j^2 - \bar{z}_j^2) && \text{(Warum?)} \\ &= d_2(0, m)^2 + d_2(0, z - m)^2 + \frac{1}{2} \cdot (d_2(0, z)^2 - d_2(0, \bar{z})^2) && \text{(Definition von } d_2) \\ &= d_2(0, m)^2 + d_2(0, z - m)^2 + 0. && \text{(Voraussetzung an } z, \bar{z}) \end{aligned}$$

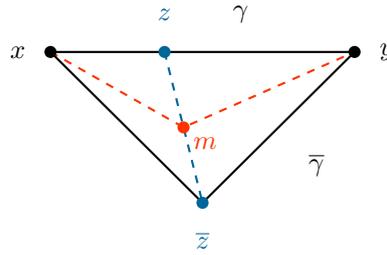


Abbildung 2.3.: Eindeutigkeit euklidischer Geodäten, schematisch

Wegen  $z \neq \bar{z}$  ist  $z - m \neq 0$ . Somit liefert die obige Rechnung also

$$d_2(0, z)^2 > d_2(0, m)^2. \quad \square$$

Beim Beweis dieses Lemmas handelt es sich um eine verkappte Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Da wir die Struktur des Skalarprodukts aber an dieser Stelle noch nicht nutzen wollen (sondern nur die metrische Struktur), haben wir den Beweis anders formuliert.

*Beweis (von Proposition 2.2.6).* Offenbar ist die in der Proposition angegebene Abbildung  $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Geodäte in  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  von  $x$  nach  $y$  (nachrechnen).

Sei  $\bar{\gamma}: [0, \bar{L}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Wir zeigen, dass  $\bar{\gamma} = \gamma$  ist. Da  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  Geodäten sind, gilt insbesondere  $\bar{L} = d_2(x, y) = L$ . Angenommen,  $\bar{\gamma} \neq \gamma$ . Dann existiert ein  $t \in (0, L)$  mit

$$\bar{z} := \bar{\gamma}(t) \neq \gamma(t) =: z.$$

Da  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  Geodäten sind, folgt  $d_2(x, z) = d_2(x, \bar{z})$  und  $d_2(y, z) = d_2(y, \bar{z})$ .

Sei  $m := 1/2 \cdot (z + \bar{z})$ . Mit Lemma 2.2.7 erhalten wir

$$d_2(x, m) < d_2(x, z) \quad \text{und} \quad d_2(y, m) < d_2(y, z).$$

Also folgt mit der Tatsache, dass  $\gamma$  eine Geodäte ist und der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} L = d_2(x, y) &\leq d_2(x, m) + d_2(m, y) && \text{(Warum?)} \\ &< d_2(x, z) + d_2(z, y) = d_2(\gamma(0), \gamma(t)) + d_2(\gamma(t), \gamma(L)) && \text{(Lemma 2.2.7)} \\ &= t + (L - t) = L && \text{(Warum?)} \end{aligned}$$

(Abbildung 2.3), was nicht sein kann. Dies zeigt die Eindeutigkeit von  $\gamma$ .  $\square$

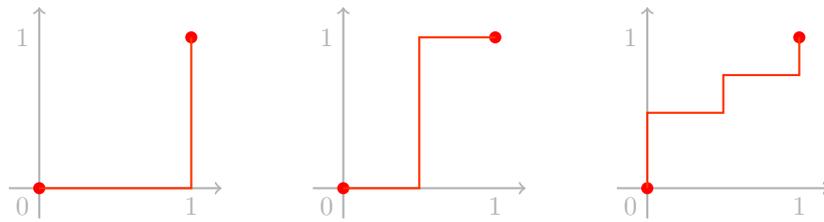


Abbildung 2.4.: Geodäten  $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  in der Taxi-Metrik (jeweils mit der offensichtlichen gleichförmigen Parametrisierung)

**Bemerkung 2.2.9** (euklidische geodätische Geraden). Mit Proposition 2.2.6 bzw. den im Beweis verwendeten Methoden folgt analog: Ist  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine geodätische Gerade in  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , so gilt

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \gamma(0) + t \cdot (\gamma(1) - \gamma(0)).$$

**Bemerkung 2.2.10** (metrische Räume und Mini-Geometrie). Nicht jeder metrische Raum bildet bezüglich der Menge aller Geodäten zwischen je zwei Punkten eine Mini-Geometrie, da es zwischen zwei Punkten mehr als eine Geodäte geben kann (Beispiel 2.2.11). Metrische Räume, bei denen je zwei Punkte durch genau eine Geodäte verbunden werden können, nennt man *eindeutig geodätische Räume*. Metrische Räume, bei denen je zwei Punkte durch eine Geodäte verbunden werden können, nennt man *geodätische metrische Räume*.

**Beispiel 2.2.11** (zu wenige/zu viele Geodäten).

- Der Raum  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit der Einschränkung der euklidischen Metrik ist *nicht* geodätisch; dies kann man aus Proposition 2.2.6 folgern (Übungsaufgabe).
- Der Raum  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  ist geodätisch aber *nicht* eindeutig geodätisch. Beispiele für Geodäten von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$  sind in Abbildung 2.4 dargestellt; dies erklärt auch den Namen Taxi-Metrik, wenn man sich vorstellt, dass man mit einem Taxi in einer US-amerikanischen Stadt auf kürzestem Wege von einem Punkt zum anderen gelangen möchte.

Mithilfe von Geodäten erhalten wir auch einen vernünftigen Begriff von Dreiecken in metrischen Räumen:

**Definition 2.2.12** (geodätisches Dreieck). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck* in  $(X, d)$  ist ein Tripel  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  bestehend aus drei Geodäten  $\gamma_0: [0, L_0] \rightarrow X$ ,  $\gamma_1: [0, L_1] \rightarrow X$  und  $\gamma_2: [0, L_2] \rightarrow X$  mit

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

Dabei bezeichnen wir  $\gamma_0(0)$ ,  $\gamma_1(0)$ ,  $\gamma_2(0)$  als die *Eckpunkte* des geodätischen Dreiecks  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ .

**Beispiel 2.2.13** (geodätische Dreiecke in euklidischen Räumen). Aus Proposition 2.2.6 folgt, dass die Punktmengen geodätischer Dreiecke in euklidischen Räumen genau mit den anschaulichen Dreiecken übereinstimmen.

**Caveat 2.2.14.** Im Gegensatz zu Mini-Geometrie-Dreiecken sind geodätische Dreiecke im allgemeinen *nicht* durch ihre Eckpunkte eindeutig bestimmt. Dies kann man zum Beispiel wie in Beispiel 2.2.11 sehen.

Auch Graphen mit der Graphenmetrik sind *nicht* geodätisch (wenn sie mehr als einen Knoten haben). Man kann aber die geometrische Realisierung kompatibel mit einer metrischen Struktur versehen.

## 2.3 Länge von Kurven

Als nächsten Schritt nutzen wir den Abstandsbegriff in metrischen Räumen, um einen allgemeinen Längenbegriff für Kurven zu erhalten. Die Grundidee ist dabei,

- Kurven durch (sehr viele!) endlich viele Punkte zu ersetzen und
- die Länge dann durch die Summe der sukzessiven Abstände dieser Punkte zu „approximieren“.

Wir berechnen die Länge von Geodäten, zeigen dass sich die Länge unter Isometrien nicht ändert und diskutieren ein paar pathologische Phänomene.

**Definition 2.3.1** (rektifizierbar, Länge einer Kurve). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 \leq T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow X$  stetig. Die *Länge von  $\gamma$*  ist definiert als

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } t_0, \dots, t_n \in [T_0, T_1] \right. \\ \left. \text{mit } t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \right\} \\ \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Wir nennen  $\gamma$  *rektifizierbar*, wenn  $L(\gamma) \neq \infty$  ist.

**Fingerübung 2.3.2.** Skizzieren Sie die Situation in Definition 2.3.1 im Beispiel von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ! Verstehen Sie, wie das Symbolgewusel in dieser Definition mit der obigen anschaulichen Grundidee der Definition zusammenpasst?

Mit diesem Längenbegriff für Kurven sieht man, dass Geodäten als kürzeste Wege angesehen werden können:

**Proposition 2.3.3** (Länge von Geodäten). *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sei  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und sei  $\gamma: [0, L] \rightarrow X$  eine stetige Kurve.*

1. Dann ist  $L(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(L))$ .
2. Ist  $\gamma$  eine Geodäte, so ist  $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(L)) = L$ .

*Beweis.* Zu 1. Nach Definition ist  $L(\gamma)$  ein Supremum. Es genügt also zu zeigen, dass eines der Supremumsargumente mindestens so groß wie  $d(\gamma(0), \gamma(L))$  ist.

Sei also  $n := \text{?}$  und  $t_0 := \text{?}$ . Damit folgt  $L(\gamma) = \sup \dots \geq d(\gamma(0), \gamma(L))$ .

Zu 2. Sei  $\gamma$  eine Geodäte. Nach dem ersten Teil ist  $L(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(L))$ .

Warum gilt die auch die umgekehrte Abschätzung? Nach Definition ist  $L(\gamma)$  ein Supremum. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Supremumsargument höchstens  $d(\gamma(0), \gamma(L))$  ist. Sei  $n \in \mathbb{N}$ , seien  $t_0, \dots, t_n \in [0, L]$  mit  $t_0 \leq \dots \leq t_n$ . Da  $\gamma$  eine Geodäte ist, folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) &= \sum_{j=0}^{n-1} |t_j - t_{j+1}| = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = t_n - t_0 \\ &\leq L - 0 = d(\gamma(0), \gamma(L)). \end{aligned}$$

Also ist  $L(\gamma) = \sup \dots \leq d(\gamma(0), \gamma(L))$ . □

Da der Längenbegriff für Kurven rein metrischer Natur ist, ist er mit isometrischen Einbettungen verträglich:

**Proposition 2.3.4** (Länge und Isometrien). *Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume, sei  $f: X \rightarrow X'$  eine isometrische Einbettung und sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann gilt: Ist  $\gamma: I \rightarrow X$  eine rektifizierbare Kurve, so ist auch die Komposition  $f \circ \gamma: I \rightarrow X'$  eine rektifizierbare Kurve und*

$$L(f \circ \gamma) = L(\gamma).$$

*Beweis.* Da  $f$  als isometrische Einbettung stetig ist, ist auch  $f \circ \gamma$  die Komposition stetig. Mit der Definition der Länge und der Voraussetzung, dass  $f$  eine isometrische Einbettung ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d(f \circ \gamma(t_j), f \circ \gamma(t_{j+1})) \mid n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \dots \leq t_n \in [T_0, T_1] \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \mid n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \dots \leq t_n \in [T_0, T_1] \right\} \\ &= L(\gamma). \end{aligned} \quad \square$$

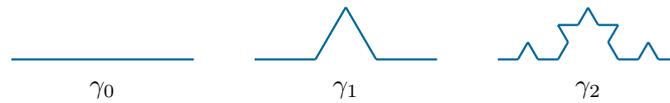


Abbildung 2.5.: Iterative Konstruktion der Koch-Kurve

Wir werden später sehen, wie man mit analytischen Methoden die Länge von weiteren Beispielen von Kurven bestimmen kann (Kapitel 3.2.2).

Wir betrachten nun ein klassisches Beispiel für eine stetige Kurve, die nicht rektifizierbar ist:

**Beispiel 2.3.5** (Koch-Kurve). Wir konstruieren die *Koch-Kurve* in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  wie folgt iterativ aus einer Folge stückweise linearer Kurven: Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} \gamma_0: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 0). \end{aligned}$$

Ist  $n \in \mathbb{N}$  und ist die stückweise lineare Kurve  $\gamma_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  bereits konstruiert, so erhalten wir  $\gamma_{n+1}: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  folgendermaßen: Wir ersetzen jedes maximale gerade Segment von  $\gamma_n$  durch das „nach oben weisende“ Zick-Zack



wobei jedes der neuen geraden Segmente genau ein Drittel der Länge des Ausgangssegments besitzt und die offensichtliche gleichmäßige Parametrisierung besitzt. Dies liefert die in Abbildung 2.5 skizzierte Iteration.

Man sieht leicht, dass die Funktionenfolge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergent ist<sup>2</sup> und somit eine Grenzfunktion  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  besitzt. Da die einzelnen Folgenglieder stetig sind, ist auch  $\gamma$  stetig.

Welche Länge hat  $\gamma$ ? Nach Konstruktion besteht  $\gamma$  aus vier Teilen, die jeweils isometrisch zur um den Faktor  $1/3$  skalierten Kurve  $\gamma$  sind. Damit erhalten wir

$$L(\gamma) = \frac{4}{3} \cdot L(\gamma).$$

Wegen  $L(\gamma) \geq 1 > 0$  folgt somit, dass  $L(\gamma)$  *nicht* endlich ist.

Ähnliche Phänomene treten in der Natur zum Beispiel bei Küstenlängen (Norwegen!) auf.

<sup>2</sup>Für den Fall, dass der Begriff *gleichmäßige Konvergenz* in Vergessenheit geraten sein sollte, ist dies nun eine gute Gelegenheit, das Wissen nochmal aufzufrischen.

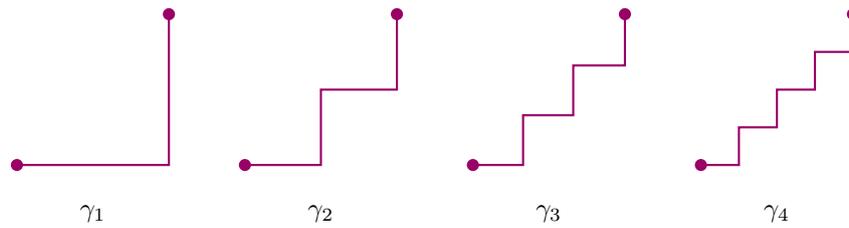


Abbildung 2.6.: Approximation der Diagonalen

**Beispiel 2.3.6** ( $\sqrt{2} = 2$ ?!). Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? (Übungsaufgabe)

*Behauptung.* Es gilt  $\sqrt{2} = 2$ .

*Beweis.* Wir betrachten die folgenden stetigen Kurven in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Zu  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei  $\gamma_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Treppenkurve mit  $n$  Stufen mit Stufentiefe und Stufenhöhe  $1/n$  von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$ , mit der offensichtlichen gleichmäßigen Parametrisierung (Abbildung 2.6).

Dann konvergiert die Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto 1/2 \cdot (t, t). \end{aligned}$$

Also ist

$$L(\gamma) = L\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = 2.$$

Andererseits ist  $L(\gamma) = \sqrt{2}$ . Somit folgt  $\sqrt{2} = 2$ .

Gerade für angehende Lehrer ist es wichtig zu erkennen, ob eine plausibel erscheinende Argumentation (z.B. eines Schülers!) tatsächlich korrekt ist bzw. was der Fehler ist und die unterliegenden Probleme präzise und verständlich erklären zu können. Ein Schüler wird nicht mit gleichmäßiger Konvergenz argumentieren, er könnte aber auch ohne formale Limesbetrachtungen auf das obige (hoffentlich falsche!) Argument stoßen.

Dass Längen von Kurven im allgemeinen keine rationalen Zahlen sind, war bereits den Griechen in der Antike bekannt. Während die Arithmetik damals nur die rationalen Zahlen umfasste, wurde in der Geometrie bereits auch mit irrationalen Größen erfolgreich gearbeitet. Eine Formalisierung der reellen Zahlen, so wie wir sie heute kennen, war damals aber noch außer Reichweite.

Im Zusammenhang mit der Länge von Kurven stellt sich auch die folgende praktische Frage:

**Frage 2.3.7.** Kann man längenerhaltende Landkarten von Gebieten der Erdoberfläche zeichnen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir jedoch zunächst die Geometrie der Erdoberfläche genauer verstehen (Kapitel 4.6).

## 2.4 Kreise und Konstruierbarkeit

Über die Metrik können wir auch Kreise, Sphären und Kugeln einführen. Kreise spielten bereits in der antiken Geometrie eine wichtige Rolle, sowohl in alltäglichen praktischen Problemen als auch im Zusammenhang mit der Konstruierbarkeit mithilfe von Zirkel und Lineal.

### 2.4.1 Kreise, Sphären, Bälle

Kreise, Sphären und Bälle zu einem gegebenen Radius und Mittelpunkt sind die Mengen aller Punkte mit entsprechendem Abstand vom Mittelpunkt.

**Definition 2.4.1** (Sphäre, Ball, Kreis). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sei  $x \in X$  und sei  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

- Die *Sphäre um  $x$  mit Radius  $r$  in  $(X, d)$*  wird definiert als

$$S_x^{(X,d)}(r) := \{y \in X \mid d(y, x) = r\}.$$

- Der *Ball um  $x$  mit Radius  $r$  in  $(X, d)$*  wird definiert als

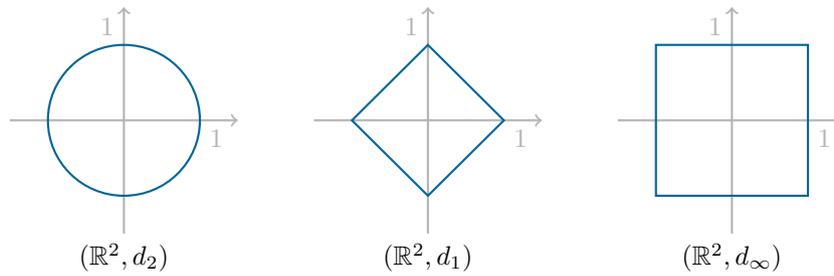
$$B_x^{(X,d)}(r) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

- Sphären in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  bezeichnet man auch als *Kreise*.

**Beispiel 2.4.2** (Sphären in  $\mathbb{R}^2$ ). Sphären in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  sind gewöhnliche euklidische Kreise, Sphären in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  sind Quadrate, deren Ecken auf den Koordinatenachsen liegen (nachrechnen!), und Sphären in  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$  sind Quadrate, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind (nachrechnen! Abbildung 2.7).

**Bemerkung 2.4.3** (Winkel). In  $\mathbb{R}^2$  könnte man nun über Kreise und die Länge von Kurven auch Winkel von Hand definieren. Wir ziehen es aber vor, Winkel über das Skalarprodukt zu beschreiben (weil sich diese Betrachtung auch auf den riemannschen Fall übertragen lässt) und verschieben daher die Diskussion von Winkeln auf das nächste Kapitel (Kapitel 3.3).

**Beispiel 2.4.4** (Sphären und Bälle in Graphen). Sei  $X = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph. Dann nimmt die von  $X$  induzierte Metrik auf  $V$  nur ganzzahlige Werte an; Sphären mit einem Radius, der in  $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$  liegt, sind also ?

Abbildung 2.7.: Sphären vom Radius 1 um 0 in  $\mathbb{R}^2$ 

Ist der Graph  $X$  zusätzlich *lokal endlich* (d.h. jeder Knoten von  $X$  hat endlichen Grad), so enthält jeder Ball in  $V$  bezüglich der von  $X$  induzierten Metrik endlich viele Knoten. Zum Beispiel enthält der Ball um 0 in  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$  vom Radius  $r \in \mathbb{N}$  genau  $2 \cdot r + 1$  Knoten (nachrechnen!). Bälle in  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$  wachsen also linear im Radius.

**Fingerübung 2.4.5** (Bälle in Kontaktgraphen). Wir betrachten nochmal das Beispiel der Kontaktgraphen aus Fingerübung 2.1.8. Sei  $X$  ein solcher Kontaktgraph zu einer Menge  $M$  von Personen und sei  $x \in M$ .

1. Welche Bedeutung hat der Ball vom Radius 1, wenn  $x$  infiziert ist?
2. Welche Bedeutung hat der Ball vom Radius 2, wenn  $x$  infiziert ist?
3. Welche Konsequenzen hat es, wenn die Anzahl der Elemente in den Bällen vom Radius  $r$  um  $x$  exponentiell in  $r$  steigt und  $x$  infiziert ist?

**Ausblick 2.4.6** (Wachstum in der geometrischen Gruppentheorie). Ist  $G$  eine Gruppe und ist  $S \subset G$  ein endliches Erzeugendensystem, so ist der Cayley-Graph  $\text{Cay}(G, S)$  zusammenhängend und lokal endlich. Das Wachstumsverhalten der Funktion

$$\begin{aligned} \beta_{G,S}: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ r &\longmapsto |B_e^{\text{Cay}(G,S)}(r)| \end{aligned}$$

spielt eine wichtige Rolle in der *geometrischen Gruppentheorie*. Insbesondere ergeben sich überraschende Zusammenhänge zwischen diesem (geometrischen!) Wachstumsverhalten und algebraischen Eigenschaften der Gruppe: Nach dem *Polynomialen Wachstumssatz* von Gromov hat diese Funktion  $\beta_{G,S}$  nämlich genau dann polynomiales Wachstum, wenn die Gruppe  $G$  eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index besitzt [37, 19].

## 2.4.2 Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal

Eine klassische wichtige Frage in der Geometrie ist es, welche geometrischen Objekte bzw. welche Punkte sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Indem wir

- das Lineal durch  $\text{Lineal}$  und
- den Zirkel durch  $\text{Zirkel}$

modellieren, erhalten wir induktiv den folgenden Konstruierbarkeitsbegriff:

**Definition 2.4.7** (Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal). Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$ , wobei wir die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  betrachten. Dann schreiben wir

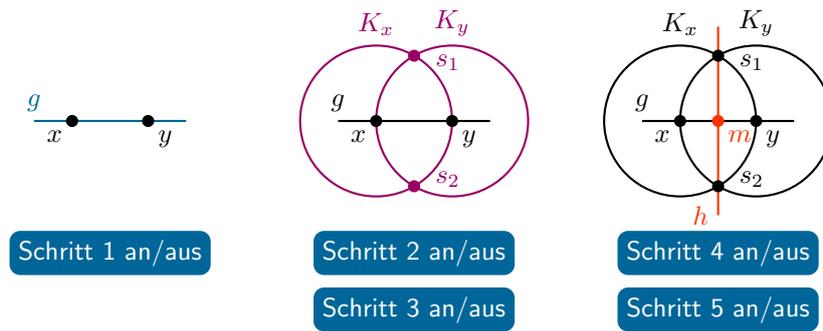
$$K(M) := K_1(M) \cup K_2(M) \cup K_3(M),$$

wobei die elementaren Konstruktionsschritte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  wie folgt definiert sind: Sei  $G(M)$  die Menge aller Geraden in  $\mathbb{R}^2$ , die zwei verschiedene Punkte aus  $M$  enthalten; sei  $C(M)$  die Menge aller Kreise in  $\mathbb{R}^2$ , deren Mittelpunkt in  $M$  liegt und deren Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus  $M$  ist. Wir schreiben

- $K_1(M)$  für die Menge aller **Schnittpunkte zweier verschiedener Geraden aus  $G(M)$** ,
- $K_2(M)$  für die Menge aller **Schnittpunkte von Geraden aus  $G(M)$  mit Kreisen aus  $C(M)$** ,
- $K_3(M)$  für die Menge aller **Schnittpunkte zweier verschiedener Kreise aus  $C(M)$** .

Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^2$  ist *aus  $M$  mit Zirkel und Lineal konstruierbar*, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in K^{\circ n}(M)$  gibt, wobei  $K^{\circ n}$  für die  $n$ -fache Anwendung von  $K$  steht (insbesondere ist  $K^{\circ 0}(M) := M$ ).

**Bemerkung 2.4.8** (Verallgemeinerte Zirkel und Lineale). Dieser Konstruierbarkeitsbegriff lässt sich auch auf allgemeinere metrische Räume verallgemeinern; es bietet sich in diesem Fall an, sich auf eindeutig geodätische metrische Räume zu beschränken und zusätzlich zu verlangen, dass der Raum *eindeutig geodätisch vollständig* ist, d.h., dass jede Geodäte zu einer eindeutigen geodätischen Geraden verlängert werden kann. Man beachte jedoch, dass sich diese Verallgemeinerung sehr exotisch verhalten kann, da es im allgemeinen zum Beispiel sehr viele Schnittpunkte zwischen zwei verschiedenen Sphären geben kann.

Abbildung 2.8.: Konstruktion des Mittelpunktes von  $x$  und  $y$ 

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen noch heute in der Schulmathematik eine wichtige Rolle. Daher wollen wir ein Beispiel im Detail ansehen. Die Grundstruktur bei Konstruktionsproblemen ist immer dieselbe:

- Beschreibung des Konstruktionsproblems.
- Beschreibung einer Konstruktion, die das gegebene Konstruktionsproblem löst.
- Beweis, dass die angegebene Konstruktion tatsächlich so durchgeführt werden kann und das Konstruktionsproblem löst.

**Beispiel 2.4.9** (Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke in  $\mathbb{R}^2$ ).

**Konstruktionsproblem.** Gegeben seien zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \neq y$ . Gesucht ist eine Konstruktion des Mittelpunkts  $m := 1/2 \cdot (x + y) \in \mathbb{R}^2$  von  $x$  und  $y$ .

**Konstruktion.** (s. Abbildung 2.8)

1. Wir zeichnen die Gerade  $g$  durch  $x$  und  $y$ .
2. Wir zeichnen den Kreis  $K_x$  um  $x$  mit Radius  $r := d_2(x, y)$  und den Kreis  $K_y$  um  $y$  mit Radius  $r$ .
3. Wir bezeichnen die beiden Schnittpunkte von  $K_x$  und  $K_y$  mit  $s_1$  und  $s_2$ .
4. Wir zeichnen die Gerade  $h$  durch  $s_1$  und  $s_2$ .
5. Der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  ist dann der gesuchte Punkt  $m$ .

**Beweis der Korrektheit der Konstruktion.** Wir zeigen Schritt für Schritt, dass die Konstruktionsschritte durchgeführt werden können und dass die Konstruktion das gewünschte leistet:

1. Da  $x \neq y$  ist, gibt es tatsächlich genau eine Gerade  $g$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ , die  $x$  und  $y$  enthält.
2. Wegen  $x \neq y$  ist  $r = d_2(x, y) > 0$ . Insbesondere gibt es somit eindeutige Kreise  $K_x$  und  $K_y$  um  $x$  bzw.  $y$  vom Radius  $r$ .
3. Es gilt  $|K_x \cap K_y| = 2$ , denn: Nachrechnen (durch Auflösen der entsprechenden quadratischen Gleichungen) zeigt: Wegen

$$r - r < d_2(x, y) < r + r$$

haben  $K_x$  und  $K_y$  genau zwei Schnittpunkte. Andererseits zeigt Einsetzen, dass die Punkte

$$s_1 := m + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A \cdot (y - x)$$

$$s_2 := m - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A \cdot (y - x)$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in  $K_x \cap K_y$  liegen (nachrechnen!).

Welche geometrische Bedeutung hat  $A$  ?

Welche geometrische Bedeutung hat  $\sqrt{3}/2$  ?

4. Nach dem letzten Schritt ist  $s_1 \neq s_2$ . Es gibt also genau eine Gerade  $h$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ , die  $s_1$  und  $s_2$  enthält.
5. Die Geraden  $g$  und  $h$  haben genau einen Schnittpunkt, nämlich  $m$ , denn: Da  $s_1$  und  $s_2$  offenbar nicht auf  $g$  liegen, ist  $g \neq h$ . Also haben  $g$  und  $h$  höchstens einen Schnittpunkt und es genügt somit zu zeigen, dass  $m$  auf  $g$  und  $h$  liegt. Offensichtlich gilt  $m \in g$ . Außerdem ist auch  $m \in h$ , denn

$$m = \frac{1}{2} \cdot (s_1 + s_2).$$

**Caveat 2.4.10.** Es passiert sehr leicht, dass man sich bei geometrischen Argumenten oder Konstruktionsbeschreibungen zu sehr von der in der Anschauung suggerierten „Anordnung“ der Objekte verführen lässt. Eine Sammlung solcher Fehlschlüsse findet sich zum Beispiel im Buch von Konforowitsch [31] (das auch viele andere häufige Fehler illustriert und somit ein wertvolles Hilfsmittel für jeden Mathematiklehrer ist!).

**Interaktives Tool 2.4.11** (euclidea). Die Puzzle-Sammlung Euclidea bietet die Möglichkeit, unkompliziert Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu üben:

<https://www.euclidea.xyz/>

**Ausblick 2.4.12** (Konstruierbarkeit und Galoistheorie). Ein Abzählargument zeigt, dass ausgehend von den Punkten  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$  nur abzählbar viele Punkte in  $\mathbb{R}^2$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Da  $\mathbb{R}^2$  überabzählbar ist, gibt es also insbesondere Punkte in  $\mathbb{R}^2$ , die *nicht* aus diesen beiden Anfangspunkten mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Eine genauere Analyse der Gleichungen für Geraden und Kreise zeigt, dass nur ganz bestimmte algebraische Zahlen in  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  konstruiert werden können. Mithilfe der Galoistheorie erhält man dann die folgende Charakterisierung [42][38, Kapitel 3.5.3]:

**Satz 2.4.13** (Konstruierbarkeit und Galoistheorie). *Sei  $M \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  eine Teilmenge mit  $0, 1 \in M$  und sei  $z \in \mathbb{C}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Punkt  $z$  kann aus  $M$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.*
2. *Es gibt eine Galois-Erweiterung  $L$  von  $\mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$ , deren Grad eine Zweierpotenz ist, mit  $z \in L$ .*

**Beispiel 2.4.14** (Konstruierbarkeit, Unmöglichkeit). Konkrete Konsequenzen von Satz 2.4.13 sind:

- Im allgemeinen ist die Drittelung eines gegebenen Winkels *nicht* mit Zirkel und Lineal möglich.
- Die Kantenlänge eines Würfels mit Volumen 2 ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  konstruierbar.
- Das reguläre Siebeneck mit Radius 1 ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  konstruierbar. Ebenso sind zum Beispiel auch das reguläre Neun- oder Elfeck *nicht* konstruierbar.  
Im Gegensatz dazu ist zum Beispiel das reguläre Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruierbar (!).
- Die Kantenlänge eines Quadrats mit demselben Flächeninhalt wie der Einheitskreis ist *nicht* mit Zirkel und Lineal aus  $\{(0, 0), (1, 0)\}$  konstruierbar (*Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises*).

**Ausblick 2.4.15** (Origami). Analog kann man auch die Reichweite anderer Konstruktionsprinzipien mit algebraischen Methoden studieren, z.B. die Konstruktion mithilfe von Origami (d.h. durch Falten von Papier).

## 2.5 Symmetrie

Bereits in Kapitel 1.6.3 haben wir ein einfaches Beispiel kennengelernt, in dem Symmetrien eine wichtige Rolle gespielt haben. Allgemein gehört zur Untersuchung eines geometrischen Objekts auch die Untersuchung seiner Symmetriegruppe, im metrischen Fall also der Isometriegruppe.

Ein Schlüsselbeispiel ist die Isometriegruppe euklidischer Räume. Als ersten Schritt in der Untersuchung der Isometriegruppe euklidischer Räume zeigen wir das folgende Starrheitsresultat: Jede Isometrie von  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  ist affin linear. Als *Starrheit* bezeichnet man in der Geometrie Phänomene, bei denen Abbildungen mehr Struktur erhalten als eigentlich zu erwarten ist; in diesem Falle bezieht sich dies auf die Tatsache, dass Isometrien (also Abbildungen, die nur die metrische Struktur erhalten) euklidischer Räume bereits auch mit der linearen Struktur verträglich sind. Insbesondere greifen dann die Methoden der linearen Algebra: In Kapitel 3.4.2 werden wir die Isometriegruppe von  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  genau beschreiben.

**Satz 2.5.1** (Starrheit euklidischer Isometrien). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ . Dann ist  $f$  affin linear, d.h.  $f - f(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $\mathbb{R}$ -linear. Insbesondere können wir die Untergruppe*

$$\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) := \{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \mid f(0) = 0\}$$

als Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  auffassen.

**Fingerübung 2.5.2** (Matrixgruppen). Können Sie sich an der Definition der Matrixgruppen erinnern? Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Was ist  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  ?

**Hinweis**

2. Diese Gruppe heißt ?

3. Was ist  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  ?

**Hinweis**

4. Diese Gruppe heißt ?

5. Die Gruppenstruktur ist jeweils **durch** gegeben.

*Beweis.* Die Idee des Beweises ist es, den bereits hergestellten Zusammenhang zwischen euklidischen Geodäten und der linearen Struktur zu nutzen. Sei  $f_0 := f - f(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir zeigen nun, dass  $f_0$  linear ist: Nach Konstruktion ist auch  $f_0$  eine Isometrie und  $f_0(0) = f(0) - f(0) = 0$ .

- ① *Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation für Vektoren auf der Einheitskugel.* Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $d_1(0, x) = 1$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$ , denn: Wegen  $d_2(0, x) = 1$  ist

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

eine geodätische Gerade in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Also ist auch  $f_0 \circ \gamma$  eine geodätische Gerade (Proposition 2.2.4) und  $f_0 \circ \gamma(0) = f_0(0) = 0$ . Mit Bemerkung 2.2.9 folgt

$$\begin{aligned} f_0(\lambda \cdot x) &= f_0 \circ \gamma(\lambda) \\ &= \lambda \cdot f_0 \circ \gamma(1) && \text{(Bemerkung 2.2.9)} \\ &= \lambda \cdot f_0(x). \end{aligned}$$

- ①' *Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation.* Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$ , denn: Ohne Einschränkung sei  $x \neq 0$ . Mit ① folgt dann für den normierten Vektor  $x' := 1/d_2(0, x) \cdot x$ , dass

$$\begin{aligned} f_0(\lambda \cdot x) &= f_0(\lambda \cdot d_2(0, x) \cdot x') && \text{(Konstruktion von } x') \\ &= \lambda \cdot d_2(0, x) \cdot f_0(x') = \lambda \cdot f_0(d_2(0, x) \cdot x') && \text{(nach ①, zweimal angewendet)} \\ &= \lambda \cdot f_0(x). \end{aligned}$$

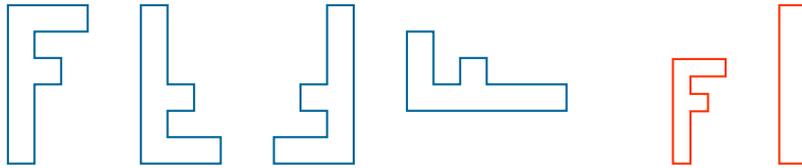
- ② *Verträglichkeit mit Addition.* Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y)$ , denn: Nach ①' können wir ohne Einschränkung  $x \neq y$  annehmen. Wir betrachten die Geodäte

$$\begin{aligned} \gamma: [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + \frac{t}{L} \cdot (y - x) \end{aligned}$$

von  $x$  nach  $y$ , wobei  $L := d_2(x, y)$ . Also ist  $f_0 \circ \gamma$  eine/die Geodäte von  $f_0(x)$  nach  $f_0(y)$  (Proposition 2.2.4); mit dem vorigen Schritt und Proposition 2.2.6 folgt somit

$$\begin{aligned} f_0(x + y) &= f_0\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}y\right)\right) \\ &= 2 \cdot f_0 \circ \gamma\left(\frac{L}{2}\right) && \text{(①' und Definition von } \gamma) \\ &= 2 \cdot \left(f_0(x) + \frac{1}{2} \cdot (f_0(y) - f_0(x))\right) && \text{(Warum?)} \\ &= f_0(x) + f_0(y). \end{aligned}$$

Also ist  $f_0$  linear. □

Abbildung 2.9.: (Nicht-)Beispiele für Kongruenzen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ 

Ein wichtiger Begriff, der auf Symmetrie aufbaut, ist Kongruenz; anschaulich gesprochen sind Teilmengen eines metrischen Raumes kongruent, wenn sie sich so innerhalb des metrischen Raums „bewegen“ lassen, dass sie „übereinstimmen“.

**Definition 2.5.3 (Kongruenz).** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zwei Teilmengen  $A, B \subset X$  heißen *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(X, d)$  mit  $f(A) = B$  gibt.

**Beispiel 2.5.4 (Kongruenzen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ).** Die linken vier Figuren in Abbildung 2.9 sind in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  kongruent zueinander (nachrechnen!). Die rechten beiden Figuren sind *nicht* kongruent zu diesen Figuren (nachrechnen!).

Um zu bestimmen, welche Teilmengen eines metrischen Raumes kongruent zueinander sind, ist es also essentiell, die Isometriegruppe zu bestimmen. Im euklidischen Fall ist Satz 2.5.1 ein erster Schritt; diese Untersuchung wird in Satz 3.4.5 vervollständigt. Die genaue Kenntnis der Isometriegruppe von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  – und der davon abgeleiteten Kongruenzsätze – spielt in der elementaren ebenen Geometrie eine zentrale Rolle.

## 2.6 Das Extremalprinzip

Das Extremalprinzip ist eine allgemeine Lösungsstrategie für viele mathematische Probleme [20], die insbesondere in der elementaren Geometrie schöne Anwendungen besitzt.

Die Grundidee des *Extremalprinzips* besteht darin, Objekte zu betrachten, die sich dadurch auszeichnen, dass sie gewisse Größen maximieren oder minimieren.

Naheliegende Fragen bei der Lösung von geometrischen Problemen sind nach dem Extremalprinzip also:

- Welche Punkte haben den größten bzw. kleinsten Abstand voneinander?
- Welche Punkte haben den größten bzw. kleinsten Abstand von einem anderen geometrischen Objekt?

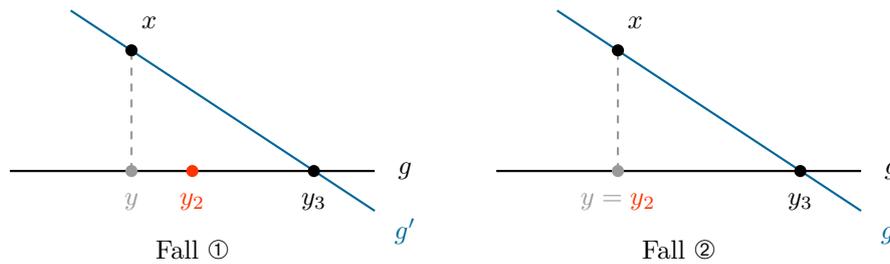


Abbildung 2.10.: Anordnung der Punkte im Satz von Sylvester-Gallai

Eine schöne Anwendung des Extremalprinzips ist der Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai; als Konsequenz daraus erhalten wir in Korollar 2.6.6 ein Nicht-Einbettbarkeitsresultat für die Fano-Ebene.

**Satz 2.6.1** (Satz von Sylvester-Gallai). *Sei  $M$  eine endliche Menge von Punkten in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit folgender Eigenschaft:*

*Führt eine Gerade  $g$  in  $\mathbb{R}^2$  durch zwei verschiedene Punkte aus  $M$ , so liegt auch ein dritter Punkt aus  $M$  auf  $g$ .*

*Dann folgt: Alle Punkte aus  $M$  liegen auf einer gemeinsamen Geraden.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $|M| \geq 3$ . Angenommen, die Punkte aus  $M$  lägen *nicht* alle auf einer Geraden. Wir setzen mit dem Extremalprinzip an: Sei  $G$  die Menge aller Geraden in  $\mathbb{R}^2$ , die mindestens zwei Punkte aus  $M$  enthalten. Da  $M$  endlich ist, ist auch  $G$  endlich. Also gibt es ein Paar  $(x, g) \in M \times G$  mit folgenden Eigenschaften:

- Der Punkt  $x$  liegt nicht auf  $g$  und
- der Abstand von  $x$  zu  $g$  unter all solchen Paaren ist minimal.

Der *Abstand* von  $x$  zu  $g$  ist dabei als

$$d_2(x, g) := \inf \{ d_2(x, y) \mid y \in g \}$$

definiert; ein topologisches Argument zeigt, dass dieses Infimum tatsächlich ein Minimum ist (nachrechnen). Insbesondere existiert ein Punkt  $y \in g$  mit  $d_2(x, g) = d_2(x, y)$ .

Nach Definition von  $G$  und der Annahme über  $M$  gibt es drei verschiedene Punkte  $y_1, y_2, y_3 \in M$ , die auf  $g$  liegen. Mindestens zwei dieser Punkte liegen auf „derselben Seite“ von  $y$ . Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass die Punkte wie in einem der beiden Fälle der schematischen Abbildung 2.10 angeordnet sind.

Sei  $g'$  die Gerade durch  $x$  und  $y_3$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

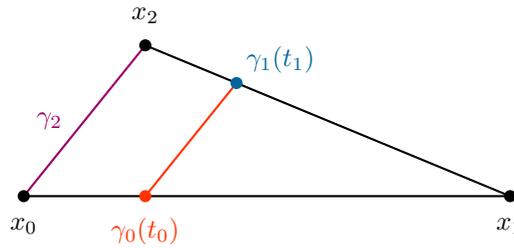


Abbildung 2.11.: Abschätzung des Abstands zwischen Punkten und Seiten, schematisch

- ① Es gelte  $y_2 \neq y$ . In diesem Fall können wir Lemma 2.6.2 auf das durch die Punkte  $(y, y_3, x)$  bestimmte geodätische Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  und den Punkt  $y_2$  auf der Geodäten von  $y$  nach  $y_3$  anwenden. Mit Lemma 2.6.2 folgt, dass

$$d_2(y_2, g') < d_2(y, x) = d_2(x, g)$$

ist, im Widerspruch zur extremalen Wahl des Paares  $(x, g)$ .

- ② Es gelte  $y_2 = y$ . In diesem Fall können wir Lemma 2.6.3 auf das durch die Punkte  $(y = y_2, y_3, x)$  bestimmte geodätische Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  anwenden. Sei  $g''$  die Gerade durch  $x$  und  $y$ . Mit Lemma 2.6.2 folgt, dass

$$d_2(y_2, g') < d_2(x, g) \quad \text{oder} \quad d_2(x, g'') < d_2(x, g)$$

ist, im Widerspruch zur extremalen Wahl des Paares  $(x, g)$ .

Also liegen die Punkte aus  $M$  alle auf einer gemeinsamen Geraden.  $\square$

Um den Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai (Satz 2.6.1) zu vervollständigen, müssen wir noch die verwendeten Eigenschaften von euklidischen Dreiecken nachweisen (Abbildung 2.11, Abbildung 2.12):

**Lemma 2.6.2.** Sei  $(\gamma_0: [0, L_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1: [0, L_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2: [0, L_2] \rightarrow \mathbb{R}^2)$  ein geodätisches Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den Ecken  $x_0 := \gamma_0(0)$ ,  $x_1 := \gamma_1(0)$  und  $x_2 := \gamma_2(0)$ ; diese Ecken seien alle verschieden. Sei  $t_0 \in (0, L_0)$ . Dann gibt es ein  $t_1 \in (0, L_1)$  mit

$$d_2(\gamma_0(t_0), \gamma_1(t_1)) < d_2(x_0, x_2).$$

*Beweis.* Dies ist eine einfache Variante des Strahlensatzes: Wir betrachten dazu  $t_1 := L_1 - L_1 \cdot t_0 / L_0 \in (0, L_1)$ . Mit der Charakterisierung euklidischer Geodäten (Proposition 2.2.6) folgt

$$\gamma_1(t_1) = x_1 + \frac{t_1}{L_1} \cdot (x_2 - x_1) = x_2 + \frac{t_0}{L_0} (x_1 - x_2).$$

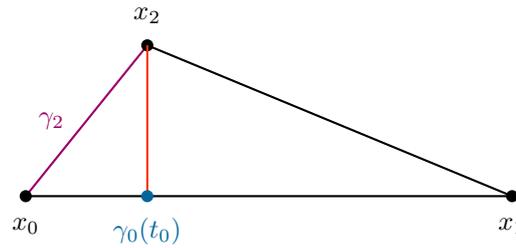


Abbildung 2.12.: Abschätzung des Abstands zwischen Ecken und Seiten, schematisch

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 d_2(\gamma_0(t_0), \gamma_1(t_1)) &= d_2\left(x_0 + \frac{t_0}{L_0}(x_1 - x_0), x_2 + \frac{t_0}{L_0}(x_1 - x_2)\right) && \text{(Proposition 2.2.6)} \\
 &= d_2\left(0, \left(1 - \frac{t_0}{L_0}\right) \cdot (x_0 - x_2)\right) && \text{(Translation um } t_0/L_0 \cdot x_1) \\
 &= \left(1 - \frac{t_0}{L_0}\right) \cdot d_2(0, x_0 - x_2) && \text{(Skalierung)} \\
 &= \left(1 - \frac{t_0}{L_0}\right) \cdot d_2(x_0, x_2) && \text{(Translation um } x_2) \\
 &< d_2(x_0, x_2),
 \end{aligned}$$

wie behauptet. □

**Lemma 2.6.3.** Sei  $(\gamma_0: [0, L_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1: [0, L_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2: [0, L_2] \rightarrow \mathbb{R}^2)$  ein geodätisches Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den Ecken  $x_0 := \gamma_0(0)$ ,  $x_1 := \gamma_1(0)$  und  $x_2 := \gamma_2(0)$ ; diese Ecken seien alle verschieden. Dann gilt:

- Es gibt ein  $t_1 \in [0, L_1]$  mit  $d_2(x_0, \gamma_1(t_1)) < d_2(x_0, x_2)$
- oder es gibt ein  $t_0 \in (0, L_0]$  mit  $d_2(x_2, \gamma_0(t_0)) < d_2(x_0, x_2)$ .

*Beweis.* Wir gehen ähnlich wie in Lemma 2.2.7 vor und verwenden auch eine ähnliche Notation. Sei also  $x := x_0$ ,  $z := x_2$  und  $\bar{z} := x_1$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

- $d_2(x, \bar{z}) \leq d_2(z, \bar{z})$  ist (sonst) ) und
- $x = 0$  (sonst) ).

Zu  $t \in \mathbb{R}$  betrachten wir  $m(t) := t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot z$ . Wir zeigen im folgenden, dass es ein  $t \in (0, 1]$  gibt mit  $d_2(0, m(t)) < d_2(0, z)$ ; mithilfe der Charakterisierung euklidischer Geodäten (Proposition 2.2.6) folgt daraus direkt die

Behauptung (nachrechnen!). Analog zum Beweis von Lemma 2.2.7 berechnen wir (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} d_2(0, z)^2 &= d_2(0, m(t) + (z - m(t)))^2 \\ &= d_2(0, m(t))^2 + d_2(0, z - m(t))^2 + 2 \cdot t \cdot \left( d_2(0, z)^2 - \sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j - t \cdot d_2(z, \bar{z})^2 \right). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$t := \frac{d_2(0, z)^2 - \sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j}{d_2(z, \bar{z})^2},$$

der Nenner ist hierbei nicht 0, da  $z \neq \bar{z}$ . Nach Konstruktion ist  $t$  so gewählt, dass  $t \neq 0$ , so ist  $d_2(0, z - m(t))^2 \neq 0$ , und somit folgt die behauptete Ungleichung  $d_2(0, z) > d_2(0, m(t))$ . Es bleibt daher zu zeigen, dass  $t \in (0, 1]$  ist:

- Es ist  $t > 0$ , denn: Wegen

$$\begin{aligned} d_2(0, z)^2 - \sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j &= \frac{1}{2} \cdot d_2(z, \bar{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot d_2(0, z)^2 - \frac{1}{2} \cdot d_2(0, \bar{z})^2 && \text{(Binomische Formel)} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot d_2(0, z)^2 + 0 && \text{(wegen } d_2(x, \bar{z}) \leq d_2(z, \bar{z})\text{)} \\ &> 0 && \text{(da } x \neq z\text{)} \end{aligned}$$

und der Positivität des Nenners in der Definition von  $t$  folgt  $t > 0$ .

- Es ist  $t \leq 1$ , denn: Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d_2(0, z)^2 - \sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j &= \frac{1}{2} \cdot d_2(z, \bar{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot d_2(0, z)^2 - \frac{1}{2} \cdot d_2(0, \bar{z})^2 && \text{(Binomische Formel)} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot d_2(z, \bar{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot d_2(z, \bar{z})^2 && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq d_2(z, \bar{z})^2 \end{aligned}$$

und somit  $t \leq 1$ . □

**Bemerkung 2.6.4.** Die Beweis von Lemma 2.6.3 war vergleichsweise mühsam, weil wir das der euklidischen Metrik unterliegenden Skalarprodukt nur implizit genutzt haben. An dieser Stelle sieht man bereits, dass die Abstraktion zu Skalarprodukten und euklidischen Vektorräumen die Bearbeitung geometrischer Fragestellungen wesentlich vereinfacht. In Kapitel 3 werden wir Skalarprodukte systematisch nutzen und insbesondere auch weitere klassische Sätze über euklidische Dreiecke beweisen.

**Fingerübung 2.6.5.** Wie könnte man den Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai durch geeignete Abkürzungen so darstellen, dass er für Schüler der Mittelstufe nachvollziehbar wird?

**Korollar 2.6.6.** Die Fano-Ebene (Beispiel 1.3.4, Abbildung 1.3) kann nicht nach  $\mathbb{R}^2$  (mit der euklidischen Metrik oder als Mini-Geometrie) geradlinig eingebettet werden, d.h. es gibt keine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^2$  von sieben Punkten, so dass

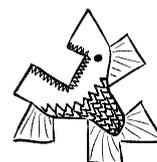
1. je drei verschiedene Punkte aus  $M$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und
2. jede Gerade höchstens drei Punkte aus  $M$  enthält.

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine solche Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^2$  von sieben Punkten. Wegen der ersten Eigenschaft erfüllt  $M$  die Bedingungen aus dem Satz von Sylvester-Gallai (Satz 2.6.1). Nach diesem Satz liegen dann aber alle Punkte aus  $M$  auf einer gemeinsamen Geraden, im Widerspruch zur zweiten Eigenschaft von  $M$ . Also kann die Fano-Ebene *nicht* geradlinig in  $\mathbb{R}^2$  eingebettet werden.  $\square$

**Anmerkung zum Lernen (Zusammenfassung).** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 2. Berücksichtigen Sie dabei die folgenden Fragen:

- Was ist metrische Geometrie?
- Was sind „Geraden“ in metrischer Geometrie?
- Was ist Symmetrie in metrischer Geometrie?
- Wie kann man die Länge stetiger Kurven in metrischer Geometrie definieren?
- Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
- Wie lässt sich Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal formalisieren?
- Welche Anwendungen gibt es?

# 3



## Euklidische Geometrie

---

Wir werden uns nun auf eine spezielle metrische Geometrie konzentrieren, die euklidische Geometrie in  $\mathbb{R}^n$  als Geometrie des Standardskalarprodukts. Das Skalarprodukt wird es uns erlauben, Winkel und Volumina etc. zu definieren und die Symmetriegruppe von  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  genau zu beschreiben. Wir werden uns dann darauf aufbauend eingehend mit verschiedenen Symmetriephänomenen beschäftigen, unter anderem mit Kongruenz, Regularität und mit Pflasterungen der Ebene.

Dies zeigt, wie die Methoden der Linearen Algebra und der Analysis ineinandergreifen und eine robuste und gut handhabbare Grundlage für die euklidische Geometrie in  $\mathbb{R}^n$  liefern.

Das Verständnis dieser Beschreibung der euklidischen Geometrie in  $\mathbb{R}^n$  bildet außerdem den Ausgangspunkt für die riemannsche Geometrie, die wir zur Konstruktion und Untersuchung der hyperbolischen Ebene im nächsten Kapitel nutzen werden.

### Überblick über dieses Kapitel.

3.1	Normierte Räume und Skalarprodukte	80
3.2	Kurven	86
3.3	Winkel	96
3.4	Symmetrie	105
3.5	Pflasterungen der euklidischen Ebene	119

**Schlüsselbeispiel.** euklidische Räume als Räume mit Skalarprodukt

## 3.1 Normierte Räume und Skalarprodukte

Eine systematische, algebraische, Quelle für Metriken auf Vektorräumen sind Skalarprodukte: Skalarprodukte induzieren Normen und Normen induzieren Metriken. Wir erinnern in diesem Abschnitt an grundlegende Begriffe und Resultate aus der linearen Algebra [10, 32, 39] zu normierten Räumen und Skalarprodukten. Insbesondere erlauben es Skalarprodukte, über Orthogonalität (und Winkel) zu sprechen.

**Anmerkung zum Lernen.** Können Sie sich noch an die Definition normierter Räume und euklidischer Vektorräume erinnern? Welche Beispiele fallen Ihnen ein? Was ist Orthogonalität?

### 3.1.1 Normierte Räume

Normierte Räume sind  $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit einem Längenbegriff für Vektoren. Normen induzieren Metriken.

**Definition 3.1.1** (Norm, normierter Raum). Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Norm auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Definitheit.* Für alle  $x \in V \setminus \{0\}$  ist  $\|x\| > 0$ .
2. *Homogenität.* Für alle  $x \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , wobei  $|\lambda|$  den gewöhnlichen Absolutbetrag von  $\lambda$  bezeichnet.
3. *Dreiecksungleichung.* Für alle  $x, y \in V$  gilt  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

In diesem Fall bezeichnet man das Paar  $(V, \|\cdot\|)$  als *normierten Raum*.

**Bemerkung 3.1.2** (Norm  $\rightsquigarrow$  Metrik). Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V$ , so ist

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (v, w) &\longmapsto \|v - w\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf  $V$  (nachrechnen!), die von  $\|\cdot\|$  induzierte Metrik.

**Beispiel 3.1.3** (euklidische Norm, 1-Norm,  $\infty$ -Norm). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Metriken  $d_2, d_1, d_\infty$  aus Beispiel 2.1.2 werden von den folgenden Normen auf  $\mathbb{R}^n$  induziert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \\ \|\cdot\|_1: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^n |x_j| \\ \|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j| \end{aligned}$$

Diese Normen verallgemeinern sich zu entsprechenden Normen auf Funktionenräumen; die zugehörige Geometrie dieser unendlich-dimensionalen Vektorräume ist unter anderem Gegenstand der *Funktionalanalysis*.

**Fingerübung 3.1.4** (Normen?). Welche der folgenden Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sind Normen?

1.  $x \mapsto \min(|x_1|, |x_2|)$

Ja  Nein

2.  $x \mapsto 2021 \cdot \|x\|_\infty$

Ja  Nein

3.  $x \mapsto |x_1 + x_2|$

Ja  Nein

4.  $x \mapsto x_1^2 + x_2^2$

Ja  Nein

Wie wir bereits im letzten Kapitel gesehen haben, liefern verschiedene Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sehr unterschiedliche Geometrien. Die induzierte Topologie ist jedoch immer dieselbe:

**Satz 3.1.5** (Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Fall [58, Kapitel 1.7]). *Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sind  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  Normen auf  $V$ , so sind  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  bereits äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  mit*

$$\forall x \in V \quad \frac{1}{C} \cdot \|x\| \leq \|x\|' \leq C \cdot \|x\|.$$

*Insbesondere induzieren  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  dieselbe Topologie auf  $V$ .*

### 3.1.2 Skalarprodukte

Als nächsten Verfeinerungsschritt betrachten wir Normen, die von Skalarprodukten induziert sind.

**Definition 3.1.6** (Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum). Ein *Skalarprodukt* auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Symmetrie*. Für alle  $x, y \in V$  ist  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
2. *Positive Definitheit*. Für alle  $x \in V \setminus \{0\}$  ist  $\langle x, x \rangle > 0$ .

In diesem Fall ist das Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein *euklidischer Vektorraum*.

**Proposition 3.1.7** (Skalarprodukt  $\rightsquigarrow$  Norm). Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$  und sei

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Für alle  $x, y \in V$  gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

und Gleichheit liegt genau dann vor, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

2. Die Abbildung  $\|\cdot\|$  ist eine Norm auf  $V$ , die von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm.
3. Polarisierung. Für alle  $x, y \in V$  gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \cdot (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

*Beweis.* Diese Eigenschaften sind klassische Resultate aus der Linearen Algebra [39, Satz 1.1.13, Korollar 1.1.14, Proposition 1.1.16].  $\square$

**Anmerkung zum Lernen.** Können Sie sich an die Beweise von Proposition 3.1.7 erinnern? Frischen Sie Ihre Erinnerung auf!

**Beispiel 3.1.8** (Standardskalarprodukt). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Das *Standardskalarprodukt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j. \end{aligned}$$

Die von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  ist die euklidische Metrik  $d_2$ .

**Fingerübung 3.1.9** (Skalarprodukte?). Welche der folgenden Abbildungen sind Skalarprodukte auf  $\mathbb{R}^2$ ?

1.  $(x, y) \mapsto x_1 \cdot y_1$

Ja  Nein

2.  $(x, y) \mapsto x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Ja  Nein

3.  $(x, y) \mapsto 2021 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + 2020 \cdot x_2 \cdot y_2$

Ja  Nein

4.  $(x, y) \mapsto x_1 \cdot y_2 + 2 \cdot x_2 \cdot y_1$

Ja  Nein

**Beispiel 3.1.10.** Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Dann sind die Metriken  $d_1$  und  $d_\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$  bzw. die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$  *nicht* von einem Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  induziert. Für  $\|\cdot\|_1$  kann man wie folgt argumentieren: *Angenommen*,  $\|\cdot\|_1$  wäre von einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  induziert. Mit der Polarisierungsformel (Proposition 3.1.7) folgt dann für  $x := (1, 1)$  und  $y := (-1, 1)$ , dass

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 2^2 - 2^2) = -2 \\ \langle x, -y \rangle_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 2^2 - 2^2) = -2 \neq -(-2),\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Bilinearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ . Also kann es ein solches Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  nicht geben.

Auf  $\mathbb{R}^n$  gibt es bekanntlich, bis auf Koordinatentransformation, nur ein Skalarprodukt; dies lässt sich zum Beispiel mit dem Gramschen Orthonormalisierungsverfahren zeigen:

**Satz 3.1.11** (Klassifikation der Skalarprodukte [39, Korollar 1.2.11]). *Seien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  euklidische Vektorräume derselben endlichen Dimension. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus  $f: V \rightarrow V'$  mit*

$$\forall_{x, y \in V} \quad \langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle.$$

*Insbesondere ist  $f$  dann eine Isometrie bezüglich der von den Skalarprodukten induzierten Normen und Metriken.*

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, eine koordinatenfreie Beschreibung der euklidischen Geometrie zur Verfügung zu haben; daher ist es sinnvoll, Definitionen, Eigenschaften und Sätze in der Sprache der euklidischen Vektorräume

zu formulieren und nicht nur für das Standardskalarprodukt. Dies spielt insbesondere in der riemannschen Geometrie eine wichtige Rolle.

Die genaue Beschreibung der Isometriegruppen von euklidischen Vektorräumen diskutieren wir in Kapitel 3.4.

### 3.1.3 Orthogonalität

Skalarprodukte liefern insbesondere einen Begriff von Orthogonalität. Wir erinnern kurz an die Definition, an den Nutzen von Orthogonalität bei der Bestimmung von Abständen und geben ein Beispiel zu orthogonalen Projektionen.

**Definition 3.1.12 (orthogonal).** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Zwei Vektoren  $x, y \in V$  heißen *orthogonal*, falls  $\langle x, y \rangle = 0$ ; in diesem Fall schreiben wir auch

$$x \perp y.$$

Allgemeiner nennen wir Teilmengen  $A, B \subset V$  *orthogonal* (und schreiben dann  $A \perp B$ ), wenn

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \perp y.$$

Ist  $A \subset V$ , so nennen wir  $A^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in A \quad x \perp y\}$  das *orthogonale Komplement von A*.

Die Wichtigkeit des Orthogonalitätsbegriffs liegt in der folgenden einfachen Beobachtung, dass sozusagen der Satz des Pythagoras bereits in die Definition des Skalarprodukts integriert ist:

**Bemerkung 3.1.13 (Orthogonalität und Abstände).** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm  $\|\cdot\|$  und seien  $x, y \in V$  mit  $x \perp y$ . Dann gilt

$$\|x + y\|^2 = \color{blue}{?} \qquad \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Diese Beobachtung ist auch der unterliegende Grund dafür, dass Abstandsminimierung in der Regel durch sogenannte orthogonale Projektionen erreicht wird. Im Zusammenhang mit dem Extremalprinzip ist dies ein wichtiges Hilfsmittel. Wir illustrieren dies am folgenden Beispiel:

**Proposition 3.1.14 (lange Vektoren [20, 3.19]).** *Es seien 2020 Vektoren in der Ebene gegeben. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel:*

- *Ein Zug besteht darin, einen der gegebenen Vektoren auszuwählen. Dieser Vektor steht dann in den folgenden Zügen nicht mehr zur Verfügung.*
- *Die Spieler A und B ziehen abwechselnd.*
- *Das Spiel endet, wenn keine Vektoren mehr zur Verfügung stehen.*

- *Es verliert derjenige Spieler, bei dem die Summe der Vektoren die kleinere (euklidische) Länge hat.*
- *Spieler A beginnt.*

Dann besitzt Spieler A eine Strategie, mit der er nicht verliert.

*Beweis.* Was ist eine gute Strategie? Es genügt nicht, in jedem Zug einfach nur einen Vektor maximaler Länge auszuwählen, da die Länge von Vektoren im allgemeinen *nicht* additiv ist. Die Idee ist daher, die Länge nur in einer gewissen Richtung zu optimieren.

Wir betrachten auf  $\mathbb{R}^2$  das Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und die davon induzierte euklidische Norm  $\| \cdot \|_2$ . Sei  $s \in \mathbb{R}^2$  die Summe der gegebenen 2020 Vektoren; wir betrachten zunächst nur den Fall, dass  $s \neq 0$  ist. Sei  $P$  die Koordinatenabbildung der orthogonale Projektion auf  $\mathbb{R} \cdot s$ , d.h.

$$P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto ?$$

und sei  $Q$  die dazu komplementäre Abbildung

$$Q := \text{id}_{\mathbb{R}^2} - P \cdot s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere gilt  $P(x) \cdot s \perp Q(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Spieler A wählt in jedem Zug einen Vektor  $x$  aus, der unter **den verbliebenen Vektoren die Größe  $P(x)$  maximiert**.

Warum verliert Spieler A mit dieser Strategie nicht? Seien  $a_1, \dots, a_{1010}$  bzw.  $b_1, \dots, b_{1010}$  die von den Spielern A bzw. B gewählten Vektoren und seien  $s_A := \sum_{j=1}^{1010} a_j$  bzw.  $s_B := \sum_{j=1}^{1010} b_j$  die entsprechenden Summen. Wir zeigen  $\|s_A\|_2 \geq \|s_B\|_2$ , indem wir die Anteile parallel bzw. orthogonal zu  $s$  abschätzen:

- *Anteile in  $s$ -Richtung.* Die Strategie von A liefert

$$P(s_A) = P\left(\sum_{j=1}^{1010} a_j\right) = \sum_{j=1}^{1010} P(a_j) \geq \sum_{j=1}^{1010} P(b_j) = P(s_B).$$

Wegen  $P(s_A) + P(s_B) = P(s_A + s_B) = P(s) = 1$ , folgt daraus mit einer einfachen Fallunterscheidung  $|P(s_A)| \geq |P(s_B)|$  (nachrechnen! S. C.14), und damit

$$\|P(s_A) \cdot s\|_2 = |P(s_A)| \cdot \|s\|_2 \geq |P(s_B)| \cdot \|s\|_2 = \|P(s_B) \cdot s\|_2.$$

- *Zu  $s$  orthogonale Anteile.* Nach Konstruktion ist außerdem

$$Q(s_A) = Q(s - s_B) = Q(s) - Q(s_B) = 0 - Q(s_B).$$

Somit erhalten wir insgesamt wegen der Orthogonalität, dass

$$\begin{aligned}
 \|s_A\|_2^2 &= \|P(s_A) \cdot s + Q(s_A)\|_2^2 \\
 &= \|P(s_A) \cdot s\|_2^2 + \|Q(s_A)\|_2^2 \quad (\text{Warum?}) \\
 &\geq \|P(s_B) \cdot s\|_2^2 + \|Q(s_B)\|_2^2 \quad (\text{siehe oben}) \\
 &= \|P(s_B) \cdot s + Q(s_B)\|_2^2 \quad (\text{Warum?}) \\
 &= \|s_B\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Also verliert Spieler A mit dieser Strategie nicht.

Ist  $s = 0$ , so betrachtet man statt der orthogonalen Projektion auf  $\mathbb{R} \cdot s$  die orthogonale Projektion auf  $\mathbb{R} \cdot e_1$ . Alle wesentlichen Ungleichungen gelten auch in diesem Fall (nachrechnen!) und man erhält analog die Behauptung.  $\square$

## 3.2 Kurven

Wir werden uns nun genauer mit (parametrisierten) Kurven in normierten Räumen bzw. euklidischen Räumen beschäftigen. Metrische Räume, deren Metrik von einer Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum induziert wird, erben auch eine glatte Struktur; wir erhalten somit insbesondere einen Differenzierbarkeitsbegriff für Kurven in normierten Räumen und können versuchen, geometrische Eigenschaften von Kurven durch analytische Größen auszudrücken. Um uns an den koordinatenfreien Standpunkt und allgemeine Abstraktionsmechanismen zu gewöhnen, werden wir diese Sachverhalte in größerer Allgemeinheit als der gewöhnlichen mehrdimensionalen Differentialrechnung formulieren.

Wir erinnern zunächst an analytische Grundlagen, gehen dann auf die analytische Beschreibung der Länge glatter Kurven ein und studieren dann die Krümmung von Kurven.

### 3.2.1 Analytische Grundlagen

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung an analytische Grundbegriffe, die wir im folgenden verwenden werden. Die zentralen grundlegenden Konzepte der Analysis sind Konvergenz und Vollständigkeit. Wir werden daher im folgenden immer annehmen, dass die betrachteten Räume vollständig sind.

- Normierte Räume, die bezüglich der von der Norm induzierten Metrik vollständig sind, heißen *Banachräume*.
- Euklidische Räume, die bezüglich der von der Skalarprodukt induzierten Norm vollständig (also Banachräume) sind, heißen *Hilberträume*.

Man kann den Differenzierbarkeitsbegriff ohne Schwierigkeiten so verallgemeinern, dass er auf Banachraumwertige Funktionen anwendbar ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist (man könnte aber stattdessen auch eine (offene) Teilmenge eines Banachraums verwenden). Wie im klassischen Fall ist die grundlegende Idee der Differenzierbarkeit, die gegebene Abbildung in einem Punkt möglichst gut 

**Definition 3.2.1** (differenzierbar). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum, sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $x \in I^\circ$  ein Punkt im Inneren von  $I$ . Eine Abbildung  $\gamma: I \rightarrow V$  ist *im Punkt  $x$  differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung  $D: \mathbb{R} \rightarrow V$ , eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}$  von 0 und eine Abbildung  $E: U \rightarrow V$  gibt mit

$$\forall h \in U \quad \gamma(x+h) = \gamma(x) + D(h) + E(h)$$

und (Vernachlässigbarkeit der Fehlerterms  $E$ )

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \cdot E(h) = 0.$$

**Bemerkung 3.2.2** (Ableitung). In der obigen Situation ist  $D$  im differenzierbaren Fall eindeutig bestimmt (nachrechnen!), man nennt dann  $D$  die *Ableitung von  $\gamma$  an der Stelle  $x$*  und schreibt  $D\gamma(x) := D \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V)$  bzw.  $\dot{\gamma}(x) := D(1) \in V$ . Wie im klassischen Fall kann man  $\dot{\gamma}(x)$  auch als Differentialquotient beschreiben, da der Definitionsbereich eindimensional ist.

Man beachte an dieser Stelle, dass äquivalente Normen auf demselben Banachraum denselben Differenzierbarkeitsbegriff und dieselben Ableitungen liefern (nachrechnen!). Insbesondere spielt also die genaue Wahl der Norm im endlich-dimensionalen Fall keine entscheidende Rolle (Satz 3.1.5). Im endlich-dimensionalen Fall stimmt diese Definition mit der gewöhnlichen Definition aus der mehrdimensionalen Analysis überein und Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung lassen sich für Kurven über die partiellen Ableitungen beschreiben.

Wie im klassischen Fall nennen wir eine Abbildung *differenzierbar*, wenn sie auf eine offene Umgebung des Definitionsbereichs fortgesetzt werden kann und dort in jedem Punkt differenzierbar ist. Wir nennen eine Abbildung  $\gamma: I \rightarrow V$  mit Werten in einem Banachraum  $(V, \|\cdot\|)$  *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar ist und die Abbildung  $\dot{\gamma}: I \rightarrow V$  stetig ist (man beachte, dass  $\dot{\gamma}$  auch auf Randpunkten von  $I$  wohldefiniert ist). Analog definiert man *zweimal differenzierbar* und *zweimal stetig differenzierbar*.

**Fingerübung 3.2.3.** Die erste und zweite Ableitung von parametrisierten Kurven haben dieselbe Interpretation wie im klassischen Fall:

Analysis	Physik	Geometrie
Ableitung		
zweite Ableitung		

### 3.2.2 Länge von Kurven

Im stetig differenzierbaren Fall können wir die Länge von Kurven in Banachräumen durch das Integral über die Geschwindigkeit beschreiben. Insbesondere nutzen wir dies, um die Länge euklidischer Kreise zu bestimmen.

**Satz 3.2.4** (Länge von Kurven, analytisch). *Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$ , sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow V$  stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$L(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

**Ausblick 3.2.5** (Metriken aus riemannschen Metriken). Dieser Satz erlaubt es, die Länge von glatten Kurven durch lokale Größen auszudrücken. In der riemannschen Geometrie geht man diesen Gedanken rückwärts: man nutzt lokale Daten um Längen zu definieren und konstruiert dann daraus eine Metrik (Kapitel 4).

Im wesentlichen beruht der Beweis von Satz 3.2.4 auf der folgenden Beobachtung, die einen Ersatz für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert, und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

**Lemma 3.2.6** (mittelwertsatzartige Abschätzung). *Seien  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $s < t$ , sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und sei  $\gamma: [s, t] \rightarrow V$  stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq \sup_{x \in [s, t]} \|\dot{\gamma}(x)\| \cdot (t - s).$$

*Beweis.* Dies kann man aus dem Mittelwertsatz oder aus einer Integralabschätzung folgern [58, Kapitel 4.2].  $\square$

*Beweisskizze (von Satz 3.2.4).* Das Ziel ist, die Behauptung aus einer Anwendung des **wer wohl?** zu erhalten. Wir betrachten daher die Funktion

$$\begin{aligned} f: [T_0, T_1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto L(\gamma|_{[T_0, t]}). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die rechte Seite endlich ist (dies kann man mithilfe von Lemma 3.2.6 sehen; nachrechnen!). Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung genügt es zu zeigen, dass  $f$  differenzierbar ist und  $f' = \|\dot{\gamma}\|$  auf  $(T_0, T_1)$  gilt.

Sei  $s \in (T_0, T_1)$  und sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wir zeigen, dass es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\forall t \in (s, s+\delta) \quad \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - \|\dot{\gamma}(s)\| \right| < \varepsilon.$$

Da  $\dot{\gamma}$  nach Voraussetzung stetig ist, gibt es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\forall t \in (s, s+\delta) \quad \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)\| < \varepsilon.$$

Sei  $I := [s, t]$ . Wir betrachten die affin lineare Kurve

$$\begin{aligned} \eta: I &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \gamma(s) + (x - s) \cdot \dot{\gamma}(s) \end{aligned}$$

und verwenden sie als Approximation an  $\gamma$ . Wir wissen bereits, dass  $\eta$  die Länge  $|t - s| \cdot \|\dot{\gamma}(s)\|$  besitzt (analog zu Proposition 2.3.3). Wegen  $\|\dot{\gamma}(x) - \dot{\eta}(x)\| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in I$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s) - |t - s| \cdot \|\dot{\gamma}(s)\|| &= |L(\gamma|_I) - L(\eta)| \\ &\leq L(\gamma|_I - \eta) && \text{(Dreiecksungleichung . . .)} \\ &\leq \varepsilon \cdot |t - s|. && \text{(wegen } \|\dot{\gamma}|_I - \dot{\eta}\| < \varepsilon; \text{ Lemma 3.2.6)} \end{aligned}$$

Umstellen liefert die behauptete Abschätzung.

Analog kann man „links von  $s$ “ argumentieren.

Also ist  $f$  in  $s$  differenzierbar und  $f'(s) = \|\dot{\gamma}(s)\|$ . □

**Beispiel 3.2.7** (Kreislänge). Sei  $I := [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$  und sei

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, \sqrt{1 - t^2}). \end{aligned}$$

Dann parametrisiert  $\gamma$  ein „Viertel“ der euklidischen Einheitskreislinie (Abbildung 3.1). Die Kurve  $\gamma$  ist auf  $I$  stetig differenzierbar und für alle  $t \in I^\circ$  gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \text{?}$$

Somit liefern Satz 3.2.4 und die üblichen Tricks (Substitution mit trigonometrischen Funktionen!) aus der Analysis für die Länge von  $\gamma$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ :

$$\begin{aligned} L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) &= \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt = \int_I \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} dt = \int_I \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= \text{?} && = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei gehen ganz entscheidend die analytischen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ein (Anhang A.6).

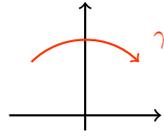


Abbildung 3.1.: Ein „Viertel“ der euklidischen Einheitskreislinie

Welche Länge erhalten wir bezüglich der Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$ ? Für alle  $t \in I^\circ$  ist

$$\left| -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq 1,$$

und damit  $\|\dot{\gamma}(t)\|_\infty = ?$ . Also folgt mit Satz 3.2.4, dass

$$L_{(\mathbb{R}^2, d_\infty)}(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_\infty dt = \int_I 1 dt = \sqrt{2}.$$

Die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

induzierte lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist bezüglich  $d_2$  und bezüglich  $d_\infty$  isometrisch. Also erhalten wir durch Anwenden von  $f, f^2, f^3$

- für die euklidische Länge des euklidischen Einheitskreises  $2 \cdot \pi$  und
- für die  $d_\infty$ -Länge des euklidischen Einheitskreises  $4 \cdot \sqrt{2}$ .

### 3.2.3 Parametrisierung nach Bogenlänge

Wir haben bisher Kurven als parametrisierte Kurven, also als Abbildungen, verstanden. In vielen Fällen interessiert man sich jedoch im wesentlichen nur für das Bild der Kurve – und hat dann die Freiheit, sich eine auf den jeweiligen Untersuchungszweck angepasste Parametrisierung zu wählen. Wir definieren Äquivalenz von Kurven, zeigen die Invarianz der Länge unter Äquivalenz von Kurven und gehen dann auf die Parametrisierung nach Bogenlänge ein.

**Definition 3.2.8** (Äquivalenz von Kurven). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum. Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle und seien  $\gamma: I \rightarrow V$  und  $\eta: J \rightarrow V$  stetig differenzierbare Kurven. Dann sind  $\gamma$  und  $\eta$  äquivalent, kurz  $\gamma \sim \eta$ , wenn es einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi: I \rightarrow J$  mit  $\gamma = \eta \circ \varphi$  gibt.

Ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist eine stetig differenzierbare Abbildung, die ein stetig differenzierbares Inverses besitzt.

**Fingerübung 3.2.9.** Überzeugen Sie sich davon, dass Äquivalenz von Kurven tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetig differenzierbaren Kurven definiert!

**Proposition 3.2.10** (Invarianz der Länge). *Äquivalente Kurven in Banachräumen haben dieselbe Länge.*

*Beweis.* Da äquivalente Kurven dieselbe Bildmenge besitzen und die Anordnung der Bildpunkte (bis auf die Durchlaufrichtung des Intervalls) erhalten bleibt, folgt dies direkt aus der Definition der Länge (Definition 2.3.1).

Alternativ kann man dies im stetig differenzierbaren Fall auch über Satz 3.2.4 mit dem Transformationssatz zeigen (nachrechnen!).  $\square$

In vielen Fällen ist es günstig, die Parametrisierung an die Länge anzupassen:

**Definition 3.2.11** (nach Bogenlänge parametrisiert). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Man nennt eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: I \rightarrow V$  nach *Bogenlänge* parametrisiert, wenn folgendes gilt: Für alle  $t \in I^\circ$  ist

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1.$$

**Fingerübung 3.2.12** (Bogenlänge). Welche der folgenden Kurven  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (mit dem Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ ) sind nach Bogenlänge parametrisiert?

1.  $t \mapsto (1, 0)$        Ja  Nein
2.  $t \mapsto (t, 0)$        Ja  Nein
3.  $t \mapsto (t, t)$        Ja  Nein
4.  $t \mapsto (t, t^2)$      Ja  Nein

**Beispiel 3.2.13** (Länge vs. Bogenlänge). Ist  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow V$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einem Banachraum  $(V, \|\cdot\|)$  so folgt mit der analytischen Beschreibung der Länge (Satz 3.2.4) für alle  $t \in [T_0, T_1]$ , dass

$$L(\gamma|_{[T_0, t]}) = ?$$

Dies rechtfertigt den Namen „nach Bogenlänge parametrisiert.“ Außerdem sieht man mithilfe von Satz 3.2.4, dass jede stetig differenzierbare (metrische) Geodäte nach Bogenlänge parametrisiert ist (nachrechnen!).

**Satz 3.2.14** (Existenz und Eindeutigkeit der Parametrisierung nach Bogenlänge). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum, sei  $I \subset \mathbb{R}$  und sei  $\gamma: I \rightarrow V$  eine stetig differenzierbare Kurve, die regulär ist, d.h., die  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  erfüllt.

1. Dann gibt es eine zu  $\gamma$  äquivalente Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist.

2. Sind  $\gamma_1: I_1 \rightarrow V$  und  $\gamma_2: I_2 \rightarrow V$  zu  $\gamma$  äquivalente nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, so gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  und ein  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  mit  $I_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid \varepsilon \cdot t + c \in I_1\}$  und

$$\forall t \in I_2 \quad \gamma_2(t) = \gamma_1(\varepsilon \cdot t + c).$$

*Beweisskizze.* Man kann wie im klassischen, endlich-dimensionalen Fall vorgehen. Wir gehen hier nur auf die Existenzaussage ein: Wie im Beweis der analytischen Beschreibung der Länge (Satz 3.2.4) betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi: I = [T_0, T_1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto L(\gamma|_{[T_0, T_1]}). \end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi$  differenzierbar und  $\varphi' = \|\dot{\gamma}\|$  (Beweis von Satz 3.2.4); da  $\gamma$  stetig differenzierbar ist, ist somit auch  $\varphi$  stetig differenzierbar; da  $\gamma$  regulär ist, hat  $\varphi'$  keine Nullstellen. Somit ist  $\varphi: [T_0, T_1] \rightarrow [0, L]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus (wobei  $L := L(\gamma)$ ) und  $\gamma$  ist äquivalent zu

$$\eta := \gamma \circ \varphi^{-1}: [0, L] \rightarrow V.$$

Warum ist  $\eta$  nach Bogenlänge parametrisiert? Sei  $t \in (0, L)$ . Nach Konstruktion ist dann

$$\begin{aligned} \|\dot{\eta}(t)\| &= \|(\gamma \circ \varphi^{-1})'(t)\| = \|(\varphi^{-1})'(t) \cdot \dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\| && \text{(Warum?)} \\ &= \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|} \cdot \|\dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\| && \text{(Warum?)} \\ &= \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|} \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t)) && \text{(nach Konstruktion von } \varphi) \\ &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t)) && \text{(da } \varphi' = \|\dot{\gamma}\| \text{ punktweise positiv ist)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Also ist  $\eta$  nach Bogenlänge parametrisiert □

**Caveat 3.2.15.** Man beachte jedoch, dass nicht jede stetig differenzierbare Kurve regulär ist! Da Regularität unter Äquivalenz erhalten bleibt und nach Bogenlänge parametrisierte Kurven notwendigerweise regulär sind, kann auf die Regularitätsbedingung im obigen Satz *nicht* verzichtet werden.

### 3.2.4 Krümmung von Kurven

Wir untersuchen nun die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung von Kurven. Anschaulich gesprochen ist im nach Bogenlänge parametrisierten

Fall die zweite Ableitung die Änderung der Richtung der Kurve und misst somit wie stark und in welche Richtung sich die Kurve krümmt.

Wir beginnen mit der analytischen Definition der Krümmung von Kurven, charakterisieren dann Geodäten als ungekrümmte Kurven und erklären, wie man in der Ebene die Krümmung mit einem Vorzeichen verfeinern kann. Der Einfachheit halber betrachten wir jeweils nur den Fall, dass die Kurven bereits nach Bogenlänge parametrisiert sind.

**Definition 3.2.16** (Krümmung). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und sei  $\gamma: I \rightarrow V$  eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Ist  $t \in I^\circ$ , so nennt man

$$\kappa_\gamma(t) := \ddot{\gamma}(t) \in V$$

die *Krümmung von  $\gamma$  an der Stelle  $t$* .

Oft wird auch  $\|\kappa_\gamma(t)\|$  als Krümmung bezeichnet. Wir werden im folgenden aber immer die gerichtete Version verwenden.

Eine wichtige Eigenschaft der Krümmung ist, dass sie einen analytischen Zugang zu Geodäten in Hilberträumen ermöglicht. Geodäten sind nämlich die Kurven, die im analytischen Sinne ungekrümmt, d.h. „gerade,“ sind:

**Proposition 3.2.17** (analytische Charakterisierung von Geodäten). Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und sei  $\gamma: [0, L] \rightarrow V$  eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Dann sind äquivalent:

1. Die Kurve  $\gamma$  ist eine metrische Geodäte.
2. Es ist  $\kappa_\gamma = 0$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $\|\cdot\|$  für die von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm auf  $V$  und setzen  $x := \gamma(0)$ ,  $y := \gamma(L)$ .

Zu 1.  $\implies$  2. Sei  $\gamma$  eine metrische Geodäte; insbesondere ist  $L = \|y - x\|$ . Ähnlich wie im Fall von Proposition 2.2.6 kann man zeigen, dass Geodäten in Hilberträumen linear sind (das Analogon von Lemma 2.2.7 kann man zum Beispiel mit dem verallgemeinerten Satz von Pythagoras aus Bemerkung 3.1.13 zeigen). Also ist

$$\forall_{t \in [0, L]} \quad \gamma(t) = x + \frac{t}{L} \cdot (y - x).$$

Dann ist  $\dot{\gamma} = 1/L \cdot (y - x)$  konstant. Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, erhalten wir  $\kappa_\gamma = \ddot{\gamma} = 0$ .

Zu 2.  $\implies$  1. Es gelte umgekehrt  $\kappa_\gamma = 0$ . Mit der Abschätzung aus Lemma 3.2.6 folgt daraus, dass  $\dot{\gamma}$  konstant ist; sei  $v \in V$  diese Konstante. Wendet man Lemma 3.2.6 erneut an (z.B. auf die Differenz zwischen  $\gamma$  und  $t \mapsto x + t \cdot v$ ), so sieht man, dass

$$\forall_{t \in [0, L]} \quad \gamma(t) = \text{?}$$

Da wir  $\gamma$  als nach Bogenlänge parametrisiert angenommen haben, ist  $\|v\| = 1$ . Also folgt aus der obigen Darstellung, dass  $\gamma$  eine Geodäte ist.  $\square$

**Ausblick 3.2.18** (riemannsche Geodäten). Diese Beschreibung von metrischen Geodäten aus Proposition 3.2.17 kann man mithilfe geeigneter Ableitungsbegriffe (der sogenannten kovarianten Ableitung) auch auf riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern; auf diese Weise erhält man den Begriff der *riemannschen Geodäte*.

Da es sich dabei nur um eine lokale Beschreibung handelt, sind riemannsche Geodäten jedoch im allgemeinen nicht global längenminimierend sein, sondern nur noch lokal längenminimierend. Umgekehrt ist aber jede metrische Geodäte in einer riemannschen Mannigfaltigkeit bereits stetig differenzierbar und eine riemannsche Geodäte.

Der Grund warum man in der riemannschen Geometrie trotzdem im Normalfall mit riemannschen statt metrischen Geodäten arbeitet, ist dass sie besser mit analytischen Methoden behandelt werden können.

**Proposition 3.2.19** (Richtung  $\perp$  Krümmung). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und sei  $\gamma: I \rightarrow V$  eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal differenzierbare Kurve. Dann gilt für alle  $t \in I^\circ$ , dass

$$\dot{\gamma}(t) \perp \ddot{\gamma}(t).$$

*Beweis.* Die Idee ist, dass für die Behauptung relevante Skalarprodukt  $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$  als Ableitung einer konstanten Abbildung zu entlarven. Eine direkte Rechnung mit allgemeinen Skalarprodukten zeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} S: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

differenzierbar ist mit

$$\forall t \in I^\circ \quad \dot{S}(t) = ?$$

(nachrechnen). Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist  $S = \|\dot{\gamma}\|^2 = 1$  konstant. Also folgt für alle  $t \in I^\circ$ , dass

$$0 = \dot{S}(t) = 2 \cdot \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle. \quad \square$$

**Beispiel 3.2.20** (Krümmung euklidischer Kreise). Wir wissen bereits, dass Geodäten in Hilberträumen Krümmung 0 haben. Zu  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir nun in  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi \cdot r] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto r \cdot \left( \cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r} \right). \end{aligned}$$

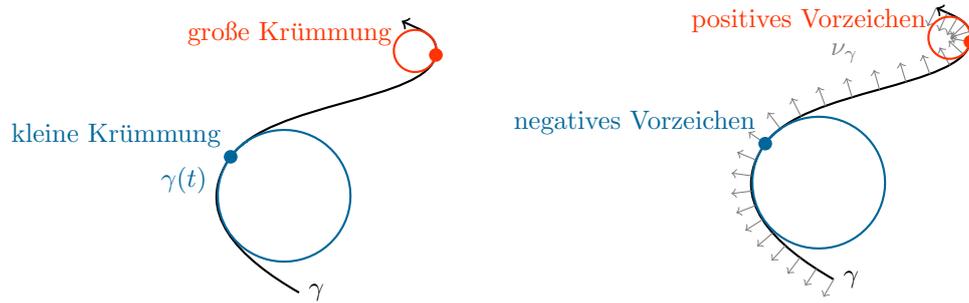


Abbildung 3.2.: (Signierte) Krümmung von Kurven, schematisch

Wie aus der Analysis bekannt ist (Anhang A.6), liefert diese Kurve eine Parametrisierung der Kreislinie vom Radius  $r$  um  $0$  und für alle  $t \in [0, 2\pi \cdot r]$  gilt

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = ?$$

Also ist  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert. Als Krümmung erhalten wir für alle  $t \in (0, 2\pi \cdot r)$ :

$$\kappa_\gamma(t) = \ddot{\gamma}(t) = ?$$

Je kleiner der Radius  $r$  ist, desto länger ist also der Krümmungsvektor. Dies entspricht der Anschauung, dass kleine Kreise stärker gekrümmt sind als große.

Wir spezialisieren uns jetzt auf den Fall von Kurven in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Norm/dem Standardskalarprodukt. In diesem Fall kann man die Krümmung in eine skalare Größe (mit Vorzeichen) umwandeln: Da der Krümmungsvektor orthogonal zur Richtung der Kurve ist, können wir den Krümmungsvektor mit dem Einheitsnormalenvektor vergleichen (Abbildung 3.2).

**Definition 3.2.21** (Einheitsnormalenvektor, signierte Krümmung). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine zweimal differenzierbare nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ . Sei  $t \in I^\circ$ .

- Dann nennen wir

$$\nu_\gamma(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$$

den *Einheitsnormalenvektor von  $\gamma$  an der Stelle  $t$* . (Nach Konstruktion gilt tatsächlich  $\nu_\gamma(t) \perp \dot{\gamma}(t)$  und  $\|\nu_\gamma(t)\|_2 = 1$ ; nachrechnen)

- Wir nennen

$$\tilde{\kappa}_\gamma(t) := \langle \kappa_\gamma(t), \nu_\gamma(t) \rangle \in \mathbb{R}$$

die *signierte Krümmung von  $\gamma$  an der Stelle  $t$* . (Nach Konstruktion gilt somit  $\kappa_\gamma(t) = \tilde{\kappa}_\gamma(t) \cdot \nu_\gamma(t)$ .)

**Fingerrübung 3.2.22.** Welche geometrische Bedeutung hat die Matrix in der Definition des Einheitsnormalenvektors (Definition 3.2.21)?

**Hinweis**

**Beispiel 3.2.23** (signierte Krümmung der Kreislinie). Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $\gamma: [0, 2\pi \cdot r] \rightarrow \mathbb{R}^2$  die nach Bogenlänge parametrisierte Kreislinie in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  wie in Beispiel 3.2.20. Dann gilt für alle  $t \in (0, 2\pi \cdot r)$ , dass

$$\tilde{\kappa}_\gamma(t) = ?$$

(nachrechnen!). Die Kurve  $\gamma$  hat also konstante, positive, Krümmung. Ändert man die Umlaufrichtung, so erhält man konstante, negative, Krümmung.

**Ausblick 3.2.24** (Torsion von Raumkurven). Die (signierte) Krümmung ebener Kurven misst, wie stark sich die Kurve von der durch den Richtungsvektor gegebenen Geraden wegkrümmt. Analog kann man für Kurven in  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  messen, wie stark sich die Kurve von der von Richtungsvektor und Krümmungsvektor aufgespannten Ebene entfernt. Dies liefert die sogenannte *Torsion* von Raumkurven. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigt dann, dass Raumkurven durch Krümmung und Torsion (bis auf Umparаметrisierungen und euklidische Isometrien) eindeutig bestimmt sind [6].

## 3.3 Winkel

Wir führen nun Winkel zwischen Vektoren bzw. zwischen differenzierbaren Kurven ein. Wir beweisen dann die Invarianz der Winkelsumme euklidischer geodätischer Dreiecke mithilfe von Werkzeugen aus der Linearen Algebra und der Analysis. Außerdem erklären wir, wie Winkel bei der Berechnung von Flächeninhalten ebener euklidischer Polygone auftreten.

### 3.3.1 Winkel

Mithilfe von analytischen Methoden erhält man aus Skalarprodukten nicht nur den bereits diskutierten Begriff der Orthogonalität, sondern auch eine

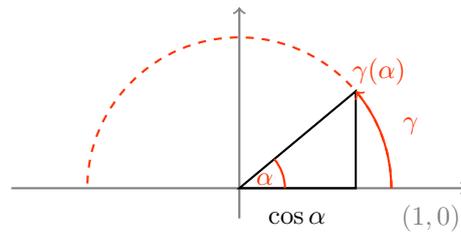


Abbildung 3.3.: Winkel, Bogenlänge und Ankathete

Definition von Winkeln. Wir zeigen, dass dieser Winkelbegriff in der euklidischen Ebene mit dem klassischen, anschaulichen, Winkelbegriff übereinstimmt. Desweiteren erweitern wir den Winkelbegriff von Vektoren auf differenzierbare Kurven.

**Definition 3.3.1 (Winkel).** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm  $\|\cdot\|$  und seien  $x, y \in V$  mit  $\|x\| \neq 0$  und  $\|y\| \neq 0$ . Dann ist der *Winkel zwischen  $x$  und  $y$*  definiert als

$$\sphericalangle(x, y) := \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi].$$

Dabei bezeichnet  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  die Umkehrfunktion von  $\cos|_{[0, \pi]}$  (Anhang A.6). Man beachte, dass das Argument von  $\arccos$  in der obigen Definition **aufgrund** tatsächlich im Intervall  $[-1, 1]$  liegt.

**Fingerübung 3.3.2 (Winkel).** Bestimmen Sie anhand von Definition 3.3.1 jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  bezüglich des Standardskalarproduktes! Skizzieren Sie außerdem die Vektoren.

1.  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$

**Ergebnis**

2.  $(2021, 2021)$  und  $(-1, 1)$

**Ergebnis**

3.  $(1, 0)$  und  $(1, 1)$

**Ergebnis**

4.  $(1, 0)$  und  $(-1, 1)$

**Ergebnis**

**Bemerkung 3.3.3** (klassische Anschauung). Wir erklären den Zusammenhang zwischen der Definition von Winkeln in Definition 3.3.1 und der klassischen Anschauung von Winkeln über Bogenlängen: Dazu betrachten wir in der euklidischen Ebene  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (bezüglich des Standardskalarprodukts) die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Dann gilt nach der analytischen Beschreibung der Länge (Satz 3.2.4) für alle  $\alpha \in [0, \pi]$  einerseits (Beispiel 3.2.7)

$$L(\gamma|_{[0, \alpha]}) = \int_0^\alpha \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt = \int_0^\alpha 1 dt = \alpha$$

und andererseits nach der obigen Definition des Winkels (wegen  $\alpha \in [0, \pi]$ )

$$\sphericalangle((1, 0), \gamma(\alpha)) = \arccos\left(\frac{\cos \alpha + 0}{1 \cdot 1}\right) = \alpha.$$

Der Winkel entspricht also genau der Länge des zugehörigen Bogens und umgekehrt.

Außerdem erhalten wir so die Beschreibung von  $\cos \alpha$  als „Ankathete geteilt durch Hypotenuse“ (Abbildung 3.3). Analog bekommt man die entsprechende Beschreibung für  $\sin \alpha$ .

**Literaturaufgabe.** Schlagen Sie in einem Mittelstufenschulbuch nach, wie dort Winkel und (Ko)Sinus eingeführt werden. Vergleichen Sie dies mit Definition 3.3.1 und Bemerkung 3.3.3. Welche Definitionen sind anschaulicher? Welche eignen sich besser für Berechnungen oder formale Beweise?

Über die Ableitung können wir den Winkelbegriff auch auf Kurven, die in einem gemeinsamen Punkt beginnen, verallgemeinern:

**Definition 3.3.4** (Winkel zwischen Kurven). Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und seien  $\gamma_1: [0, L_1] \rightarrow V$  und  $\gamma_2: [0, L_2] \rightarrow V$  differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\dot{\gamma}_1(0) \neq 0 \neq \dot{\gamma}_2(0)$ . Dann definieren wir

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)).$$

Insbesondere im Kontext von riemannschen Mannigfaltigkeiten ist diese Definition des Winkels hilfreich.

**Ausblick 3.3.5** (Winkel in metrischen Räumen). Durch Vergleich mit euklidischen Dreiecken können wir den Winkelbegriff wie folgt auf andere metrische Räume verallgemeinern: Wir stellen dazu zunächst fest, dass sich in einem euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit induzierter Metrik  $d$  den Winkel  $\sphericalangle(x, y)$  zwischen Vektoren  $x, y \in V \setminus \{0\}$  aufgrund von Polarisierung durch die Metrik ausdrücken lässt:

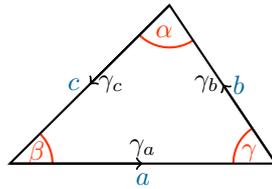


Abbildung 3.4.: Winkelsumme in euklidischen Dreiecken (Satz 3.3.6)

$$\sphericalangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \arccos \frac{d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2}{2 \cdot d(x, 0) \cdot d(y, 0)}.$$

Sind  $\gamma_1: [0, L_1] \rightarrow V$ ,  $\gamma_2: [0, L_2] \rightarrow V$  Geodäten mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\dot{\gamma}_1(0) \neq 0 \neq \dot{\gamma}_2(0)$ , so stellt man fest, dass

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \arccos \frac{t_1^2 + t_2^2 - d(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2))^2}{2 \cdot t_1 \cdot t_2}$$

gilt (nachrechnen!). Diese Gleichung eignet sich in allgemeinen metrischen Räumen als *Definition* für den Winkel zwischen zwei Geodäten (vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert tatsächlich existiert). Dieser Winkelbegriff wird dann auch unter Isometrien invariant sein. Im Kontext der hyperbolischen und der sphärischen Geometrie werden wir nochmal genauer auf diesen Aspekt eingehen (Kapitel 4.4.5).

### 3.3.2 Winkelsumme in euklidischen Dreiecken

Eine der zentralen Eigenschaften euklidischer geodätischer Dreiecke ist die Invarianz der Winkelsumme. Wir geben einen Beweis mithilfe von Werkzeugen aus der Linearen Algebra und der Analysis.

**Satz 3.3.6** (Winkelsumme in euklidischen Dreiecken). *Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und sei  $(\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c)$  ein geodätisches Dreieck in  $V$  (bezüglich der von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierten Metrik) dessen Ecken  $\gamma_a(0), \gamma_b(0), \gamma_c(0)$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Seien*

$$\alpha := \sphericalangle(\gamma_c, \bar{\gamma}_b), \quad \beta := \sphericalangle(\gamma_a, \bar{\gamma}_c), \quad \gamma := \sphericalangle(\gamma_b, \bar{\gamma}_a)$$

die zugehörigen Winkel (wobei  $\bar{\gamma}_j$  die Geodäte ist, die man erhält, indem man die Geodäte  $\gamma_j$  rückwärts durchläuft). Dann gilt (Abbildung 3.4)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Wir haben nur die analytischen Beschreibungen von Winkeln zur Verfügung; daher beweisen wir die Invarianz der Winkelsumme mithilfe der Eigenschaften von  $\cos$  und  $\sin$ .

**Fingerübung 3.3.7.** Seien  $\sigma, \tau \in (0, 2\pi)$ . Welche der folgenden Behauptungen sind in dieser Situation immer wahr?

1. Ist  $\cos \sigma = \cos \tau$ , so folgt  $\sigma = \tau$ .

Ja  Nein

2. Ist  $\cos \sigma = \cos \tau$  und  $\sin \sigma = \sin \tau$ , so folgt  $\sigma = \tau$ .

Ja  Nein

*Beweis von Satz 3.3.6.* Wir zeigen  $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ . Wegen  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  genügt es zu zeigen, dass die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind (nachrechnen!):

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma).$$

Wir schreiben  $a := \gamma_b(0) - \gamma_a(0)$ ,  $b := \gamma_c(0) - \gamma_b(0)$ ,  $c := \gamma_a(0) - \gamma_c(0)$ . Insbesondere ist  $a + b + c = 0$ . Mit der Charakterisierung euklidischer Geodäten (Proposition 2.2.6 bzw. der Hilbertraumversion davon) folgt

$$\alpha = \sphericalangle(c, -b), \quad \beta = \sphericalangle(a, -c), \quad \gamma = \sphericalangle(b, -a).$$

Wir weisen mithilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus nach, dass die obigen beiden Gleichungen für  $\cos(\alpha + \beta)$  bzw.  $\sin(\alpha + \beta)$  erfüllt sind: Es gilt nach Definition (und unter Verwendung von  $c = -a - b$ )

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle c, -b \rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} = \frac{\langle -a - b, -b \rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} = \frac{\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle}{\|c\| \cdot \|b\|} \\ \cos \beta &= \frac{\langle a, -c \rangle}{\|a\| \cdot \|c\|} = \frac{\langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|c\|} \end{aligned}$$

und (wegen  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ )

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{\langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2}}{\|c\| \cdot \|b\|} \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{\langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2}}{\|a\| \cdot \|c\|} \end{aligned}$$

Also erhalten wir mit den Additionstheoremen für  $\sin$  bzw.  $\cos$ , dass

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\
&= \frac{(\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle) \cdot (\langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle)}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} - \frac{\sqrt{(\langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2)^2}}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} && \text{(siehe oben)} \\
&= \frac{\langle a, b \rangle \cdot \langle a, a \rangle + 2 \cdot \langle a, b \rangle^2 + \langle b, b \rangle \cdot \langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} && \text{(Auflösung der Wurzel)} \\
&= \frac{\langle c, c \rangle \cdot \langle b, a \rangle}{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|^2} && \text{(da } a + b = -c) \\
&= -\cos \gamma \\
&= \cos(\pi - \gamma);
\end{aligned}$$

man beachte bei der Auflösung der Wurzel, dass der Term  $\langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2$  nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung tatsächlich nicht negativ ist. Eine analoge Rechnung zeigt

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\pi - \gamma),$$

wie gewünscht. □

**Literaturaufgabe.** Wie wird die Winkelsumme in euklidischen Dreiecken in der Schulmathematik bestimmt? Welche Eigenschaften verwendet man in diesem Argument? Wie könnten Sie diese Eigenschaften beweisen?

**Bemerkung 3.3.8 (Sinussatz).** Die Berechnungen im Beweis von Satz 3.3.6 zeigen auch den sogenannten *Sinussatz*: In der Situation des Satzes gilt (nachrechnen!)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\|a\|}{\|b\|} = \frac{\|\gamma_b(0) - \gamma_a(0)\|}{\|\gamma_c(0) - \gamma_b(0)\|}.$$

### 3.3.3 Flächeninhalte

Winkel treten auf natürliche Weise auch bei der Berechnung von Flächeninhalten von euklidischen Dreiecken auf:

**Bemerkung 3.3.9 (Fläche über Winkel).** Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$  drei verschiedene Punkte und sei

$$\Delta(x, y, z) := \{t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0, 1], t_x + t_y + t_z = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Menge der Punkte, die innerhalb des von  $x, y, z$  aufgespannten geodätischen Dreiecks liegen. Dann ist  $\mu(\Delta(x, y, z))$  der Flächeninhalt dieses Dreiecks, wobei  $\mu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet. Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$\mu(\Delta(x, y, z)) = \frac{1}{2} \cdot \|y - x\| \cdot \|z - x\| \cdot \sin \sphericalangle(y - x, z - x)$$



Abbildung 3.5.: Ein Polygon mit ganzzahligen Ecken und die eingeschlossenen Gitterpunkte (rot) sowie die Gitterpunkte auf dem Rand (blau)

gilt. Eine Rechnung (die auch im Beweis des Transformationssatzes eingeht) zeigt, dass dies auch wie folgt ausgedrückt werden kann (nachrechnen!):

$$\mu(\Delta(x, y, z)) = \frac{1}{2} \cdot |\det(y - x, z - x)|.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch eine schöne Berechnung von Flächeninhalten von Polygonen mit ganzzahligen Eckpunkten, den Satz von Pick. Als Vorbereitung definieren wir den Flächeninhalt von ebenen Polygonen.

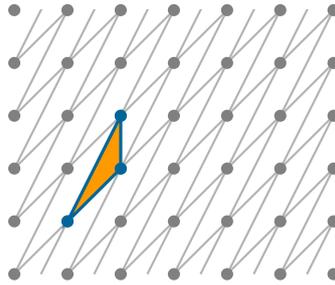
**Definition 3.3.10 (Polygon).** Ein *Polygon* in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist eine stückweise (wir erlauben nur endlich viele Abschnitte) isometrische Abbildung  $P: [0, L] \rightarrow X$ , wobei  $L \in \mathbb{R}_{>0}$  ist, mit der Eigenschaft, dass  $P(L) = P(0)$  ist und dass  $P|_{[0, L]}$  injektiv ist.

- Ist  $t \in [0, L]$  ein Randpunkt eines maximalen Intervalls, auf dem  $P$  isometrisch ist, so nennen wir  $P(t)$  eine *Ecke von  $P$* ;
- ist  $I \subset [0, L]$  ein maximales Intervall, auf dem  $P$  isometrisch ist, so nennen wir  $P|_I$  eine *Kante von  $P$* .

**Definition 3.3.11 (Flächeninhalt eines Polygons).** Sei  $P: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Polygon in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Wir schreiben dann im  $P := P([0, L]) \subset \mathbb{R}^2$ . Nach dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 1.7.15) hat  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten – eine beschränkte und eine unbeschränkte; wir nennen die beschränkte Komponente das *Innere von  $P$*  und schreiben dafür  $P^\circ$ . Der *Flächeninhalt von  $P$*  ist dann durch

$$\mu(P) := \mu(P^\circ)$$

definiert.

Abbildung 3.6.: Kleine Dreiecke liefern  $\mathbb{Z}$ -Basen von  $\mathbb{Z}^2$ 

**Satz 3.3.12** (Satz von Pick). *Sei  $P$  ein Polygon in  $\mathbb{R}^2$ , dessen Ecken alle in  $\mathbb{Z}^2$  liegen. Dann gilt*

$$\mu(P) = n^\circ + \frac{1}{2} \cdot n - 1,$$

wobei  $n^\circ := |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$  die Anzahl der von  $P$  eingeschlossenen Gitterpunkte und  $n := |\text{im } P \cap \mathbb{Z}^2|$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von  $P$ .

**Fingerübung 3.3.13.** Probieren Sie den Satz von Pick (Satz 3.3.12) an dem Beispiel in Abbildung 3.5 aus!

Die Grundidee des Beweises des Satzes von Pick ist,

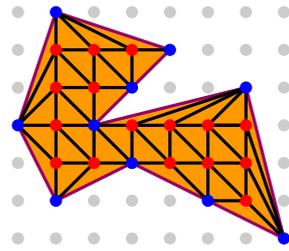
- die Polygonfläche zu triangulieren, d.h. in kleine Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunkten aufzuteilen (Lemma 3.3.15),
- den Flächeninhalt dieser kleinen Dreiecke zu berechnen (Lemma 3.3.14)
- und dann geschickt die Anzahl dieser Dreiecke zu bestimmen.

**Lemma 3.3.14** (Flächeninhalt kleiner Dreiecke). *Seien  $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gelte  $\Delta(x, y, z) \cap \mathbb{Z}^2 = \{x, y, z\}$  (d.h. das von  $x, y, z$  aufgespannte Dreieck enthält keine weiteren Gitterpunkte). Dann ist*

$$\mu(\Delta(x, y, z)) = \frac{1}{2}.$$

*Beweis.* Man kann sich überlegen, dass  $(y - x, z - x)$  in diesem Fall eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbb{Z}^2$  sein muss (Abbildung 3.6), und verwendet dann die Determinantendarstellung von  $\mu(\Delta(x, y, z))$  (Bemerkung 3.3.9). (Übungsaufgabe)  $\square$

**Lemma 3.3.15** (ganzzahlige Triangulierbarkeit). *Sei  $P$  ein Polygon in  $\mathbb{R}^2$ , dessen Ecken alle in  $\mathbb{Z}^2$  liegen. Dann kann man  $P^\circ \cup \text{im } P$  so triangulieren, dass die Eckpunkte der Dreiecke alle in  $\mathbb{Z}^2$  liegen und dass alle Punkte aus  $(P^\circ \cup \text{im } P) \cap \mathbb{Z}^2$  als Eckpunkte von Dreiecken auftreten.*



Triangulierung an/aus

Abbildung 3.7.: Ein Triangulierung eines Polygons mit ganzzahligen Ecken wie in Lemma 3.3.15

*Beweis.* Jedes Polygon in  $\mathbb{R}^2$  hat mindestens drei Ecken.

Man zeigt die Behauptung zunächst für den Fall, dass  $P$  genau drei Ecken hat, per Induktion über die Anzahl der Gitterpunkte in  $P^\circ \cup \text{im } P$ . Sind dies nur die drei Ecken von  $P$ , so bildet  $P$  selbst die gewünschte Triangulierung. Gibt es einen weiteren Gitterpunkt, so verbindet man diesen mit den drei Ecken von  $P$  und erhält dadurch Gitterdreiecke mit weniger Gitterpunkten. Induktiv erhält man so die gewünschte Triangulierung.

Hat  $P$  mehr als drei Ecken, so gibt es zwei Ecken von  $P$ , deren Verbindungsstrecke  $L$  ganz in  $P^\circ$  liegt, denn: Wir betrachten drei aufeinanderfolgende Ecken  $x, y, z$  von  $P$ . Nun betrachten wir alle geraden Strahlen, die von  $y$  ausgehen. Falls es keinen solchen Strahl gibt, der eine weitere Ecke von  $P$  trifft und dazwischen  $P^\circ$  nicht verlässt, so ist die gerade Verbindung von  $x$  nach  $z$  ganz in  $P^\circ$  enthalten.

Man zerlegt dann  $P$  mithilfe einer solchen Diagonalen  $L$ , die in  $P^\circ$  liegt, in zwei Gitterpolygone mit weniger Ecken. Induktiv kann man sich so auf den Fall von Gitterpolygone mit drei Ecken herunterhängeln, wofür die Behauptung bereits gezeigt ist.  $\square$

*Beweis des Satzes von Pick (Satz 3.3.12).* Wir triangulieren das Polygon  $P$  wie in Lemma 3.3.15 in  $D \in \mathbb{N}$  kleine ganzzahlige Dreiecke (Abbildung 3.7). Nach Konstruktion erfüllen diese Dreiecke die Bedingung aus Lemma 3.3.14. Also erhalten wir

$$\mu(P) = D \cdot \frac{1}{2}.$$

Es genügt somit, die Anzahl  $D$  der Dreiecke zu bestimmen.

Die Triangulierung liefert einen Graphen  $X = (V, E)$ , dessen Knotenmenge die Menge  $(\text{im } P \cup P^\circ) \cap \mathbb{Z}^2$  ist und dessen Kanten genau den Kanten der Triangulierungsdreiecke entsprechen.

Es gibt den folgenden Zusammenhang zwischen  $D$  und  $|E|$ : Sei  $e$  die Anzahl der Kanten der Triangulierung, die in  $\text{im } P$  liegen, und sei  $e^\circ$  die Anzahl der restlichen Kanten der Triangulierung. Die  $e$  Randkanten treten nur in genau

einem Dreieck auf, die  $e^\circ$  inneren Kanten treten in genau zwei der  $D$  Dreiecke auf. Da jedes Dreieck genau drei Kanten besitzt, folgt

$$3 \cdot D = ?$$

und damit

$$e^\circ = \frac{3}{2} \cdot D - \frac{1}{2} \cdot e.$$

Andererseits liefert die konstruierte Triangulierung eine planare Einbettung von  $X$ . Die Anzahl der Facetten dieser planaren Einbettung ist genau  $D+1$  (die zusätzliche Facette ist ?). Mit der eulerschen Polyederformel (Satz 1.7.14) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} D &= 2 - |V| + |E| - 1 && \text{(eulersche Polyederformel; Satz 1.7.14)} \\ &= 1 - |V| + |E| = 1 - (n^\circ + n) + |E| \\ &= 1 - (n^\circ + n) + e^\circ + e \\ &= 1 - (n^\circ + n) + \frac{3}{2} \cdot D - \frac{1}{2} \cdot e + e. && \text{(obige Berechnung)} \end{aligned}$$

Da  $P$  genau so viele Ecken wie Kanten hat, ist  $e = n$ . Indem wir die obige Gleichung nach  $D$  auflösen, folgt

$$D = ?$$

bzw.  $\mu(P) = D/2 = n^\circ + n/2 - 1$ , wie gewünscht.  $\square$

## 3.4 Symmetrie

Wir werden nun die Isometriegruppe euklidischer Räume genauer studieren. Wir beginnen mit allgemeinen Betrachtungen zu Isometrien in Hilberträumen und werden uns dann auf den Fall des euklidischen  $\mathbb{R}^n$  spezialisieren. Insbesondere werden wir die klassischen Kongruenzsätze für Dreiecke beweisen und auf reguläre Polygone und reguläre Polyeder eingehen.

### 3.4.1 Winkeltreue

Wir stellen fest, dass Isometrien von euklidischen Vektorräumen winkeltreu sind. Umgekehrt verwenden wir das Skalarprodukt um Spiegelungen zu beschreiben.

**Proposition 3.4.1** (Starrheit des Skalarprodukts). *Seien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  euklidische Vektorräume und sei  $f: V \rightarrow V'$  eine Isometrie bezüglich der*

von den Skalarprodukten induzierten Metriken  $d$  bzw.  $d'$  mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt

$$\forall_{x,y \in V} \quad \langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle.$$

Jede Isometrie zwischen euklidischen Vektorräumen, die 0 auf 0 abbildet, ist also winkeltreu.

*Beweis.* Da  $f$  mit den Metriken verträglich ist, ist  $f$  nach Definition der Metriken auch normerhaltend. Mit der Polarisierungsgleichung folgt dann die Behauptung. Genauer: Wegen Polarisierung gilt wie in Abschnitt 3.3.5 für alle  $x, y \in V$

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle' &= \frac{1}{2} \cdot (\|f(x)\|'^2 + \|f(y)\|'^2 - \|f(x) - f(y)\|'^2) && \text{(Polarisierung; Proposition 3.1.7)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (d'(0, f(x))^2 + d'(0, f(y))^2 - d'(f(x), f(y))^2) && \text{(Definition von } d') \\ &= \frac{1}{2} \cdot (d(0, x)^2 + d(0, y)^2 - d(x, y)^2) && \text{(} f \text{ ist eine Isometrie und } f(0) = 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) && \text{(Definition von } d) \\ &= \langle x, y \rangle, && \text{(Polarisierung; Proposition 3.1.7)} \end{aligned}$$

wie behauptet. □

**Bemerkung 3.4.2** (Kosinussatz). Dieselbe Polarisierungsrechnung wie im obigen Satz zeigt auch den sogenannten *Kosinussatz*: In der Notation (des Beweises) des Satzes 3.3.6 über die Winkelsumme gilt in geodätischen Dreiecken in Hilberträumen die Gleichung (nachrechnen!)

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \cos \gamma \cdot \|a\| \cdot \|b\|.$$

Umgekehrt können wir das Skalarprodukt nutzen, um eine spezielle Klasse von Isometrien einfach zu beschreiben, die sogenannten Spiegelungen:

**Definition 3.4.3** (Spiegelung). Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und sei  $v \in V \setminus \{0\}$ . Dann definieren wir die *Spiegelung an der durch  $v$  gegebenen Hyperebene  $v^\perp$*  durch

$$\begin{aligned} S_v: V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

Ist  $a \in V$ , so definieren wir die *Spiegelung an der durch  $v$  und  $a$  gegebenen Hyperebene  $v^\perp + a$*  durch

$$\begin{aligned} S_{v,a}: V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto a + S_v(x - a). \end{aligned}$$

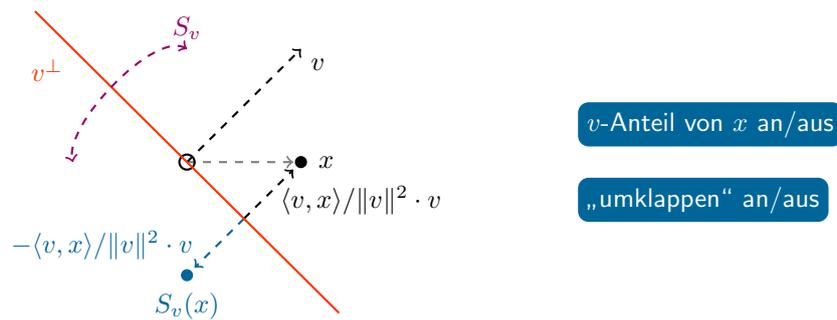


Abbildung 3.8.: Spiegelung an einer Hyperebene

Eine einfache Rechnung zeigt, dass Spiegelungen tatsächlich Isometrien sind (nachrechnen!). Woher kommt die Formel in Definition 3.4.3?

**Bemerkung 3.4.4** (Anschauung der Spiegelungsdefinition). Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, sei  $v \in V \setminus \{0\}$  und sei  $x \in V$ . Dann ist

$$S_v(x) = x - \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v - \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

und

$$\left( x - \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \right) \perp \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v.$$

Die rechte Seite ist dabei die orthogonale Projektion von  $x$  auf  $\mathbb{R} \cdot v$  und die linke Seite der dazu orthogonale Anteil von  $x$  (also der Anteil, der in der Hyperebene  $v^\perp$  liegt). Durch das Minuszeichen wird der  $v$ -Anteil an  $v^\perp$  „umgeklappt“, was anschaulich der „Spiegelung“ von  $x$  an  $v^\perp$  entspricht (Abbildung 3.8).

### 3.4.2 Die euklidische Isometriegruppe

Wir können die Isometriegruppe euklidischer Vektorräume beschreiben: Wie in Satz 2.5.1 kann man für euklidische Vektorräume zeigen, dass Isometrien zwischen euklidischen Vektorräumen linear sind; außerdem wissen wir nach Proposition 3.4.1, dass Isometrien zwischen euklidischen Vektorräumen winkeltreu sind. Dies liefert eine einfache Beschreibung aller Isometrien euklidischer Vektorräume mithilfe von Linearer Algebra. Der Einfachheit und Konkretheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den Fall  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ :

**Satz 3.4.5** (euklidische Isometriegruppe). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} O(n) &\longrightarrow \text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \\ A &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x) \\ (f(e_1), \dots, f(e_n)) &\longleftarrow f \end{aligned}$$

zueinander inverse Gruppenhomomorphismen. Hierbei ist  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$  die Untergruppe von  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$  aller Isometrien  $f$  mit  $f(0) = 0$ .

**Fingerrübung 3.4.6** (noch mehr Matrixgruppen). Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Was ist  $O(n)$  ?

**Hinweis**

2. Diese Gruppe heißt ?

3. Was ist  $SO(n)$  ?

**Hinweis**

4. Diese Gruppe heißt ?

*Beweis von Satz 3.4.5.* Die angegebene Abbildung  $O(n) \longrightarrow \text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ : Ist  $A \in O(n)$ , so ist  $f_A := (x \mapsto A \cdot x)$  eine Isometrie von  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ , denn: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned} d_2(f_A(x), f_A(y)) &= \|f_A(y) - f_A(x)\|_2 = \|A \cdot y - A \cdot x\|_2 = \|A \cdot (y - x)\|_2 \\ &= (\langle A \cdot (y - x), A \cdot (y - x) \rangle_2)^{1/2} \\ &= (\langle A^T \cdot A \cdot (y - x), y - x \rangle_2)^{1/2} \\ &= (\langle E_n \cdot (y - x), y - x \rangle_2)^{1/2} \\ &= \langle y - x, y - x \rangle_2 = \|y - x\|_2 \\ &= d_2(x, y). \end{aligned}$$

Außerdem ist die Abbildung  $A \mapsto f_A$  offenbar ein Gruppenhomomorphismus (nachrechnen!).

Auch die angegebene Abbildung  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \longrightarrow O(n)$  ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus: Sei  $f \in \text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ . Nach Satz 2.5.1 ist  $f$  linear. Sei  $A := (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  die Matrix von  $f$  bezüglich der Standardbasis (diese Zuordnung ist mit den Gruppenstrukturen verträglich). Nach Proposition 3.4.1 gilt

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}^n} \quad \langle A^T \cdot A \cdot x, y \rangle = \langle A \cdot x, A \cdot y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass dies zu  $A^T = A^{-1}$  bzw.  $A \in O(n)$  äquivalent ist (nachrechnen!).

Nach Konstruktion sind die beiden Abbildungen invers zueinander.  $\square$

**Bemerkung 3.4.7** (gesamte euklidische Isometriegruppe). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Untergruppe der Translationen isomorph zur additiven Gruppe  $\mathbb{R}^n$ , diese ist ein Normalteiler in  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$  und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n) &\longrightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \\ (a, A) &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x + a) \\ (f(0), (f(e_1) - f(0), \dots, f(e_n) - f(0))) &\longleftarrow f \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Gruppenhomomorphismen; die Gruppenstruktur des semi-direkten Produkts ist dabei durch die Konjugationsoperation von  $\text{O}(n)$  auf der Translationsuntergruppe bzw. durch Matrixmultiplikation von  $\text{O}(n)$  auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben, d.h.:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n)) \times (\mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n)) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n) \\ ((a, A), (b, B)) &\longmapsto (A \cdot b + a, A \cdot B) \end{aligned}$$

Aus der Linearen Algebra kennen wir bereits konkrete Beschreibungen der niedrigdimensionalen orthogonalen Gruppen [39, Satz 1.2.18]:

**Satz 3.4.8** (niedrigdimensionale orthogonale Gruppen).

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gilt

$$\text{O}(n) = \text{SO}(n) \cup \{S \cdot A \mid A \in \text{SO}(n)\},$$

wobei  $S$  die Spiegelungsmatrix

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{O}(n)$$

bezeichnet.

2. Es gilt  $\text{SO}(2) = \{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2 \cdot \pi)\}$ , wobei

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

D.h.  $\text{SO}(2)$  ist die Gruppe der Rotationen in  $\mathbb{R}^2$  um den Ursprung.

3. Das Komplement  $\text{O}(2) \setminus \text{SO}(2)$  besteht genau aus der Menge aller Spiegelungen in  $\mathbb{R}^2$  an Geraden. Genauer: Sei  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Dann gilt genau dann  $A \in \text{O}(2) \setminus \text{SO}(2)$ , wenn es  $B \in \text{O}(2)$  gibt mit

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Die Gruppe  $SO(3)$  besteht genau aus den Drehungen in  $\mathbb{R}^3$  um Geraden. Genauer: Sei  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Dann gilt genau dann  $A \in SO(3)$ , wenn es  $B \in O(3)$  und  $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$  gibt mit

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R(\varphi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

**Korollar 3.4.9** (Erzeugung durch Spiegelungen). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Jede Spiegelung an einer Hyperebene in  $\mathbb{R}^n$  liegt in  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ . Die Gruppe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$  wird von diesen Spiegelungen erzeugt, d.h. jede Isometrie kann als Produkt von Spiegelungen an Hyperebenen geschrieben werden.

*Beweis.* Jede Translation kann als Komposition von Spiegelungen geschrieben werden (Übungsaufgabe). Es genügt daher zu zeigen, dass  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$  von Spiegelungen erzeugt ist. Nach Satz 3.4.5 ist  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \cong O(n)$ . Mit den klassischen Normalformensätzen für orthogonale Matrizen kann man sich dann auf den Fall von  $O(2)$  bzw.  $O(1)$  zurückziehen [39, Satz 1.3.7]. Da man Drehungen als Produkt von Spiegelungen schreiben kann (Übungsaufgabe), folgt daraus die Behauptung (Übungsaufgabe).  $\square$

**Literaturaufgabe.** Vergleichen Sie die Ergebnisse von Satz 3.4.8 und Korollar 3.4.9 mit den Erklärungen zu Symmetrien in Schulbüchern!

### 3.4.3 Kongruenz

Nachdem wir die euklidische Isometriegruppe bestimmt haben, können wir leicht die klassischen Kongruenzsätze für euklidische Dreiecke ableiten.

Wir erinnern daran, dass zwei Teilmengen  $A$  und  $B$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  *kongruent* sind, wenn

. Im Rahmen der Schulmathematik wird Kongruenz in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  manchmal auch so eingeführt, dass Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  genau dann kongruent sind, wenn sie sich durch Kompositionen von Spiegelungen (und Drehungen) ineinander überführen lassen. Nach Korollar 3.4.9 stimmt dies mit dem gewöhnlichen metrischen Kongruenzbegriff überein.

Wir führen außerdem die folgende Notation ein: Ist  $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  ein nicht-entartetes geodätisches Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  (d.h. die Ecken liegen nicht auf einer gemeinsamen geodätischen Geraden), so schreiben wir  $\text{im } \Delta := \text{im } \gamma_0 \cup \text{im } \gamma_1 \cup \text{im } \gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$  für die Menge aller Bildpunkte der Geodäten des Dreiecks. Wir nennen dann die Differenzen  $\gamma_1(0) - \gamma_0(0)$ ,  $\gamma_2(0) - \gamma_1(0)$ ,  $\gamma_0(0) - \gamma_2(0)$  auch *Seiten* von  $\Delta$  und wir nennen  $\sphericalangle(\gamma_2, \bar{\gamma}_1)$  den *gegenüberliegenden Winkel* der Seite  $\gamma_1(0) - \gamma_0(0)$ , etc..

**Satz 3.4.10** (Kongruenzsätze für euklidische Dreiecke). Seien  $\Delta$  und  $\Delta'$  geodätische Dreiecke in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ , deren Eckpunkte jeweils nicht auf einer gemeinsa-

men Geraden liegen, mit den Seiten  $a, b, c \in \mathbb{R}^2$  bzw.  $a', b', c'$  und den gegenüberliegenden Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bzw.  $\alpha', \beta', \gamma'$ . Dann gilt: Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so sind im  $\Delta$  und im  $\Delta'$  kongruent.

**SWS** Es gilt  $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ ,  $\gamma = \gamma'$  und  $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ .

**SSS** Es gilt  $\|a\|_2 = \|a'\|_2$ ,  $\|b\|_2 = \|b'\|_2$  und  $\|c\|_2 = \|c'\|_2$ .

**WSW** Es gilt  $\beta = \beta'$ ,  $\|a\|_2 = \|a'\|_2$  und  $\gamma = \gamma'$ .

**SsW** Es gilt  $\|a\|_2 = \|a'\|_2 \geq \|b\|_2 = \|b'\|_2$  und  $\alpha = \alpha'$ .

**Fingerübung 3.4.11.** Skizzieren Sie die Situationen der Kongruenzsätze SWS, SSS, WSW, SsW!

*Beweis der Kongruenzsätze euklidischer Dreiecke (Satz 3.4.10).* Als erstes zeigen wir den Kongruenzsatz **SWS**: Da Translationen Isometrien sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die erste Ecke von  $\Delta$  bzw.  $\Delta'$  jeweils 0 ist. Da die Dreiecke jeweils nicht in einer Geraden enthalten sind, sind  $(a, b)$  und  $(a', b')$  Basen von  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, die durch

$$f(a) = a' \quad \text{und} \quad f(b) = b'$$

gegeben ist. Dann ist  $f$  eine Isometrie, denn: Wegen  $\gamma = \gamma'$  ist

$$\frac{\langle b, -a \rangle}{\|a\|_2 \cdot \|b\|_2} = \text{?} = \frac{\langle b', -a' \rangle}{\|a'\|_2 \cdot \|b'\|_2}.$$

Aus  $\|a\|_2 = \|a'\|_2$  und  $\|b\|_2 = \|b'\|_2$  folgt somit

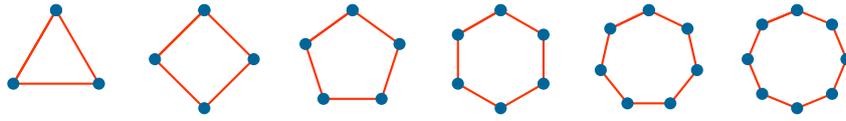
$$\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle.$$

Mit dieser Gleichung und  $\|a\|_2 = \|a'\|_2$  bzw.  $\|b\|_2 = \|b'\|_2$  kann man leicht sehen, dass  $f$  eine Isometrie ist (nachrechnen!). Nach Konstruktion (und der Charakterisierung euklidischer Geodäten; Proposition 2.2.6) ist  $f(\text{im } \Delta) = \text{im } \Delta'$ .

Der Kongruenzsatz **SSS** folgt aus dem Kongruenzsatz SWS: Mit dem Kosinussatz (Bemerkung 3.4.2) und der SSS-Voraussetzung folgt  $\cos \gamma = \cos \gamma'$  bzw. (da die Winkel in  $(0, \pi)$  liegen) auch  $\gamma = \gamma'$ . Mit dem bereits bewiesenen Kongruenzsatz SWS folgt somit, dass im  $\Delta$  und im  $\Delta'$  kongruent sind.

Ähnlich leitet man die Kongruenzsätze **WSW** und **SsW** mithilfe des Sinussatzes (Bemerkung 3.3.8) ab (Übungsaufgabe).  $\square$

**Literaturaufgabe.** Wie werden die Kongruenzsätze in Schulbüchern eingeführt/begründet? Die Kongruenzsätze bilden die Grundlage für viele elementargeometrische Beweise (z.B. für den Satz des Thales und seine Verallgemeinerungen für Sehnenvierecke); gehen Sie ein paar solcher Beispiele durch!

Abbildung 3.9.: Reguläre Polygone in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ 

**Bemerkung 3.4.12** (Hilberts Axiomatik). In der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie ist der Kongruenzsatz SWS als Axiom verankert (Axiom IV.6, in der Gruppe der Axiome der *Congruenz*).

**Caveat 3.4.13** (Kongruenzsatz WWW). Man beachte, dass es in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  *keinen* Kongruenzsatz WWW gibt. D.h. Dreiecke, deren Winkel übereinstimmen, sind im allgemeinen *nicht* kongruent. Man kann aber zeigen, dass solche Dreiecke immer ähnlich sind, d.h. sich nur durch eine Isometrie und eine homogene Skalierung unterscheiden.

Es gibt jedoch durchaus Geometrien, in denen der Kongruenzsatz WWW gilt (siehe zum Beispiel Satz 4.5.9).

### 3.4.4 Reguläre Polygone

Geometrische Objekte, die „viele“ Symmetrien besitzen, werden als „regulär“ bezeichnet. Im folgenden untersuchen wir reguläre Polygone, mit einem Schwerpunkt auf regulären Polygonen in der euklidischen Ebene.

**Definition 3.4.14** (reguläres Polygon). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , sei  $m \in X$  und sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ein *reguläres  $n$ -Eck* in  $(X, d)$  mit *Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r$*  ist ein Polygon  $P$  in  $(X, d)$  mit genau  $n$  Ecken  $v_1, \dots, v_n$  (und somit auch genau  $n$  Kanten), so dass alle Kanten dieselbe Länge haben und

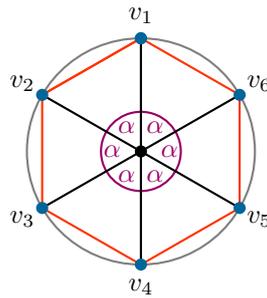
$$\forall_{j \in \{1, \dots, n\}} d(x_j, m) = r$$

gilt.

Beispiele für reguläre Polygone in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  finden sich in Abbildung 3.9. In der euklidischen Ebene sind reguläre Polygone im wesentlichen durch den Radius und die Anzahl der Ecken bestimmt:

**Proposition 3.4.15** (Eindeutigkeit regulärer  $n$ -Ecke in der euklidischen Ebene). Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sind  $P$  und  $P'$  reguläre  $n$ -Ecke in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Radius  $r$ , so sind im  $P$  und im  $P'$  kongruent.

*Beweis.* Wir bestimmen zunächst die Kuchenstückdreiecke von  $P$  genauer: Seien  $v_1, \dots, v_n$  die  $n$  Ecken von  $P$ , in dieser Reihenfolge, und sei  $m$  der Mittelpunkt von  $P$ ; sei  $s := d_2(v_1, v_2) = d_2(v_3, v_2) = \dots$  die Kantenlänge von  $P$  und sei  $\alpha := \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m)$  der Kuchenstückwinkel (Abbildung 3.10).

Abbildung 3.10.: Kuchenstückdreiecke in regulären Polygonen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ 

Es gilt  $\alpha = 2 \cdot \pi/n$ , denn: Mit dem Kongruenzsatz [?](#) und der Winkeltreue von Isometrien (alternativ: direkt mit dem Kosinussatz; Bemerkung 3.4.2) erhalten wir für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ , dass

$$\sphericalangle(v_j - m, v_{j+1} - m) = \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m) = \alpha,$$

wobei wir Indizes modulo  $n$  addieren. Mit der Beschreibung von Winkeln über Bogenlängen in Kreisen (Bemerkung 3.3.3) folgt, dass  $n \cdot \alpha = 2 \cdot \pi$  gilt bzw.

$$\alpha = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \pi.$$

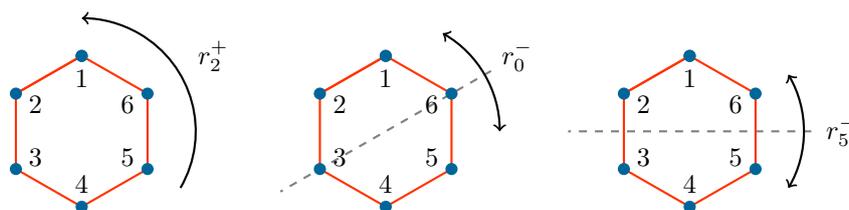
Man beachte, dass dieser Ausdruck nur von  $n$ , nicht aber von den anderen Daten von  $P$  abhängt.

Daher gilt entsprechend auch

$$\sphericalangle(v'_1 - m', v'_2 - m') = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \pi = \sphericalangle(v_1 - m, v_2 - m)$$

im Polygon  $P'$  (wobei wir die zu  $P$  analoge Notation verwenden). Mit dem Kongruenzsatz [?](#) erhalten wir daraus, dass die geodätischen Dreiecke, die von  $m, v_1, v_2$  bzw. von  $m', v'_1, v'_2$  aufgespannt werden, kongruent sind und wir können eine solche Isometrie  $f$  so wählen, dass  $m$  auf  $m'$  abgebildet wird.

Da  $f$  eine Isometrie ist, bildet  $f$  den Kreis vom Radius  $r$  um  $m$  auf den Kreis vom Radius  $r$  um  $m'$  ab. Indem man den Zusammenhang von Winkeln und Bogenlängen (Bemerkung 3.3.3) mit der obigen Winkelberechnung kombiniert, kann man nachvollziehen, dass  $f(\{v_1, \dots, v_n\}) = f(\{v'_1, \dots, v'_n\})$  gilt und dass  $f$  benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbildet (nachrechnen!). Damit bildet  $f$  die geodätischen Kanten von  $P$  aber auch auf die entsprechenden geodätischen Kanten von  $P'$  ab. Also ist  $f(\text{im } P) = \text{im } P'$ , wie gewünscht.  $\square$

Abbildung 3.11.: Isometrien regulärer Sechsecke in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ 

Da die euklidische Norm mit Skalierung kompatibel ist, folgt daraus auch, dass reguläre  $n$ -Ecke mit verschiedenen Radien ähnlich sind, d.h. bis auf Skalierung kongruent sind.

**Bemerkung 3.4.16** (Existenz regulärer  $n$ -Ecke in der euklidischen Ebene). Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ähnliche Argumente wie im obigen Beweis zeigen auch, dass es ein reguläres  $n$ -Eck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  gibt, wobei die Ecken genau die Punkte  $r \cdot (\cos(j \cdot 2 \cdot \pi/n), \sin(j \cdot 2 \cdot \pi/n))$  mit  $j \in \{1, \dots, n\}$  sind (nachrechnen!). Die Seitenlängen und Innenwinkel regulärer  $n$ -Ecke lassen sich in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ohne Schwierigkeiten mit den bisher entwickelten Methoden berechnen (nachrechnen!).

**Proposition 3.4.17** (Isometriegruppen regulärer Polygone). Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und sei  $P$  ein reguläres  $n$ -Eck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den Ecken  $v_1, \dots, v_n$  (in dieser Reihenfolge). Sei

$$X := (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\})$$

der entsprechende zyklische Graph. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\text{im } P, d_2) &\longrightarrow \text{Aut}(X) \\ f &\longmapsto f|_{\{v_1, \dots, v_n\}} \\ D_n := \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \text{Aut}(X) \\ ([j], [0]) &\longmapsto r_j^+ := (v_k \mapsto v_{k+j}) \\ ([j], [1]) &\longmapsto r_j^- := (v_k \mapsto v_{-k+j}) \end{aligned}$$

*Gruppenisomorphismen.* Dabei operiert  $[1] \in \mathbb{Z}/2$  in dem obigen semidirekten Produkt durch Inversion auf der additiven Gruppe  $\mathbb{Z}/n$  und wir verwenden implizit auf den Indizes der Knoten von  $X$  Addition modulo  $n$ .

*Beweisskizze.* Indem man die Extremalität der Ecken sowie Abstände der Ecken zueinander betrachtet, sieht man, dass jede Isometrie von im  $P$  Ecken auf Ecken abbildet und dadurch bereits eindeutig bestimmt ist. Andererseits kann man nachrechnen, dass man wirklich jeden Automorphismus des Graphen  $X$  auch durch eine entsprechende Isometrie von im  $P$  realisieren kann.

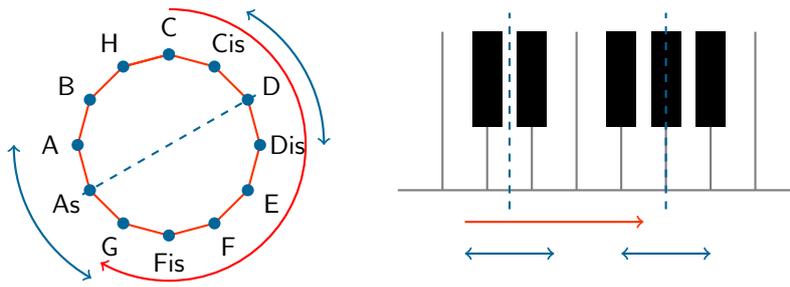


Abbildung 3.12.: Die zwölf Halbtöne und die Isometriegruppe  $D_{12}$  des regulären 12-Ecks; rot: Transposition um sieben Halbtöne nach oben; blau: Inversion an D bzw. As (auf dem Klavier leicht zu spielen).

Die algebraische Beschreibung von  $\text{Aut}(X)$  ergibt sich, indem man nachrechnet, dass die angegebene Abbildung ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Übungsaufgabe, im Falle des Quadrats).  $\square$

Aus der obigen Beschreibung der Isometriegruppe von ebenen euklidischen regulären  $n$ -Ecken kann man außerdem ableiten, dass solche Isometriegruppen von zwei Spiegelungen erzeugt werden, nämlich zum Beispiel von  $r_0^-$  und  $r_{n-1}^-$  (nachrechnen). Beispiele für Isometrien eines regulären Sechsecks finden sich in Abbildung 3.11.

**Beispiel 3.4.18** (Kaleidoskop). Kaleidoskope basieren auf Spiegelungen an den Kanten regulärer (d.h. gleichseitiger) Dreiecke (Übungsaufgabe).

**Bemerkung 3.4.19** (maximale Symmetrie). Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und seien  $M \subset \mathbb{R}^2$  mit  $|M| = n$ . Man kann dann zeigen, dass  $\text{Isom}(M, d_2)$  zu einer Untergruppe von  $D_n$  isomorph ist und dass  $\text{Isom}(M, d_2)$  genau dann zu  $D_n$  isomorph ist, wenn  $M$  die Menge der Eckpunkte eines regulären  $n$ -Ecks in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ist. Reguläre  $n$ -Ecke in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  können also auch als  $n$ -Ecke maximaler Symmetrie beschrieben werden.

**Ausblick 3.4.20** (Musik und  $D_{12}$ ). Die Isometriegruppe  $D_{12}$  des regulären 12-Ecks tritt in natürlicher Weise in der Musik auf [15]. Man betrachtet dazu den zyklischen Graphen der klassischen zwölf Halbtöne einer Oktave (Abbildung 3.12). Dann entspricht der Automorphismus  $r_j^+$  genau der Transposition um  $j$  Halbtöne und  $r_j^-$  entspricht einer Inversion der Tonleiter (Abbildung 3.13).

**Bemerkung 3.4.21** (Hexaflexagon). Ein schönes Experiment um mehr über Symmetrien und Dreiecke bzw. Sechsecke zu lernen ist, ein Hexaflexagon zu bauen und die verschiedenen Zustände davon zu verstehen [25, 1].

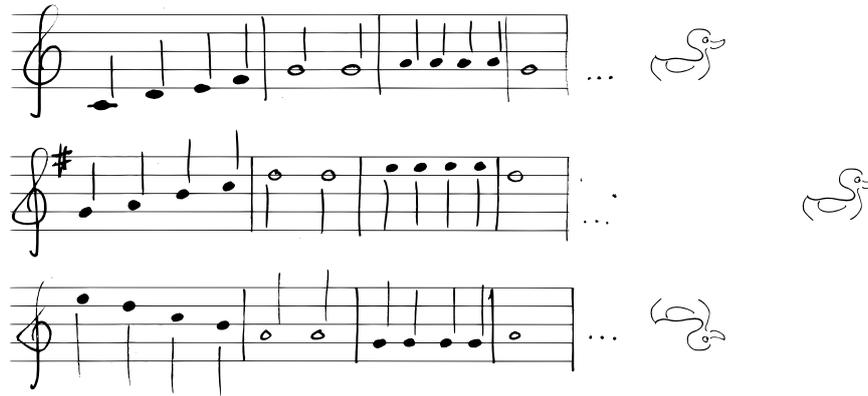


Abbildung 3.13.: Original, Transposition, Inversion

### 3.4.5 Reguläre Polyeder

Wir gehen kurz auf den dreidimensionalen Fall ein, aber ohne die Polyedertheorie [60, 14] im Detail zu entwickeln. Grob gesagt sind konvexe Polyeder in  $\mathbb{R}^3$  Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen; es gibt dann einen wohldefinierten Begriff von Ecken, Kanten und Seitenflächen solcher konvexer Polyeder und diese Seitenflächen sind kongruent zu (konvexen) Polygonen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

**Definition 3.4.22** (regulärer Polyeder). Ein *regulärer Polyeder* ist ein konvexer Polyeder in  $\mathbb{R}^3$  mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein reguläres Polygon in  $(\mathbb{R}^2, d_2) \subset (\mathbb{R}^3, d_2)$  mit der Eigenschaft, dass alle Seitenflächen zu diesem Polygon kongruent sind (in  $(\mathbb{R}^3, d_2)$ ).
- An jeder Ecke trifft sich dieselbe Anzahl von Seitenflächen.

**Beispiel 3.4.23** (platonische Körper). Die folgenden fünf Polyeder sind reguläre Polyeder (Abbildung 3.14, Abbildung 3.15):

Polyeder	Ecken/Kanten pro Seitenfläche	Seiten	Kanten	Ecken
Tetraeder	3	4		
Würfel (Hexaeder)	4	6		
Oktaeder	3	8		
Dodekaeder	5	12		
Ikosaeder	3	20		



Abbildung 3.14.: Würfel, platonische



Abbildung 3.15.: Körper, platonische

**Satz 3.4.24** (Klassifikation der regulären Polyeder). *Bis auf Isometrie und Reskalierung gibt es nur fünf reguläre Polyeder in  $(\mathbb{R}^3, d_2)$ , nämlich:*

*Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.*

*Beweisskizze.* Wir skizzieren zunächst, warum jeder reguläre Polyeder dieselbe Kombinatorik wie einer der fünf platonischen Körper haben muss: Sei ein regulärer Polyeder  $P$  gegeben; dieser habe als Seitenflächen reguläre  $n$ -Ecke, der Polyeder habe insgesamt  $f$  Seitenflächen,  $k$  Kanten und  $e$  Ecken, und an jeder Ecke treffen  $m$  Seitenflächen zusammen. Sei  $X$  der Graph, dessen Knoten die Ecken von  $P$  sind und dessen Kanten die Kanten von  $P$  modellieren.

Man kann nun durch eine geeignete Zentralprojektion auf eine Sphäre zeigen, dass  $P$  eine Einbettung  $X_{\mathbb{R}} \rightarrow S^2$  liefert. Nach Proposition 1.7.7 erhalten wir so auch eine planare Einbettung; dabei entsprechen die Facetten genau den Seitenflächen von  $P$ . Mit der eulerschen Polyederformel (Satz 1.7.14) folgt also

$$e - k + f = 2.$$

Diese Anwendung erklärt insbesondere auch den Namen „eulersche Polyederformel.“

Da jede Kante die Kante von genau zwei Seitenflächen ist und jede Kante genau zwei Ecken miteinander verbindet, gilt

$$\frac{n \cdot f}{2} = k \quad \text{und} \quad \frac{m \cdot e}{2} = k.$$

Zusammen mit der eulerschen Polyederformel folgt  $2 = 2 \cdot k/m - k + 2 \cdot k/n$  bzw.

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Da es sich bei  $m$  und  $n$  um natürliche Zahlen  $\geq 3$  handelt, ergibt sich daraus, dass für  $(n, m)$  nur die folgenden Werte infrage kommen (nachrechnen!):

$$(3, 3), \quad (3, 4), \quad (4, 3), \quad (3, 5), \quad (5, 3).$$

Eingesetzt in die obigen Gleichungen erhalten wir daraus genau die kombinatorischen Typen der fünf platonischen Körper (nachrechnen).

Zusammen mit elementarer Polyedertheorie folgt daraus auch, dass bis auf Isometrie/Reskalierung nur die platonischen Körper als regulärer Polyeder möglich sind [14].  $\square$

**Fingerübung 3.4.25** (Graphen platonischer Körper). Skizzieren Sie für die platonischen Körper die Knoten-/Kantengraphen, die im Beweis von Satz 3.4.24 verwendet werden.

**Bemerkung 3.4.26** (Herstellung platonischer Körper). Es gibt viele einfache Möglichkeiten, Modelle platonischer Körper herzustellen, zum Beispiel:

- Durch Ausschneiden und Verkleben entsprechender Netze aus Papier (z.B. mit Mustern von M.C. Escher [55]).
- Durch modulares Origami [30].
- Mithilfe von Geomag<sup>1</sup>, einem magnetischen Bausystem.
- Mithilfe von Zometool<sup>2</sup>, einem Stecksystem.
- Mithilfe eines 3D-Druckers (es gibt mittlerweile auch viele Anbieter, bei denen man eigene 3D-Modelle drucken kann).

Für die Visualisierung platonischer Körper eignen sich Raytracer oder CAD-Programme (Übungsaufgabe).

**Ausblick 3.4.27** (Isometriegruppen regulärer Polyeder). Auch die Isometriegruppen regulärer Polyeder lassen sich konkret angeben, ähnlich zum Fall der regulären Polygone (Proposition 3.4.17). Wie im zweidimensionalen Fall stellt sich auch hier heraus, dass die Isometriegruppen regulärer Polyeder von Spiegelungen erzeugt werden [16]. Diese Isometriegruppen spielen auch in der Chemie (Molekülstrukturen) und in der Biologie (Symmetrie von Organismen oder Viren) eine Rolle (Übungsaufgabe).

<sup>1</sup>Geomag ist eine Trademark von Claudio Vincetelli

<sup>2</sup>Zometool ist eine Trademark von Zometool Inc.

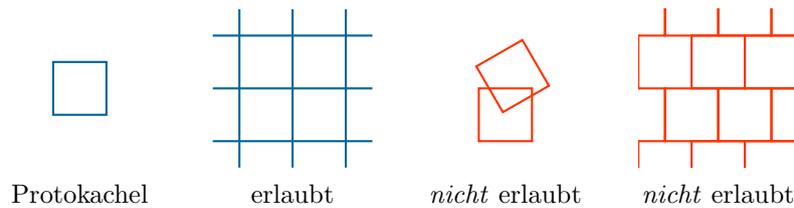


Abbildung 3.16.: Was in einer Pflasterung erlaubt ist und was nicht

## 3.5 Pflasterungen der euklidischen Ebene

Wir geben zum Abschluss unserer Untersuchung euklidischer Geometrie einen kleinen Einblick in Pflasterungen in der Ebene. Wir werden uns dabei auf reguläre Pflasterungen bzw. auf eine spezielle Art von aperiodischen Pflasterungen beschränken. Wir formalisieren zunächst, was wir unter einer Pflasterung verstehen wollen (Abbildung 3.16):

**Definition 3.5.1** (Protokachel, Pflasterung). Sei  $K$  eine endliche Menge von Polygonen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Eine *Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Protokacheln aus  $K$*  ist eine Menge  $P$  von Polygonen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Polygon aus  $P$  ist zu einem der Polygone aus  $K$  kongruent.
- Für alle  $Q_1, Q_2 \in P$  mit  $Q_1 \neq Q_2$  gilt

$$Q_1^\circ \cap Q_2^\circ = \emptyset$$

und  $\text{im } Q_1 \cap \text{im } Q_2$  ist sowohl eine endliche Vereinigung von Kanten und Ecken von  $Q_1$  als auch von  $Q_2$ .

- Es gilt

$$\bigcup_{Q \in P} (\text{im } Q \cup Q^\circ) = \mathbb{R}^2.$$

**Definition 3.5.2** (periodische/aperiodische Pflasterung). Wir nennen eine Pflasterung  $P$  von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  *periodisch*, wenn es eine nicht-triviale Translation  $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle  $Q \in P$  ist auch  $f(Q) \in P$ . Ist  $P$  nicht periodisch, so nennen wir  $P$  *aperiodisch*.

**Fingerübung 3.5.3** (Pflasterungen). Handelt es sich um Pflasterungen im Sinne von Definition 3.5.1? Wenn ja: Was sind die Protokacheln? Wenn nein: Warum?

1. geflieste Badezimmerwand
2. Parkettboden
3. Pflaster-Gehweg
4. Tetris-Spielsituation
5. Fachwerkhaus
6. Klinkerbau

### 3.5.1 Reguläre Pflasterungen der Ebene

Als erste Beispiel betrachten wir die klassischen regulären Pflasterungen der euklidischen Ebene.

**Definition 3.5.4** (reguläre Pflasterung). Eine Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ist *regulär*, wenn es nur eine Protokachel gibt und diese Protokachel ein reguläres Polygon in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ist.

**Proposition 3.5.5** (Klassifikation regulärer Pflasterungen der euklidischen Ebene). *Bis auf Isometrie und Skalierung gibt es nur die in Abbildung 3.17 dargestellten regulären Pflasterungen von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .*

*Beweis.* Offenbar liefert Abbildung 3.17 reguläre Pflasterungen von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Warum sind dies im wesentlichen die einzigen? Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und sei  $P$  eine reguläre Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  durch reguläre  $n$ -Ecke. Sei  $Q \in P$ , sei  $v$  eine Ecke von  $Q$  und sei  $k \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Polygone aus  $P$ , die sich in  $v$  treffen. Mit den bisher entwickelten Techniken kann man zeigen, dass (nachrechnen)

- der Winkel der Seiten von  $Q$  an der Ecke  $v$  genau  $\pi - 2 \cdot \pi/n$  ist und
- dass

$$k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi = 2 \cdot \pi.$$

Mit der Ganzzahligkeit von  $k$  und  $n$  folgt daraus, dass für  $(n, k)$  nur die folgenden Kombinationen möglich sind:

$$(3, 6), \quad (4, 4) \quad (6, 3).$$

Ähnlich zum Beweis von Proposition 3.4.15 kann man zeigen, dass diese Kombinationen (bis auf Isometrien und Skalierung) genau auf die Pflasterungen in Abbildung 3.17 führen (nachrechnen).  $\square$

Insbesondere sind alle regulären Pflasterungen von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  periodisch. Die Klassifikation der Symmetriegruppen periodischer Pflasterungen von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  spielt zum Beispiel in der Physik/Chemie eine Rolle (für Oberflächenstrukturen) und auch in der Kunst/Architektur.

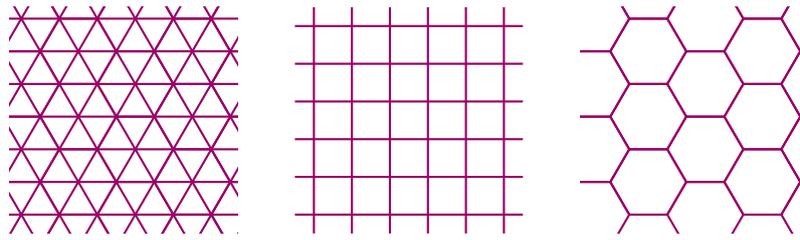


Abbildung 3.17.: Die regulären Pflasterungen der euklidischen Ebene

### 3.5.2 Aperiodische Pflasterungen der Ebene

Wir werden nun eine besondere Art von Protokacheln kennenlernen; mit diesen kann die euklidische Ebene zwar gepflastert werden, aber nur aperiodisch. Die folgende Konstruktion geht auf Penrose zurück [49, 2, 3, 52].

Die *Penrose-Protokacheln* sind durch die Umrisse und Winkel in Abbildung 3.18 definiert. Die Hauptkantenlängen sind alle gleich, die Innenwinkel der Hauptparallelogramme sind  $72^\circ$  und  $108^\circ$  bzw.  $36^\circ$  und  $144^\circ$ .<sup>3</sup>

In der Praxis ist es etwas einfacher, die Funktion der Ein- und Auskerbungen durch Markierungen zu simulieren. Man kann sich leicht überlegen, dass die markierten Protokacheln in Abbildung 3.18 genau dieselben Pflasterungen liefern wie die unmarkierten Protokacheln, wenn die zusätzliche Einschränkung berücksichtigt wird, dass Kacheln nur so an Kanten aneinanderstoßen dürfen, dass die Markierungen zusammenpassen (nachrechnen). Vorlagen für die markierten Penrose-Protokacheln finden sich in Anhang A.8.

**Interaktives Tool 3.5.6** (Penrose tiling generator). Experimentieren Sie mit einem Generator für Penrose-Parkettierungen, zum Beispiel:

<https://misc.0o0o.org/penrose/>

**Satz 3.5.7** (Eigenschaften von Penrose-Pflasterungen).

1. Jede Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Penrose-Protokacheln ist aperiodisch.
2. Es existiert eine Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Penrose-Protokacheln.

*Beweisskizze.* Der Beweis beruht auf der sogenannten Inflation bzw. Deflation von Pflasterungen durch Penrose-Protokacheln.

*Aperiodizität.* Sei  $P$  eine Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit (markierten) Penrose-Protokacheln.

<sup>3</sup>Also  $2 \cdot \pi/5$  und  $3 \cdot \pi/5$  bzw.  $\pi/5$  und  $4 \cdot \pi/5$ .

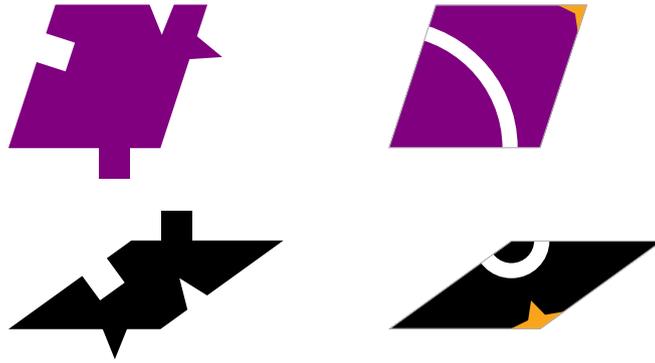


Abbildung 3.18.: Penrose-Protokacheln; nackte Polygone und in der markierten Version

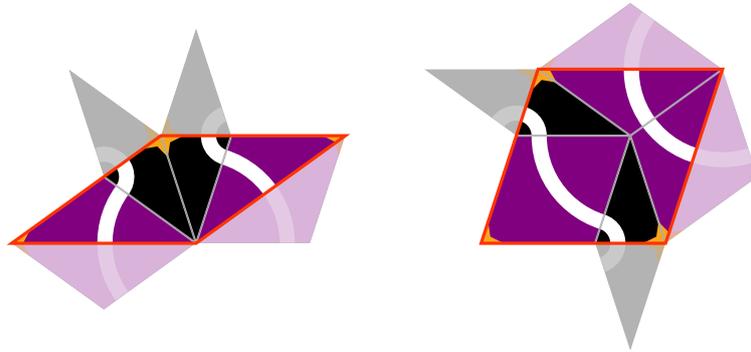


Abbildung 3.19.: Inflation von Penrose-Pflasterungen

Wir beginnen mit einer Beschreibung der *Inflation* von  $P$ : Eine einfache Fallunterscheidung zeigt, dass sich jede „halbe“ Kachel von  $P$  in genau einer der beiden Situationen in Abbildung 3.19 befindet.

Man beachte, dass es sich dabei wieder um Penrose-Protokacheln handelt, wobei

- die Seitenlänge mit dem Faktor  $\tau := (1 + \sqrt{5})/2$  skaliert wurde und
- die Markierungen durch neue Markierungen (die aber dieselbe Funktionalität haben) ersetzt wurden.

Dies liefert zu  $P$  die (eindeutig bestimmte) Pflasterung  $I(P)$  von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den skalierten Penrose-Protokacheln.

*Angenommen*,  $P$  ist periodisch, d.h. es gibt eine nicht-triviale Translation  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die Kacheln aus  $P$  in Kacheln aus  $P$  überführt. Dann

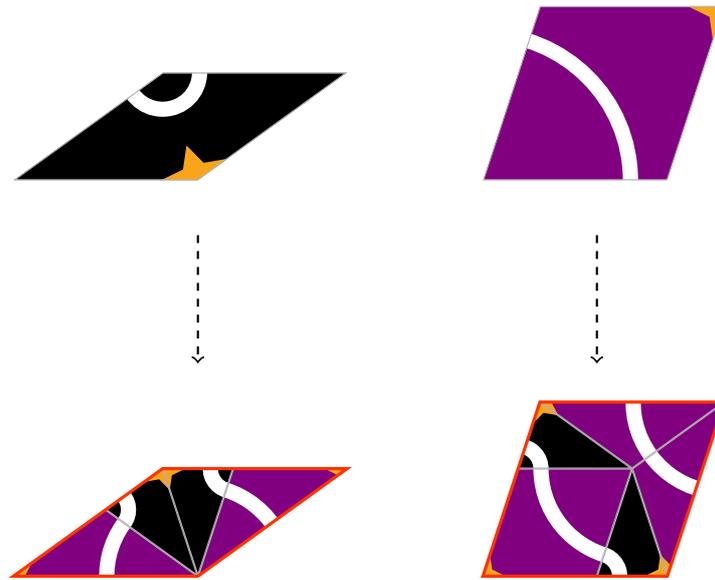


Abbildung 3.20.: Deflation von Penrose-Pflasterungen

ist aber auch (wegen der Eindeutigkeit der Inflationskonstruktion und da  $f$  benachbarte Kacheln auf benachbarte Kacheln abbildet) die Inflation  $I(P)$  unter  $f$  invariant.

Wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  groß genug, so ist der minimale Abstand zwischen Ecken der Protokacheln aus der  $n$ -fachen Inflation  $I^n(P)$  größer als die Translationslänge  $\|f(0) - 0\|_2 > 0$  von  $f$ . Andererseits folgt induktiv auch, dass  $I^n(P)$  unter  $f$  invariant ist; insbesondere bildet  $f$  Ecken der Kacheln aus  $I^n(P)$  auf Ecken von Kacheln aus  $I^n(P)$  ab. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Wahl von  $n$ .

Also ist  $P$  *nicht* periodisch.

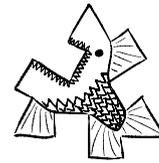
*Existenz.* Wir skizzieren einen Beweis für Existenz mithilfe der *Deflation* von (partiellen) Penrose-Pflasterungen: Analog zur Inflation kann man Penrose-Kacheln wie in Abbildung 3.20 unterteilen und erhält so (partielle) Penrose-Pflasterungen, deren Protokacheln um den Faktor  $1/\tau$  skaliert sind.

Auf diese Weise kann man ausgehend von einer einzelnen Penrose-Kachel endliche Penrose-Pflasterungen von Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  konstruieren, die (wenn man die Kacheln wieder auf die ursprüngliche Kantenlänge skaliert) Kreisscheiben in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  um 0 von gegebenem Radius überdecken. Mit einem geschickten Kompaktheitsargument bzw. Zähl- und Diagonalargument kann man daraus eine Folge von kompatiblen Pflasterungen auswählen, die ganz  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  pflastern.  $\square$

**Anmerkung zum Lernen (Zusammenfassung).** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3. Berücksichtigen Sie dabei die folgenden Fragen:

- Was ist Geometrie in normierten/euklidischen Vektorräumen?
- Wie kann man die Länge von Kurven analytisch beschreiben?
- Wie kann man Geodäten analytisch beschreiben?
- Wie kann man Winkel einführen?
- Wie kann man klassische Sätze über Dreiecke mit Mitteln der Linearen Algebra und der Analysis beweisen?
- Wie kann man Flächeninhalte von Polygonen definieren/bestimmen?
- Wie kann man die Isometriegruppe endlichdimensionaler euklidischer Vektorräume beschreiben/bestimmen?
- Wie kann man besonders symmetrische Objekte klassifizieren?
- Welche Arten von Pflasterungen der euklidischen Ebene gibt es?
- Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
- Welche Anwendungen gibt es?
- Wie/Wo treten diese Phänomene in der Schulmathematik auf?

# 4



## Elementare riemannsche Geometrie

---

Die Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms in der euklidischen Axiomatik hat zur Entdeckung der hyperbolischen Geometrie geführt. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Grundzüge der hyperbolischen Geometrie, insbesondere der hyperbolischen Ebene, zu verstehen. Um die Konstruktion und die Eigenschaften der hyperbolischen Ebene transparent formulieren zu können, werden wir Werkzeuge der elementaren riemannschen Geometrie verwenden. Zum Abschluss werden wir die hyperbolische Geometrie systematisch mit der euklidischen und der sphärischen Geometrie vergleichen.

### Überblick über dieses Kapitel.

4.1	Was ist riemannsche Geometrie?	126
4.2	Konstruktion der hyperbolischen Ebene	130
4.3	Länge von Kurven	131
4.4	Symmetrie	136
4.5	Hyperbolische Dreiecke	152
4.6	Vergleich mit sphärischer Geometrie	164

**Schlüsselbeispiel.** hyperbolische Ebene, Sphäre

## 4.1 Was ist riemannsche Geometrie?

Riemannsche Geometrie ist die Geometrie von Mannigfaltigkeiten und beinhaltet insbesondere eine Verallgemeinerung metrischer Begriffe wie Längen, Abstände, Winkel, Flächeninhalte und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mithilfe analytischer Methoden. Wir werden im folgenden kurz skizzieren, auf welchen Bestandteilen die riemannsche Geometrie aufbaut und wie wir diese Ideen nutzen können um die hyperbolische Ebene zu konstruieren. Eine fundierte Einführung in die riemannsche Geometrie liefert zum Beispiel das Buch von Lee [36].

Die grundlegenden Objekte der riemannschen Geometrie sind riemannsche Mannigfaltigkeiten. Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind glatte Mannigfaltigkeiten, die mit einer zusätzlichen Struktur, einer sogenannten riemannschen Metrik ausgestattet sind. Bei riemannschen Metriken handelt es sich *nicht* um Metriken im Sinne metrischer Räume. Wir werden im folgenden sehen, wie man aus einer riemannschen Metrik eine gewöhnliche Metrik gewinnen kann und wie man damit arbeiten kann.

### 4.1.1 Wozu riemannsche Geometrie?

Riemannsche Geometrie erlaubt es unter anderem, die folgenden Fragen zu beantworten:

#### Frage 4.1.1.

- Wie kann man die Geometrie euklidischer Räume auf kompliziertere Objekte wie Mannigfaltigkeiten übertragen? Insbesondere: wie erhält man geeignete Begriffe von Längen, Abständen, Winkeln, Flächeninhalten, ... auf Mannigfaltigkeiten?
- Wie kann man Krümmung von geometrischen Objekten lokal definieren?
- Welche globalen Konsequenzen haben lokale Krümmungseigenschaften?
- Gibt es zweidimensionale Geometrien, die alle Axiome von Euklid bzw. Hilbert erfüllen bis auf das Parallelenaxiom, aber das Parallelenaxiom *nicht* erfüllen?
- Gibt es längentreue ebene Landkarten von Ausschnitten der Erdoberfläche?

Vielfältige weitere Anwendungen ergeben sich in der Physik und der Optimierung.

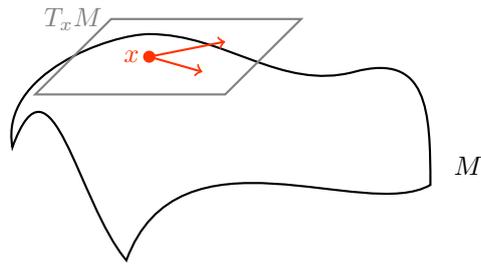


Abbildung 4.1.: Eine glatte Mannigfaltigkeit, schematisch

### 4.1.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündel

Eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist grob gesagt ein topologischer Raum, der lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussieht und für den man definieren kann, was glatte Abbildungen sind. Zu jedem Punkt  $x \in M$  kann man einen Tangentialraum  $T_x M$  konstruieren; dieser ist ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der die „beste lineare Approximation“ an  $M$  im Punkt  $x$  beschreibt (Abbildung 4.1). Ist  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so erhält man für jedes  $x \in M$  eine induzierte lineare Abbildung  $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ , die  $f$  an  $x$  „linear approximiert,“ das *Differential von  $f$  an der Stelle  $x$* .

Wir erklären diese Begriffe nun ein bisschen genauer: Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

- Eine *topologische  $n$ -Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist; außerdem verlangt man im Normalfall zusätzlich noch, dass der topologische Raum hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, um pathologische Fälle auszuschließen.
- Eine *glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit* ist eine topologische  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einem glatten Atlas (bestehend aus Karten  $M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit glatten Kartenwechseln). Mithilfe des glatten Atlas lässt sich definieren, wann Abbildungen von und nach  $M$  glatt sind.
- Ist  $M$  eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit, so kann man durch lokale lineare Approximation das *Tangentialbündel*  $p_M: TM \rightarrow M$  konstruieren. Das Tangentialbündel ist ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel über  $M$ , d.h.  $p_M$  ist eine stetige Abbildung und für jedes  $x \in M$  ist die Faser  $T_x M := p_M^{-1}(x)$  mit der Struktur eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums versehen, so dass folgende Bedingung erfüllt ist: Jeder Punkt in  $M$  besitzt eine offene Umgebung  $U \subset M$  mit der Eigenschaft, dass

$p_M|_{p_M^{-1}(U)}: p_M^{-1}(U) \rightarrow U$  (bis auf Homöomorphismus) nichts anderes als die Projektion

$$U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$$

auf die erste Koordinate ist und die Vektorraumstruktur auf den Fasern mit der Vektorraumstruktur der zweiten Koordinate verträglich ist. Zusätzlich hat das Tangentialbündel die Eigenschaft, dass es lokal „die beste lineare Approximation“ an  $M$  ist.

Genauer gesagt liefert das Tangentialbündel einen Funktor und glatte Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  zwischen glatten Mannigfaltigkeiten induzieren Abbildungen  $Tf: TM \rightarrow TN$  zwischen den entsprechenden Tangentialbündeln, die faserweise linear sind. Wie im Fall der klassischen Ableitung ist  $Tf$  in jedem Punkt die „beste lineare Approximation“ an  $f$ .

**Beispiel 4.1.2** (offene Teilmengen der Ebene als glatte Mannigfaltigkeiten). Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge. Dann ist  $M$  offensichtlich eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit und wir versehen  $M$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten glatten Struktur. In diesem Fall ist das Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$  trivial, d.h.  $TM \cong M \times \mathbb{R}^2$ , wobei die Bündelprojektion einfach die Projektion auf die erste Koordinate ist und die Vektorraumstruktur der Fasern durch die Vektorraumstruktur der zweiten Koordinate gegeben ist. Wir identifizieren daher  $T_x M$  für jedes  $x \in M$  auf diese Weise mit  $\mathbb{R}^2$ . D.h. in diesem Fall können wir die globale Struktur des Tangentialbündels ignorieren und wie gewohnt mit glatten Funktionen und ihren Ableitungen umgehen.

**Caveat 4.1.3.** Im allgemeinen ist die globale Struktur des Tangentialbündels einer glatten  $n$ -Mannigfaltigkeit *nicht* trivial. In solchen Fällen muss dann also sehr sorgfältig mit den lokalen Identifikationen der Tangentialräume mit  $\mathbb{R}^n$  umgegangen werden. Dies trifft zum Beispiel auf  $S^2$  zu (Kapitel 4.6).

### 4.1.3 Riemannsche Metriken

Die Grundidee riemannscher Mannigfaltigkeiten ist es, zusätzlich, auf jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt zu wählen (und zwar so, dass das Skalarprodukt stetig vom Basispunkt abhängt). Ist  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ , so ist eine *riemannsche Metrik*  $g = (g_x)_{x \in M}$  eine Familie von Skalarprodukten  $g_x$  auf  $T_x M$ . Man nennt dann  $(M, g)$  eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Genauer gesagt geht man wie folgt vor: Zu einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  bezeichne  $\text{SKP}(V)$  die Menge aller Skalarprodukte auf  $V$ . Die Standardtopologie auf  $V$  induziert dann auch eine Topologie auf  $\text{SKP}(V)$ , zum Beispiel durch punktweise Konvergenz. Diese Konstruktion für glatte Mannigfaltigkeiten kann zu einem Bündel  $p: \text{SKP}(TM) \rightarrow M$

erweitert werden. Eine *riemannsche Metrik auf  $M$*  ist dann eine stetige Abbildung  $g: M \rightarrow \text{SKP}(TM)$  mit  $p \circ g = \text{id}_M$ .

Ist  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so können wir zu  $x \in M$  für Vektoren im Tangentialraum  $T_x M$  Längen und Winkel definieren. Insbesondere können wir so auch wieder Winkel zwischen glatten Kurven definieren, die im selben Punkt beginnen.

Indem wir Satz 3.2.4 rückwärts interpretieren, erhalten wir einen Längenbegriff für glatte Kurven in riemannschen Mannigfaltigkeiten:

**Definition 4.1.4** (Länge von Kurven in riemannschen Mannigfaltigkeiten). Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Dann ist die (*riemannsche*) *Länge von  $\gamma$  in  $(M, g)$*  definiert durch

$$L_{(M,g)}(\gamma) := \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

**Beispiel 4.1.5** (euklidische Ebene). Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  offen. Wir fassen  $M$  wie in Beispiel 4.1.2 als glatte Mannigfaltigkeit auf. Dann ist  $g := (g_x)_{x \in M}$  mit

$$\begin{aligned} g_x: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, v') &\mapsto v_1 \cdot v'_1 + v_2 \cdot v'_2 \end{aligned}$$

für alle  $x \in M$  eine riemannsche Metrik auf  $M$ , die euklidische riemannsche Metrik. In diesem Fall erhalten wir auf  $M$  denselben Begriff von Kurvenlänge wie in der klassischen euklidischen Geometrie (Satz 3.2.4).

#### 4.1.4 Metriken aus riemannschen Metriken

Was haben riemannsche Metriken mit gewöhnlichen Metriken zu tun? Auf einer zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  können wir eine Metrik definieren, indem wir die Länge glatter Kurven zwischen zwei Punkten minimieren:

$$\begin{aligned} d: M \times M &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto \inf \{ L_{(M,g)}(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } M \text{ von } x \text{ nach } y \}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass dies tatsächlich eine Metrik auf  $M$  definiert und dass die von dieser Metrik induzierte Topologie auf  $M$  mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt [40, Theorem 1.5.13]. Außerdem stimmt auch die metrische Länge glatter Kurven bezüglich dieser Metrik mit der riemannschen Länge aus Definition 4.1.4 überein.

**Caveat 4.1.6** (riemannscher Abstand in offenen Untermannigfaltigkeiten). Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine offene zusammenhängende Teilmenge. Wir fassen  $M$  wie in Beispiel 4.1.5 als riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Dann ist die von der

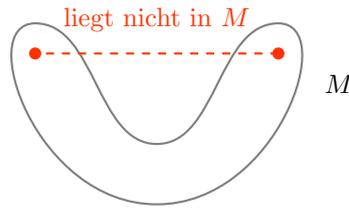


Abbildung 4.2.: Warum die Metrik der riemannschen Metrik größere Abstände liefert als die euklidische Metrik

riemannschen Metrik auf  $M$  induzierte Metrik auf  $M$  im allgemeinen *nicht* die euklidische Metrik (Abbildung 4.2).

## 4.2 Konstruktion der hyperbolischen Ebene

Wir konstruieren nun die hyperbolische Ebene als riemannsche Mannigfaltigkeit. Dazu betrachten wir das sogenannte Halbebenen-Modell. In der Kurzfassung lautet die Definition der hyperbolischen Ebene folgendermaßen: Die hyperbolische Ebene ist die obere Halbebene in  $\mathbb{R}^2$  mit der riemannschen Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Im folgenden erweitern wir dies zu einer präzisen Definition:

**Definition 4.2.1** (obere Halbebene). Wir schreiben

$$H := \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

für die *obere Halbebene*. Je nach Situation werden wir  $H$  auch mit der entsprechenden Teilmenge in  $\mathbb{C}$  identifizieren:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \\ (x, y) &\longmapsto x + i \cdot y \\ (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) &\longleftrightarrow z \end{aligned}$$

**Definition 4.2.2** (hyperbolische Ebene). Die *hyperbolische Ebene*  $\mathbb{H}^2$  ist die riemannsche Mannigfaltigkeit  $(H, g_H)$ , wobei

- wir  $H$  wie in Beispiel 4.1.2 als glatte Mannigfaltigkeit auffassen
- und  $g_H := (g_{Hz})_{z \in H}$  die riemannsche Metrik auf  $H$  mit

$$g_{H(x,y)}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, v') \longmapsto \frac{1}{y^2} \cdot \langle v, v' \rangle$$

für alle  $(x, y) \in H$  ist (wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  ist).

Ist  $z \in H$ , so schreiben wir auch  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H,z}$  für  $g_{Hz}$  und  $\| \cdot \|_{H,z}$  für die von  $g_{Hz}$  induzierte Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

In anderen Worten: in Abhängigkeit vom Punkt  $(x, y) \in H$  ist das Skalarprodukt auf dem Tangentialraum an  $(x, y)$  das um  $1/y^2$  skalierte Standardskalarprodukt.

**Fingerübung 4.2.3.** Sei  $y \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wir interpretieren  $v := (1, 0), w := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  als Vektoren in  $T_{i \cdot y} H$  und  $u := (1, 0) \in \mathbb{R}^2$  als Vektor in  $T_{i \cdot y + 2021} H$ .

1. Was ist  $\|v\|_{H, i \cdot y}$  ?

**Hinweis**

2. Was ist  $\|w\|_{H, i \cdot y}$  ?

**Hinweis**

3. Was ist  $\|u\|_{H, i \cdot y + 2021}$  ?

**Hinweis**

4. Sind  $v$  und  $w$  orthogonal bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H, i \cdot y}$  ?

**Ja** **Nein**

**Bemerkung 4.2.4** (Ableitung). Da die glatte Struktur von  $H$  von  $\mathbb{R}^2$  induziert ist, können wir Ableitungen von und nach  $H$  wie in der klassischen mehrdimensionalen Analysis berechnen. Um den Basispunkt etwas deutlicher hervorzuheben, werden wir für glatte Abbildungen  $f: H \rightarrow H$  für die Ableitung/das Differential im Punkt  $z \in H$  die Mannigfaltigkeits-Notation  $T_z f: T_z H = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = T_{f(z)} H$  verwenden.

## 4.3 Länge von Kurven

Mithilfe der riemannschen Metrik auf  $\mathbb{H}^2$  können wir die Länge glatter Kurven in der hyperbolischen Ebene und somit auch eine Metrik auf der hyperbolischen Metrik definieren. Zusätzlich geben wir einfache Abschätzungen der Länge an, die bei der weiteren Untersuchung der hyperbolischen Ebenen nützlich sein werden.

**Definition 4.3.1** (hyperbolische Länge einer Kurve). Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  eine glatte Kurve. Dann ist die *hyperbolische Länge von  $\gamma$*  definiert durch

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) := \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\|_{H, \gamma(t)} dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dabei ist  $\dot{\gamma}(t) = T_t \gamma(1) \in T_{\gamma(t)} H$  und unter der kanonischen Identifikation  $T_{\gamma(t)} H = \mathbb{R}^2$  stimmt dies mit der gewöhnlichen Ableitung  $\dot{\gamma}(t)$  aus Bemerkung 3.2.2 überein.

**Anmerkung zum Lernen.** Vergleichen Sie die Definition und die nachfolgenden Überlegungen mit Satz 3.2.4!

Um ein Gefühl für die Länge von Kurven in  $\mathbb{H}^2$  zu bekommen, ist es hilfreich, sich zu vergegenwärtigen, dass die Definition der riemannschen Metrik  $g_H$  dazu führt, dass Kurven, die in der Halbebene „weiter oben“ verlaufen, eine ? Länge haben werden: Die Länge der Tangentialvektoren wird dabei ja bezüglich einer Norm gemessen, die um einen kleineren Faktor skaliert wird.

**Proposition 4.3.2** (triviale Abschätzung). Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow H$  eine glatte Kurve. Sei

$$\begin{aligned} m &:= \min\{\operatorname{Im} \gamma(t) \mid t \in [T_0, T_1]\} \in \mathbb{R}_{>0}, \\ M &:= \max\{\operatorname{Im} \gamma(t) \mid t \in [T_0, T_1]\} \in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{m} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq \frac{1}{M} \cdot d_2(\gamma(T_0), \gamma(T_1)).$$

**Fingerübung 4.3.3.** Skizzieren Sie diese Situation!

*Beweis.* Da  $\gamma$  stetig ist, sind  $m$  und  $M$  wohldefiniert und positiv. Aus der Definition der hyperbolischen Metrik erhalten wir

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) &= \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\|_{H, \gamma(t)} dt && \text{(Definition von } L_{\mathbb{H}^2}\text{)} \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(t)} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt && \text{(Definition von } \|\cdot\|_{H, \gamma(t)}\text{)} \\ &\geq \frac{1}{M} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt && \text{(Definition von } M\text{)} \\ &= \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma), && \text{(Satz 3.2.4)} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 3.2.4 angewendet haben. Mit Proposition 2.3.3 folgt  $L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \geq d_2(\gamma(T_0), \gamma(T_1))$ . Analog zeigt man die obere Abschätzung (nachrechnen!).  $\square$

**Proposition 4.3.4** (vertikale Abschätzung). *Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow H$  eine glatte Kurve. Sei außerdem  $p := i \cdot \text{Im}: H \rightarrow H$  die Projektion auf den imaginären Anteil.*

1. Dann gilt  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma)$  und Gleichheit liegt genau dann vor, wenn  $\text{Re } \gamma$  konstant ist.
2. Außerdem ist

$$L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma) \geq \left| \ln \text{Im } \gamma(T_1) - \ln \text{Im } \gamma(T_0) \right|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn die Ableitung von  $\text{Im } \gamma$  das Vorzeichen nicht ändert.

**Fingerübung 4.3.5.** Skizzieren Sie diese Situation!

*Beweis.* Zu 1. Die Abbildung  $p$  ist glatt und für alle  $z \in H$  gilt

$$\begin{aligned} T_z p: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto ? \end{aligned}$$

Also ist auch  $\tilde{\gamma} := p \circ \gamma = i \cdot \text{Im } \gamma$  glatt und für alle  $t \in [T_0, T_1]$  ist (Kettenregel und Pythagoras in den Tangentialräumen; nachrechnen!)

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_{H, \tilde{\gamma}(t)} &= \frac{1}{\text{Im } \tilde{\gamma}(t)} \cdot \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_2 = \frac{1}{\text{Im } \gamma(t)} \cdot \|(T_{\gamma(t)} p)(\dot{\gamma}(t))\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\text{Im } \gamma(t)} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} \end{aligned}$$

und Gleichheit liegt nur dann vor, wenn die erste Koordinate von  $\dot{\gamma}$  konstant 0 ist; letzteres ist dazu äquivalent, dass die Abbildung  $\text{Re } \gamma$  konstant ist. Also folgt  $L_{\mathbb{H}^2}(\tilde{\gamma}) \leq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$  und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\text{Re } \gamma$  konstant ist. Damit ist der erste Teil gezeigt.

Zu 2. Im Beweis des zweiten Teiles schreiben wir kurz  $f := \text{Im } \gamma = \text{Im } p \circ \gamma$ . Nach Definition und wegen  $f > 0$  ist

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma) &= \int_{T_0}^{T_1} \|(p \circ \gamma)'(t)\|_{H, \gamma(t)} dt = \int_{T_0}^{T_1} \frac{|\dot{f}(t)|}{f(t)} dt \\ &\geq \left| \int_{T_0}^{T_1} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} dt \right| = ? \\ &= \left| \ln f(T_1) - \ln f(T_0) \right|. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt in der obigen Abschätzung genau dann, wenn  $\dot{f}$  das Vorzeichen nicht ändert. Damit ist auch der zweite Teil gezeigt.  $\square$

Wir definieren aus der Länge von Kurven eine Metrik auf  $\mathbb{H}^2$ :

**Proposition 4.3.6** (Metrik auf  $\mathbb{H}^2$ ). *Wir definieren*

$$d_H: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(z, z') \longmapsto \inf\{L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } H \text{ von } z \text{ nach } z'\}.$$

*Dies ist eine Metrik auf  $H$ .*

*Beweis. Definitheit.* Die Tatsache, dass  $d_H(z, z') = 0$  genau dann gilt, wenn  $z = z'$  ist, folgt aus den Abschätzungen in Proposition 4.3.2 und Proposition 4.3.4 (Übungsaufgabe).

*Symmetrie.* Umgekehrtes Durchlaufen von Kurven zeigt mithilfe des Transformationssatzes, dass  $d_H$  symmetrisch ist (nachrechnen!).

*Dreiecksungleichung.* Seien  $z, z', z'' \in H$  und seien  $\gamma: I \rightarrow H$  bzw.  $\gamma': I' \rightarrow H$  glatte Kurven von  $z$  nach  $z'$  bzw. von  $z'$  nach  $z''$ . Es ist nicht schwer, daraus eine Kurve  $\gamma''$  von  $z$  nach  $z''$  zu konstruieren, indem man zuerst  $\gamma$  und dann  $\gamma'$  durchläuft (und die Intervalle  $I$  bzw.  $I'$  geeignet zu einem Intervall in  $\mathbb{R}$  zusammensetzt/verschiebt). Eine kleine technische Schwierigkeit dabei ist, dass diese neue Kurve im allgemeinen *nicht* glatt sein wird (an der Nahtstelle  $z'$ ). Klassische Glättungstricks zeigen jedoch, dass es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine glatte Kurve  $\eta: J \rightarrow H$  von  $z$  nach  $z''$  mit

$$L_{\mathbb{H}^2}(\eta) \leq L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) + L_{\mathbb{H}^2}(\gamma') + \varepsilon$$

gibt. Indem man nun zum Infimum übergeht, erhält man die gewünschte Dreiecksungleichung  $d_H(z, z'') \leq d_H(z, z') + d_H(z', z'')$ .

Alternativ kann man auch die Länge von Kurven etc. für stückweise glatte Kurven betrachten und das Problem an dieser Stelle somit umgehen.  $\square$

**Bemerkung 4.3.7** (induzierte Topologie). Ähnliche Argumente wie für den Beweis der Definitheit von  $d_H$  zeigen auch: Die Topologie auf  $H$ , die von  $d_H$  induziert wird, stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $H$  überein; d.h. Teilmengen in  $H$  sind genau dann bezüglich  $d_H$  offen, wenn sie bezüglich  $d_2$  offen sind.

**Satz 4.3.8** (hyperbolische Länge vs. metrische Länge). *Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow H$  eine glatte Kurve. Dann gilt*

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H, d_H)}(\gamma).$$

*Beweis.* Die Ungleichung  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H, d_H)}(\gamma)$  folgt direkt aus der Definition von  $d_H$  und der metrischen Länge  $L_{(H, d_H)}$ .

Die umgekehrte Ungleichung  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H, d_H)}(\gamma)$  erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von  $d_H$ ),

um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit Satz 3.2.4 kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten. (Übungsaufgabe)  $\square$

Wir werden uns – analog zum euklidischen Fall – bei der Untersuchung der hyperbolischen Ebene von den folgenden Fragen leiten lassen:

**Frage 4.3.9.** Wie kann man die Metrik auf  $\mathbb{H}^2$  besser verstehen? D.h.:

- Welche Kurven in  $\mathbb{H}^2$  sind Geodäten?
- Welche Isometrien besitzt  $\mathbb{H}^2$  ?

Tatsächlich hängen diese Fragen alle miteinander zusammen und wir werden die Antworten dazu in Kapitel 4.4 simultan entwickeln. Als erstes Beispiel betrachten wir den folgenden Spezialfall:

**Proposition 4.3.10** (vertikale Geodäten). *Sei  $y \in \mathbb{R}_{>1}$ . Dann gibt es in  $\mathbb{H}^2$  genau eine [glatte]<sup>1</sup> Geodäte (bezüglich  $d_H$ ) von  $i$  nach  $i \cdot y$ , nämlich*

$$\begin{aligned} \gamma: [0, \ln y] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto i \cdot e^t. \end{aligned}$$

Für diese gilt  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ln y$ . Also ist  $d_H(i, i \cdot y) = \ln y$ .

*Beweis.* Wir gehen in folgenden Schritten vor:

- ① Wir bestimmen die Länge von (Teilkurven von)  $\gamma$ : Mit Proposition 4.3.4 folgt

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma|_{[t_0, t_1]}) = \ln e^{t_1} - \ln e^{t_0} = t_1 - t_0$$

für alle  $t_0, t_1 \in [0, \ln y]$  mit  $t_0 < t_1$ . Insbesondere ist  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ln y$ .

Alternativ lässt sich in diesem Fall die Länge natürlich auch direkt aus der Formel berechnen (nachrechnen!).

- ② Aus Proposition 4.3.4 folgt auch

$$d_H(i \cdot y_0, i \cdot y_1) \geq \ln y_1 - \ln y_0$$

für alle  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $y_1 > y_0$ . Zusammen mit Schritt ① erhalten wir somit für alle  $y_1, y_0 \in [1, y]$  mit  $y_1 > y_0$ , dass

$$d_H(i \cdot y_0, i \cdot y_1) = \ln y_1 - \ln y_0.$$

Insbesondere ist  $\gamma$  eine  $d_H$ -Geodäte von  $i$  nach  $i \cdot y$ .

<sup>1</sup>Die Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung der Glattheit; dies führt aber zu zusätzlichen Komplikationen, auf die wir an dieser Stelle verzichten wollen (Bemerkung 4.4.19).

- ③ Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei  $\eta: [0, L] \rightarrow H$  eine glatte Geodäte von  $i$  nach  $i \cdot y$  mit  $L \in \mathbb{R}_{>0}$ . Nach Schritt ② ist  $L = \ln y$ .

Wir zeigen zunächst, dass  $\operatorname{Re} \eta = 0$  ist: Es gilt (nach Satz 4.3.8 und Proposition 2.3.3)

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^2}(\eta) &= L_{(H, d_H)}(\eta) \\ &= d_H(\eta(0), \eta(L)) \\ &= L = \ln y \\ &= |\ln \operatorname{Im} \eta(L) - \ln \operatorname{Im} \eta(0)|. \end{aligned}$$

Mit der vertikalen Abschätzung (Proposition 4.3.4) erhalten wir somit, dass  $\operatorname{Re} \eta$  konstant ist und dass  $\operatorname{Im} \eta$  monoton ist; wegen  $\eta(0) = i$  und  $\eta(L) = i \cdot y$  folgt daraus, dass  $\operatorname{Re} \eta = 0$  und  $\operatorname{Im} \eta$  monoton wachsend (und mindestens 1) ist.

Da  $\eta$  eine Geodäte ist, erhalten wir für alle  $t \in [0, \ln y]$  mit Schritt ②

$$t - 0 = d_H(\eta(t), \eta(0)) = \ln \operatorname{Im} \eta(t) - \ln \operatorname{Im} \eta(0) = \ln \operatorname{Im} \eta(t),$$

und damit  $\eta(t) = i \cdot e^t = \gamma(t)$ .  $\square$

**Bemerkung 4.3.11** (vertikale geodätische Geraden). Analog kann man auch zeigen, dass es zu  $y, y' \in \mathbb{R}_{>0}$  genau eine [glatte] Geodäte in  $(H, d_H)$  von  $i \cdot y$  nach  $i \cdot y'$  gibt und dass es (bis auf Umparametrisierung) genau eine [glatte] geodätische Gerade in  $(H, d_H)$  gibt, die durch  $i \cdot y$  und  $i \cdot y'$  geht, nämlich  $\mathbb{R} \rightarrow H, t \mapsto i \cdot e^t$  (nachrechnen!).

## 4.4 Symmetrie

Wir werden im folgenden die Isometriegruppe und die Geodäten der hyperbolischen Ebene bestimmen. Es bietet sich dabei an, beides gleichzeitig zu untersuchen und wie bei einem Bootstrap-Verfahren die jeweils gewonnenen Erkenntnisse über Geodäten bzw. Isometrien zu verwenden, um Isometrien bzw. Geodäten besser zu verstehen.

### 4.4.1 Riemannsche Isometrien

Wir beginnen mit sogenannten riemannschen Isometrien, die eine analytische Quelle für metrische Isometrien sind. Nach Definition sind riemannsche Isometrien Diffeomorphismen, die auf den Tangentialräumen Isometrien bezüglich der riemannschen Metrik induzieren:

**Definition 4.4.1** (riemannsche Isometriegruppe). Eine *riemannsche Isometrie*  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  ist ein glatter Diffeomorphismus  $f: H \rightarrow H$  mit

$$\forall z \in H \quad \forall v, v' \in T_z H \quad \langle T_z f(v), T_z f(v') \rangle_{H, f(z)} = \langle v, v' \rangle_{H, z}.$$

Ein *glatter Diffeomorphismus* ist dabei .

Die *riemannsche Isometriegruppe von  $\mathbb{H}^2$*  ist die Menge  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  aller riemannschen Isometrien  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ , bezüglich Verknüpfung.

Es ist leicht zu sehen, dass  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  tatsächlich eine Gruppe bildet (nachrechnen!).

**Proposition 4.4.2** (riemannsche Isometrien sind Isometrien). *Jede riemannsche Isometrie  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  ist eine metrische Isometrie bezüglich  $d_H$ . Wir erhalten so einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\text{Isom}(\mathbb{H}^2) \rightarrow \text{Isom}(H, d_H).$$

*Beweis.* Sei  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  eine riemannsche Isometrie. Aus der Definition der hyperbolischen Länge von glatten Kurven  $\gamma$  in  $H$  und der Kettenregel folgt  $L_{\mathbb{H}^2}(f \circ \gamma) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$  (nachrechnen!). Dies liefert

$$d_H(f(z), f(z')) \leq d_H(z, z')$$

für alle  $z, z' \in H$ . Wendet man dasselbe Argument auf das Inverse von  $f$  an, so folgt die Behauptung.  $\square$

Wir werden sehen, dass alle metrischen Isometrien von  $\mathbb{H}^2$  bereits riemannsche Isometrien sind (Satz 4.4.27). Dies gilt auch allgemeiner für vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten (erfordert aber fortgeschrittenere Techniken) [36].

## 4.4.2 Möbiustransformationen

Als nächsten Schritt betrachten wir eine explizite Klasse von Isometrien der hyperbolischen Ebene, die Möbiustransformationen.

**Definition 4.4.3.** Wir schreiben

$$\begin{aligned} \text{SL}(2, \mathbb{R}) &:= \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \\ \text{PSL}(2, \mathbb{R}) &:= \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{E_2, -E_2\} \end{aligned}$$

(wobei  $E_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  die Einheitsmatrix ist).

Man beachte dabei, dass  $\{E_2, -E_2\}$  ein Normalteiler in  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  ist (nachrechnen!) und somit  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  die Gruppenstruktur von  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  erbt. Die Gruppen  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  und  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  wirken auf folgende Weise auf  $H$ :

**Proposition 4.4.4** (Möbiustransformationen). *Zu*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

betrachten wir die assoziierte Möbiustransformation

$$\begin{aligned} f_A: H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Für alle  $z \in H$  ist  $\mathrm{Im} f_A(z) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im} z$ .
2. Die Abbildung  $f_A$  ist wohldefiniert und ein glatter Diffeomorphismus.
3. Es ist  $f_{E_2} = \mathrm{id}_H = f_{-E_2}$ .
4. Für alle  $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  gilt  $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$ .

*Beweis.* Ad 1. Dies ist eine elementare Rechnung in den komplexen Zahlen: Sei  $z \in H$ . Wegen  $a \cdot d - b \cdot c = \det A = 1$  und  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathrm{Im}(\bar{z} + z) = 0$  gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_A(z)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(a \cdot z + b) \cdot (c \cdot \bar{z} + d)}{|c \cdot z + d|^2}\right) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im}(ac \cdot z \cdot \bar{z} + bc \cdot \bar{z} + ad \cdot z + bd) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im}(bc \cdot (\bar{z} + z) + z) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im} z. \end{aligned}$$

Ad 2. Man beachte, dass die Nennernullstellen in  $\mathbb{R}$  liegen, dass aber  $H$  keine Punkte aus  $\mathbb{R}$  enthält. Aus dem ersten Teil folgt  $f_A(H) \subset H$ . Also ist  $f_A: H \rightarrow H$  eine wohldefinierte Abbildung. Aus der Funktionentheorie ist außerdem bekannt, dass  $f_A$  glatt ist (aufgefasst als Funktion zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ ). Dass  $f_A$  ein Diffeomorphismus ist, ist eine Konsequenz von Teil 3/4; das Inverse ist nämlich nach Teil 3/4 durch  $f_{A^{-1}}$  gegeben.

Ad 3. Dies folgt direkt aus der Definition.

Ad 4. Die behauptete Gleichheit folgt durch einfaches Nachrechnen.  $\square$

**Beispiel 4.4.5** (einfache Möbiustransformationen). Als erstes Beispiel betrachten wir die folgenden Möbiustransformationen:

- Sei  $b \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Möbiustransformation zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

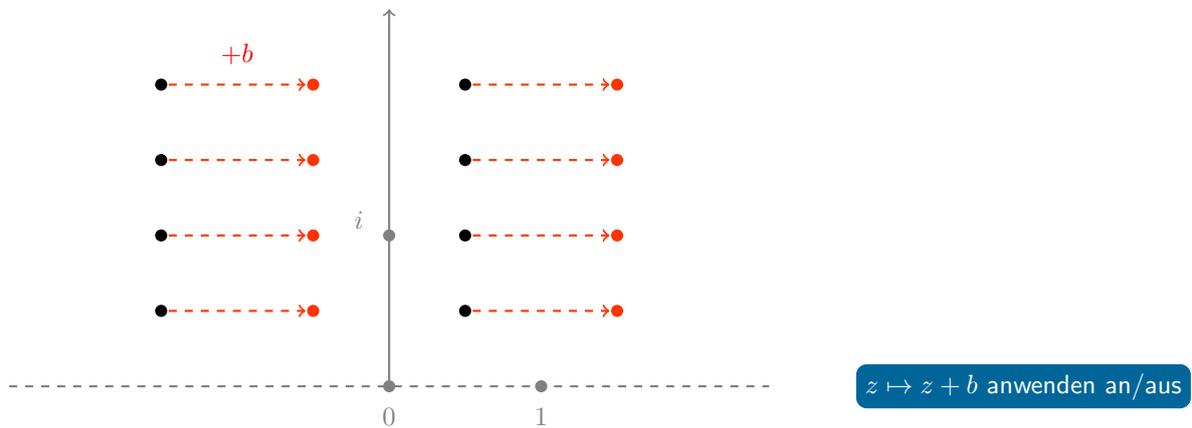


Abbildung 4.3.: Die Möbiustransformation  $z \mapsto z + b$  auf  $H$  zu  $b \in \mathbb{R}$ .

die ? (Abbildung 4.3).

- Sei  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist die Möbiustransformation zur Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

die ?

- Die Möbiustransformation zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

ist die ? (Abbildung 4.4), die offenbar zu sich selbst invers ist. Diese Abbildung ist mit der Inversion am Kreis aus der Elementargeometrie verwandt.

**Bemerkung 4.4.6** (ein einfaches Erzeugendensystem). Aus der linearen Algebra wissen wir, dass man mithilfe der Matrizen aus Beispiel 4.4.5 genügend Zeilen- und Spaltenoperationen simulieren kann, um jede Matrix aus  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  in die Einheitsmatrix zu transformieren. Daraus folgt, dass  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  von der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

erzeugt wird (nachrechnen!).

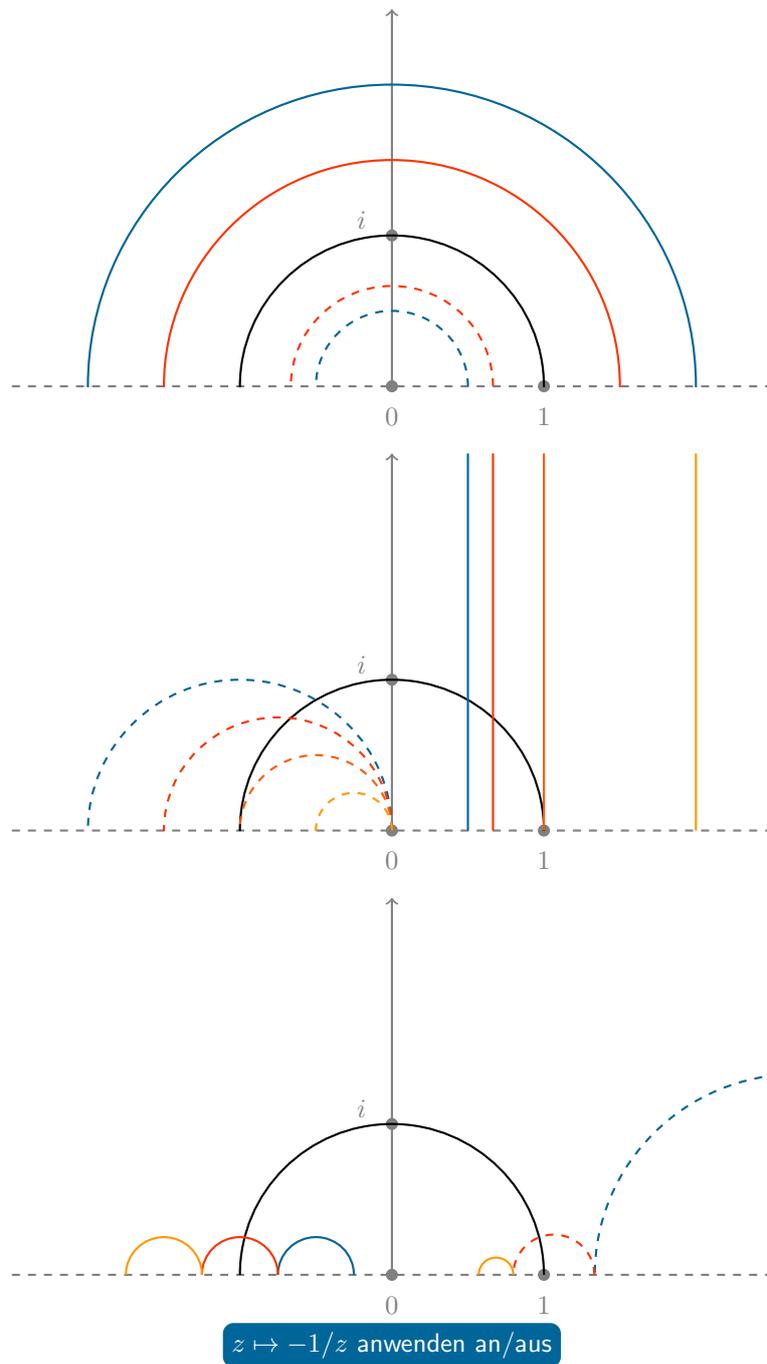


Abbildung 4.4.: Die Möbiustransformation  $z \mapsto -1/z$  auf  $H$ ; Objekte derselben Farbe werden aufeinander abgebildet

**Proposition 4.4.7** (Möbiustransformationen sind Isometrien). *Ist  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , so ist die Möbiustransformation  $f_A: H \rightarrow H$  eine riemannsche Isometrie von  $\mathbb{H}^2$ . Insbesondere erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(H, d_H) \\ [A] &\longmapsto f_A. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Nach Proposition 4.4.4 ist  $f_A: H \rightarrow H$  ein glatter Diffeomorphismus und eine Rechnung zeigt, dass  $f_A$  nur dann  $\mathrm{id}_H$  ist, wenn  $A \in \{E_2, -E_2\}$  ist (nachrechnen!).

Es bleibt daher nur die Verträglichkeit mit der riemannschen Metrik zu zeigen: Ist  $z \in H$ , so folgt mit den Methoden der Funktionentheorie und  $1 = \det A = a \cdot d - b \cdot c$ , dass

$$\begin{aligned} T_z f_A: T_z H &\longrightarrow T_{f(z)} H \\ v &\longmapsto \frac{a \cdot (c \cdot z + d) - (a \cdot z + b) \cdot c}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v = \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v \end{aligned}$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite die komplexe Multiplikation unter der kanonischen Identifikation  $T_z H = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  bzw.  $T_{f(z)} H = \mathbb{C}$  ist (nachrechnen!). Mit dem ersten Teil von Proposition 4.4.4 folgt somit für alle  $v, v' \in T_z H$ :

$$\begin{aligned} \langle T_z f_A(v), T_z f_A(v') \rangle_{H, f_A(z)} &= \left\langle \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v, \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v' \right\rangle_{H, f_A(z)} \\ &= \frac{1}{(\mathrm{Im} f_A(z))^2} \cdot \left\langle \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v, \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v' \right\rangle \\ &= \frac{1}{(\mathrm{Im} f_A(z))^2} \cdot \mathrm{Re} \left( \frac{1}{(c \cdot z + d)^2} \cdot v \cdot \frac{1}{(\overline{c \cdot z + d})^2} \cdot \overline{v'} \right) \\ &= \frac{|c \cdot z + d|^4}{(\mathrm{Im} z)^2} \cdot \frac{1}{|c \cdot z + d|^4} \cdot \mathrm{Re}(v \cdot \overline{v'}) \\ &= \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2} \cdot \langle v, v' \rangle \\ &= \langle v, v' \rangle_{H, z}. \end{aligned}$$

Also ist  $f_A$  eine riemannsche Isometrie von  $\mathbb{H}^2$ .

Alternativ hätte es nach Bemerkung 4.4.6 auch genügt, zu zeigen, dass die horizontalen Translationen sowie die Inversion am Kreis mit der riemannschen Metrik verträglich sind (nachrechnen!).  $\square$

Insbesondere bilden Möbiustransformationen Geodäten in  $(H, d_H)$  auf Geodäten in  $(H, d_H)$  ab (Proposition 2.3.4).

**Bemerkung 4.4.8** (Gruppenoperation). In der Sprache der Gruppenoperationen besagt Proposition 4.4.7, dass die Gruppen  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  bzw.  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  via Möbiustransformationen isometrisch auf  $(H, d_H)$  operieren (nachrechnen!).

### 4.4.3 Transitivität der Möbiustransformationen

Wir zeigen, dass uns Möbiustransformationen erlauben, Situationen in der hyperbolischen Ebene auf Situationen um die imaginäre Achse zurückzuführen. Genauer gesagt, werden wir Transitivitätseigenschaften und Stabilisatorgruppen von Möbiustransformationen untersuchen.

Mithilfe von Möbiustransformationen können wir von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt der hyperbolischen Ebene gelangen:

**Proposition 4.4.9** (Transitivität der Möbiustransformationen I). *Die Operation von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  auf  $H$  durch Möbiustransformationen ist transitiv, d.h. für alle  $z, z' \in H$  gibt es eine Matrix  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  mit*

$$z' = f_A(z).$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass wir von jedem Punkt in  $H$  zu  $i$  gelangen können, denn:

Sei  $z \in H$  und sei  $x := \mathrm{Re}(z)$ ,  $y := \mathrm{Im}(z)$ . Indem wir  $z$  horizontal um  $-x$  verschieben, erhalten wir einen Punkt auf der imaginären Achse; eine sogenannte diagonale Isometrie mit Faktor  $1/\sqrt{y}$  entlang der imaginären Achse bildet diesen Punkt dann auf  $i$  ab. Genauer: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann gilt  $f_A(z) = i$ , wie eine kleine Rechnung zeigt (nachrechnen!).  $\square$

Als Gegenstück dazu bestimmen wir die Untergruppe der Möbiustransformationen, die den Punkt  $i$  nicht bewegen:

**Proposition 4.4.10** (Stabilisator von  $i$ ). *Sei*

$$\mathrm{Stab}_i := \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}$$

der Stabilisator von  $i$  unter der Möbiustransformationsoperation auf  $H$ . Dann gilt

$$\text{Stab}_i = \text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2 \cdot \pi) \right\}.$$

*Beweis.* Dies ist eine einfache Rechnung (Übungsaufgabe).  $\square$

**Bemerkung 4.4.11** (die hyperbolische Ebene als homogener Raum). Nach Proposition 4.4.9 und 4.4.10 können wir die hyperbolische Ebene auch als einen sogenannten homogenen Raum auffassen, nämlich als

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) / \text{SO}(2).$$

Indem man eine geeignete riemannsche Metrik auf  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  einführt, kann man durch diese Beschreibung auch die Geometrie der hyperbolischen Ebene definieren und untersuchen. Der Vorteil an dieser Interpretation ist, dass  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  und  $\text{SO}(2)$  Gruppen sind, und somit zusätzliche Struktur besitzen, die man an einigen Stellen gut verwenden kann. Tatsächlich ist es genau diese Struktur, die wir im folgenden ausgiebig implizit nutzen werden.

Um die Geodäten der hyperbolischen Ebene zu verstehen, benötigen wir die folgende, stärkere, Transitivitätseigenschaft von Möbiustransformationen:

**Proposition 4.4.12** (Transitivität der Möbiustransformationen II). *Seien  $z, z' \in H$  mit  $z \neq z'$ . Dann gibt es  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  mit*

$$f_A(z) = i \quad \text{und} \quad \text{Re}(f_A(z')) = 0, \quad \text{Im}(f_A(z')) > 1.$$

D.h. wir können je zwei Punkte der hyperbolischen Ebene durch eine gemeinsame Möbiustransformation auf die imaginäre Achse verschieben.

*Beweis.* Seien  $z, z' \in H$ . Nach Proposition 4.4.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $z = i$  ist und es genügt somit eine Matrix  $A \in \text{Stab}_i$  mit  $\text{Re} f_A(z') = 0$  und  $\text{Im} f_A(z') > 1$  zu finden.

Dazu betrachten wir die stetige Abbildung

$$R: [0, 2 \cdot \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \text{Re} \left( f \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} (z') \right).$$

Dann ist

$$R(0) = \text{Re}(f_{E_2}(z')) = \text{Re } z' \\ R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Re} \left( f \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (z') \right) = \text{Re} \left( -\frac{1}{z'} \right) = \frac{1}{|z'|^2} \cdot \text{Re}(z').$$

Ist  $\operatorname{Re}(z') \neq 0$ , so haben  $R(0)$  und  $R(\pi/2)$  verschiedene Vorzeichen. Nach dem **was wohl?** existiert somit ein  $\varphi \in [0, \pi/2)$  mit  $R(\varphi) = 0$ . Dies liefert eine Matrix  $A \in \operatorname{SO}(2) = \operatorname{Stab}_i$  mit  $\operatorname{Re}(f_A(z')) = 0$ .

Falls  $\operatorname{Im}(f_A(z')) < 1$  ist, so betrachtet man

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \in \operatorname{SO}(2) = \operatorname{Stab}_i$$

und erhält so sowohl  $\operatorname{Re}(f_B(z')) = \operatorname{Re}(f_A(z')) = 0$  als auch die Imaginärteilbedingung  $\operatorname{Im}(f_B(z')) = 1/|f_A(z')|^2 \cdot \operatorname{Im} f_A(z') > 1$ .  $\square$

#### 4.4.4 Geodäten der hyperbolischen Ebene

Wir bestimmen jetzt alle Geodäten der hyperbolischen Ebene. Dazu verwenden wir die Beschreibung vertikaler Geodäten und die Abbildungs- bzw. Transitivitätseigenschaften der Möbiustransformationen:

- Die Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten zwischen je zwei (verschiedenen) Punkten der hyperbolischen Ebene erhalten wir aus der Beschreibung der vertikalen Geodäten sowie der Transitivität der Möbiustransformationsoperation.
- Für die genaue geometrische Beschreibung verwenden wir die folgende Beobachtung: Möbiustransformationen bilden verallgemeinerte Halbkreise auf verallgemeinerte Halbkreise ab. Damit folgt, dass die Bilder der hyperbolischen Geodäten genau die verallgemeinerten Halbkreise der oberen Halbebene sind.

**Satz 4.4.13** (Charakterisierung hyperbolischer Geodäten). *Seien  $z, z' \in H$  mit  $z \neq z'$ .*

1. *Dann gibt es genau eine [glatte] Geodäte in  $(H, d_H)$  von  $z$  nach  $z'$ .*
2. *Und es gibt (bis auf Umparametrisierung<sup>2</sup> in  $\mathbb{R}$ ) genau eine [glatte] geodätische Gerade in  $(H, d_H)$ , die  $z$  und  $z'$  enthält.*

*Genauer: Ist  $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$  mit  $\operatorname{Re}(f_A(z)) = 0 = \operatorname{Re}(f_A(z')) = 0$ , so ist  $f_{A^{-1}} \circ (t \mapsto i \cdot e^t)$  eine geodätische Gerade durch  $z$  und  $z'$  und die [glatte] Geodäte von  $z$  nach  $z'$  ist ein Segment davon.*

*Beweis.* Da alle Möbiustransformationen [glatte] Isometrien sind (Proposition 4.4.7) und sehr transitiv auf der oberen Halbebene  $H$  operieren (Proposition 4.4.12), können wir uns auf den Fall zurückziehen, dass  $z = i$  und  $z' = i \cdot y$  mit  $y \in \mathbb{R}_{>1}$  ist. In diesem Fall folgt die Behauptung aus Proposition 4.3.10 bzw. Bemerkung 4.3.11.  $\square$

<sup>2</sup>D.h. via  $t \mapsto \varepsilon \cdot t + a$ , wobei  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  und  $a \in \mathbb{R}$  ist

**Bemerkung 4.4.14** (die hyperbolische Metrik, explizit). Man kann mit der Beschreibung aus Satz 4.4.13 und der Berechnung vertikaler Abstände (Proposition 4.3.4) auch eine explizite Formel für die Metrik  $d_H$  auf  $H$  herleiten: Für alle  $z, z' \in H$  gilt

$$d_H(z, z') = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z - z'|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z'}\right).$$

Dabei ist  $\operatorname{arccosh}$  die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}: \mathbb{R}_{\geq 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

des *Kosinus Hyperbolicus*

$$\begin{aligned} \cosh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(i \cdot x). \end{aligned}$$

Um hyperbolische Geodäten anschaulich noch besser zu verstehen, betrachten wir verallgemeinerte Halbkreise (Abbildung 4.5) und ihren Zusammenhang mit Möbiustransformationen.

**Fingerübung 4.4.15** (verallgemeinerter Halbkreis). Versuchen Sie selbst, mithilfe von Abbildung 4.5 eine Definition des Begriffs „verallgemeinerter Halbkreis“ (als Teilmenge von  $H$ ) zu geben!

**Definition 4.4.16** (verallgemeinerter Halbkreis). Ein *verallgemeinerter Halbkreis* ist eine Teilmenge  $K \subset H$  der folgenden Form:

- Es gibt ein  $m \in \mathbb{R}$  und ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $K = \{z \in H \mid |z - m| = r\}$  oder
- es gibt ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $K = \{a + i \cdot t \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ .

**Proposition 4.4.17** (Möbiustransformationen und Halbkreise). *Ist  $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ , so bildet die Möbiustransformation  $f_A: H \rightarrow H$  verallgemeinerte Halbkreise auf verallgemeinerte Halbkreise ab.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 4.4.6 genügt es, die Behauptung für Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $b \in \mathbb{R}$  und ihre Inversen zu zeigen. Im ersten Fall (horizontale Translation) ist dies klar; im zweiten Fall kann es durch Nachrechnen gezeigt werden (Übungsaufgabe). Man beachte dabei, dass die Inversen dieser beiden Typen von Matrizen Möbiustransformationen derselben Art liefern.  $\square$

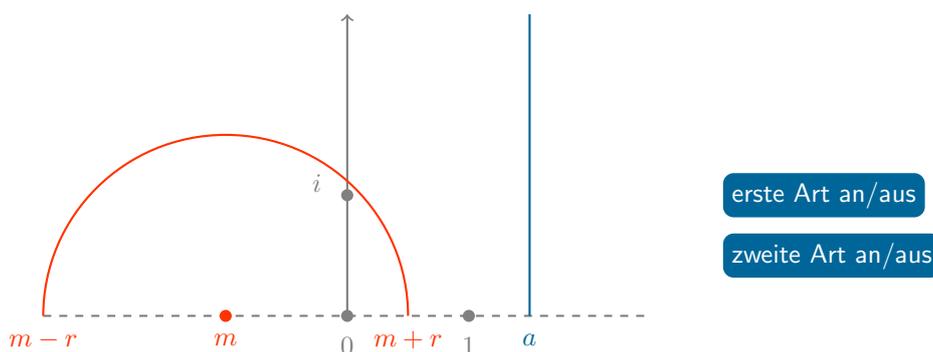


Abbildung 4.5.: Verallgemeinerte Halbkreise in der oberen Halbebene

**Korollar 4.4.18** (hyperbolische Geodäten sind verallgemeinerte Halbkreise). *Insbesondere sind [glatte] Geodäten bzw. geodätische Geraden in  $(H, d_H)$  genau die (korrekt parametrisierten) Segmente verallgemeinerter Halbkreise in  $H$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus der Charakterisierung hyperbolischer Geodäten in Satz 4.4.13 und der Verträglichkeit von Möbiustransformationen mit verallgemeinerten Halbkreisen (Proposition 4.4.17).  $\square$

**Bemerkung 4.4.19** (Glattheit hyperbolischer Geodäten). Wir können nun zeigen, dass die Charakterisierung vertikaler Geodäten (und damit aller Geodäten in  $(H, d_H)$ ) auch für allgemeine metrische Geodäten (und nicht nur für glatte) gilt; insbesondere sind alle Geodäten in  $(H, d_H)$  sogar glatt:

Sei  $y \in \mathbb{R}_{>1}$  und sei  $\eta: [0, L] \rightarrow H$  eine metrische Geodäte in  $(H, d_H)$  von  $i$  nach  $i \cdot y$ ; insbesondere ist  $L = \ln y$ .

- Wir zeigen zunächst  $\operatorname{Re} \eta = 0$ : *Angenommen*,  $\operatorname{Re} \eta \neq 0$ , d.h. es gibt ein  $t \in (0, L)$  mit  $\operatorname{Re}(\eta(t)) \neq 0$ . Nach Satz 4.4.13 gibt es eine glatte Geodäte  $\gamma_1: [0, t] \rightarrow H$  in  $(H, d_H)$  von  $i$  nach  $\eta(t)$  und eine glatte Geodäte  $\gamma_2: [0, L-t] \rightarrow H$  in  $(H, d_H)$  von  $\eta(t)$  nach  $i \cdot y$ . Sei  $p: H \rightarrow H$  die Projektionsabbildung aus Proposition 4.3.4. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 L &= t + L - t \\
 &= d_H(\gamma_1(0), \gamma_1(t)) + d_H(\gamma_2(t), \gamma_2(L)) \\
 &> d_H(p \circ \gamma_1(0), p \circ \gamma_1(t)) + d_H(p \circ \gamma_2(t), p \circ \gamma_2(L)) && \text{(Proposition 4.3.4; Satz 4.3.8)} \\
 &= |\ln \operatorname{Im} \gamma_1(t) - \ln \operatorname{Im} \gamma_1(0)| + |\ln \operatorname{Im} \gamma_2(L) - \ln \operatorname{Im} \gamma_2(t)| && \text{(Proposition 4.3.10)} \\
 &= |\ln \operatorname{Im} \eta(t) - \ln \operatorname{Im} \eta(0)| + |\ln \operatorname{Im} \eta(L) - \ln \operatorname{Im} \eta(t)| \\
 &\geq |\ln \operatorname{Im} \eta(L) - \ln \operatorname{Im} \eta(0)| \\
 &= \ln y = L,
 \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

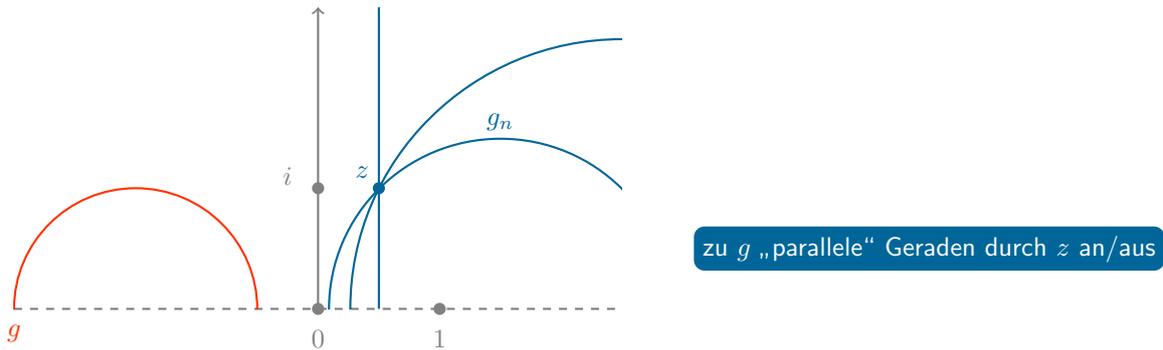


Abbildung 4.6.: Die hyperbolische Ebene erfüllt das Parallelenaxiom *nicht*

- Nach dem vorherigen Schritt ist  $\operatorname{Re} \eta = 0$ . Aus der Geodätenbedingung folgt direkt, dass  $\eta$  injektiv ist. Wegen  $\operatorname{Im} \eta(0) = 1$  und  $\operatorname{Im} \eta(L) = y$  und der Tatsache, dass Geodäten stetig sind, erhalten wir mit dem Zwischenwertsatz, dass  $\operatorname{Im} \eta$  streng monoton wachsend ist. Für alle  $t \in (0, L)$  gilt somit

$$t - 0 = d_H(\eta(t), \eta(0)) = \ln \operatorname{Im} \eta(t) - \ln \operatorname{Im} \eta(0) = \ln \operatorname{Im} \eta(t)$$

$$\text{bzw. } \eta(t) = i \cdot e^t.$$

Somit gilt die Eindeutigkeit aus Proposition 4.3.10 auch für allgemeine metrische Geodäten; analog erhält man auch die allgemeine Variante von Bemerkung 4.3.11.

**Bemerkung 4.4.20 (Parallelenaxiom).** Wir erhalten, dass  $(H, d_H)$  die folgende Version des Parallelenaxioms *nicht* erfüllt:

Zu jeder geodätischen Gerade  $g$  und zu jedem Punkt  $z$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es nur eine geodätische Gerade (bis auf Umparametrisierung), die durch  $z$  geht und  $g$  nicht schneidet.

Genauer gilt: Ist  $g: \mathbb{R} \rightarrow H$  eine geodätische Gerade in  $(H, d_H)$  und ist  $z \in H \setminus g(\mathbb{R})$ , so gibt es unendlich viele geodätische Geraden  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(H, d_H)$  mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $z \in g_n(\mathbb{R})$  und  $g_n(\mathbb{R}) \cap g(\mathbb{R}) = \emptyset$ .
- Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$  ist  $g_n(\mathbb{R}) \cap g_m(\mathbb{R}) = \{z\}$ .

Dies lässt sich leicht anhand der Charakterisierung von hyperbolischen geodätischen Geraden in  $(H, d_H)$  (Korollar 4.4.18) einsehen (Abbildung 4.6; nachrechnen!).

### 4.4.5 Winkel

Im nächsten Abschnitt werden wir die gesamte Isometriegruppe von  $(H, d_H)$  bestimmen. Dazu ist es günstig, Winkel als Hilfsmittel und Invariante zur Verfügung zu haben. Wie bei der Länge von Kurven und Isometrien gibt es auch bei Winkeln in der hyperbolischen Ebene zwei Varianten: riemannsche Winkel (definiert über die riemannsche Metrik, d.h. über das Skalarprodukt) und metrische Winkel (beschrieben durch die Metrik).

**Fingerübung 4.4.21** (Definition hyperbolischer Winkel). Bevor Sie weiterlesen: Versuchen Sie selbst, eine Definition hyperbolischer Winkel zwischen glatten Kurven in der hyperbolischen Ebene zu geben.

**Hinweis**

**Definition 4.4.22** (hyperbolischer Winkel). Seien  $\gamma_1: [0, L_1] \rightarrow H$  und  $\gamma_2: [0, L_2] \rightarrow H$  glatte Kurven in  $\mathbb{H}^2$  mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\dot{\gamma}_1(0) \neq 0 \neq \dot{\gamma}_2(0)$ . Dann definieren wir den *hyperbolischen Winkel zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$*  durch

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle_H(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)) := \arccos \frac{\langle \dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0) \rangle_{H, \gamma_1(0)}}{\|\dot{\gamma}_1(0)\|_{H, \gamma_1(0)} \cdot \|\dot{\gamma}_2(0)\|_{H, \gamma_2(0)}} \in [0, \pi].$$

**Fingerübung 4.4.23** (hyperbolischer Winkel). Seien  $u := (1, 0), v := (0, 1), w := (1, 1) \in T_i H$ . Bestimmen Sie die folgenden Winkel:

1.  $\sphericalangle_H(u, v) = ?$
2.  $\sphericalangle_H(v, w) = ?$
3.  $\sphericalangle_H(u, w) = ?$
4.  $\sphericalangle_H(v, -v) = ?$

Was ändert sich, wenn wir die entsprechenden Winkel berechnen, wenn wir  $u, v, w$  als Elemente von  $T_{2021 \cdot i + 2020} H$  auffassen?

**Hinweis**

**Bemerkung 4.4.24** (Winkeltreue des Halbebenenmodells). Ein Vorzug des Halbebenenmodells der hyperbolischen Ebene ist, dass es winkeltreu ist: Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  glatte Kurven in  $H$  mit gemeinsamem Startpunkt  $z$ , so gilt

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2),$$

da ja **warum?**

und somit dieselben Winkel definiert. Hyperbolische Winkel lassen sich im Halbebenenmodell also direkt als euklidische Winkel ablesen.

Wie in Ausblick 3.3.5 angedeutet können wir auch hyperbolische Winkel durch die hyperbolische Metrik ausdrücken; für uns wird die folgende, leicht vereinfachte, Version genügen:

**Proposition 4.4.25** (metrische Beschreibung hyperbolischer Winkel). *Seien  $\gamma_1: [0, L_1] \rightarrow H$ ,  $\gamma_2: [0, L_2] \rightarrow H$  Geodäten in  $(H, d_H)$  mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . Dann gilt*

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \arccos\left(1 - \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))^2}{2 \cdot t^2}\right).$$

*Beweis.* Aus der Charakterisierung der Geodäten in  $(H, d_H)$  (Satz 4.4.13 und Bemerkung 4.4.19) wissen wir, dass alle Geodäten in  $(H, d_H)$  glatt sind; insbesondere ist der hyperbolische Winkel tatsächlich definiert.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\gamma_1(0) = i = \gamma_2(0)$  gilt, denn: Sowohl der hyperbolische Winkel als auch der Ausdruck auf der rechten Seite sind invariant unter riemannschen Isometrien (nachrechnen!). Da die Möbiustransformationen transitiv auf  $H$  operieren (Proposition 4.4.9), können wir also den Basispunkt der beiden Kurven als  $i$  wählen.

Außerdem können wir ohne Einschränkung  $\dot{\gamma}_1(0) \neq \dot{\gamma}_2(0)$  annehmen, denn: Aus der Charakterisierung der Geodäten in  $(H, d_H)$  folgt nämlich, dass sonst bereits  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  auf dem Intervall  $[0, \min(L_1, L_2)]$  übereinstimmen, und in diesem Fall gilt die Behauptung offenbar.

Nach Definition des hyperbolischen Winkels und da  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H,i} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt ist, gilt

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle_H(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)) = \sphericalangle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)).$$

Aus der Charakterisierung der Geodäten in  $(H, d_H)$  folgt auch  $\|\dot{\gamma}_j(0)\|_{H,i} = \|\dot{\gamma}_j(0)\|_2 = 1$  für  $j \in \{1, 2\}$  (nachrechnen!). Also liefert die Definition der Winkel zusammen mit Polarisierung (Proposition 3.1.7), dass

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2^2\right).$$

Wir werden nun  $\|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2$  durch die hyperbolische Metrik ausdrücken: Mit der trivialen und der vertikalen Abschätzung (Proposition 4.3.2 und 4.3.4) erhalten wir: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es ein  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\forall t \in [0, T] \quad (1 - \varepsilon) \cdot d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq (1 + \varepsilon) \cdot d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Mit der Beschreibung der Ableitung  $\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)$  durch den Differentialquotienten folgt daher (nachrechnen!)

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2} \leq (1 + \varepsilon) \cdot \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2} = 1 + \varepsilon$$

und analog

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2} \geq 1 - \varepsilon.$$

Also ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} = \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2.$$

Setzen wir dies in die obige Beschreibung von  $\angle_H(\gamma_1, \gamma_2)$  ein, so erhalten wir mit **?** die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.4.26** (Isometrien der hyperbolischen Ebene sind winkeltreu). *Sei  $f \in \text{Isom}(H, d_H)$  und seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Geodäten in  $(H, d_H)$  mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . Dann gilt*

$$\angle_H(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle_H(\gamma_1, \gamma_2).$$

*Beweis.* Da  $f$  eine Isometrie ist, sind auch  $f \circ \gamma_1$  und  $f \circ \gamma_2$  Geodäten in  $(H, d_H)$  mit  $f \circ \gamma_1(0) = f \circ \gamma_2(0)$ . Mit der metrischen Beschreibung hyperbolischer Winkel (Proposition 4.4.25) folgt

$$\angle_H(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle_H(\gamma_1, \gamma_2). \quad \square$$

#### 4.4.6 Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene

Aus der Klassifikation der hyperbolischen Geodäten, der Winkeltreue hyperbolischer Isometrien und den Transitivitätseigenschaften der Möbiustransformationen können wir mit etwas Geschick die gesamte Isometriegruppe von  $(H, d_H)$  bestimmen:

**Satz 4.4.27** (die hyperbolische Isometriegruppe). *Die Gruppe  $\text{Isom}(H, d_H)$  wird von der Menge*

$$\{f_A \mid A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})\} \cup \{z \mapsto -\bar{z}\}$$

*erzeugt. Insbesondere sind alle Isometrien von  $(H, d_H)$  bereits glatte Diffeomorphismen und riemannsche Isometrien und  $\text{Isom}(H, d_H) = \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ .*

*Beweis.* Sei  $f \in \text{Isom}(H, d_H)$ .

- ① Nach Proposition 4.4.12 (und der Beschreibung der hyperbolischen Metrik auf der imaginären Achse) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $f(i) = i$  und  $f(2 \cdot i) = 2 \cdot i$  gilt.
- ② Da  $f$  als Isometrie geodätische Geraden auf geodätische Geraden abbildet, folgt mit der Charakterisierung vertikaler geodätischer Geraden (Bemerkung 4.3.11), dass dann bereits gilt:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}} f(i \cdot y) = i \cdot y$$

- ③ Da  $f$  als Isometrie insbesondere ein Homöomorphismus  $H \rightarrow H$  ist und  $H \setminus i \cdot \mathbb{R}_{>0}$  in die zwei (Weg)Zusammenhangskomponenten  $P := \{z \in H \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  und  $N := \{z \in H \mid \operatorname{Re} z < 0\}$  zerfällt, gilt

$$f(P) = P \quad \text{und} \quad f(N) = N$$

oder

$$f(P) = N \quad \text{und} \quad f(N) = P.$$

Indem wir im zweiten Fall die Isometrie ( $z \mapsto -\bar{z}$ ) (Spiegelung an der imaginären Achse) anwenden, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir uns im ersten Fall befinden.

- ④ Wir zeigen, dass  $f = \operatorname{id}_H$  ist: Sei  $z \in H$ . Ist  $\operatorname{Re} z = 0$ , so wissen wir bereits nach Schritt ②, dass  $f(z) = z$  ist. Wir betrachten nun den Fall, dass  $\operatorname{Re} z > 0$  ist (der Fall  $\operatorname{Re} z < 0$  geht völlig analog): Aus der Charakterisierung der geodätischen Geraden in  $(H, d_H)$  durch verallgemeinerte Halbkreise (Korollar 4.4.18) folgt: Es gibt (bis auf Umparametrisierung) genau eine geodätische Gerade  $g$  in  $H$ , die durch  $z$  geht und die vertikale geodätische Gerade ( $t \mapsto i \cdot e^t$ ) orthogonal schneidet; sei  $z'$  dieser Schnittpunkt (Abbildung 4.7).

Wir wenden die Isometrie  $f$  auf diese Situation an. Da  $f$  als Isometrie geodätische Geraden auf geodätische Geraden abbildet und winkeltreu ist (Korollar 4.4.26), folgt wegen  $f(z') = z'$ , dass  $(f \circ g)(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$  ist. Außerdem liegt  $f(z)$  auf  $f \circ g$  und es gilt

$$d_H(f(z), f(z')) = d_H(z, z');$$

wir können  $f(z')$  also finden, indem wir auf  $f \circ g = g$  von  $f(z') = z'$  aus die Länge  $d_H(f(z), f(z')) = d_H(z, z')$  zurücklegen. Wegen  $\operatorname{Re} z > 0$  ist nach Schritt ③ auch  $\operatorname{Re} f(z) > 0$ . Also ist  $f(z) = z$ .

Aus den obigen Schritten folgt, dass wir die ursprüngliche Isometrie  $f$  als Produkt von Möbiustransformationen bzw. der Spiegelung ( $z \mapsto -\bar{z}$ ) schreiben können. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.4.28** (orientierungserhaltende Isometrien der hyperbolischen Ebene). Analog zeigt man, dass die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von  $(H, d_H)$  zu  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  isomorph ist: Wir nennen  $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$  *orientierungserhaltend*, wenn  $\det T_z f > 0$  für alle  $z \in H$  gilt. Sei  $\operatorname{Isom}^+(H, d_H)$  die Gruppe(!) der orientierungserhaltenden Isometrien von  $(H, d_H)$ . Dann zeigt der Beweis von Satz 4.4.27, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \operatorname{Isom}^+(H, d_H) \\ [A] &\longmapsto f_A \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist.

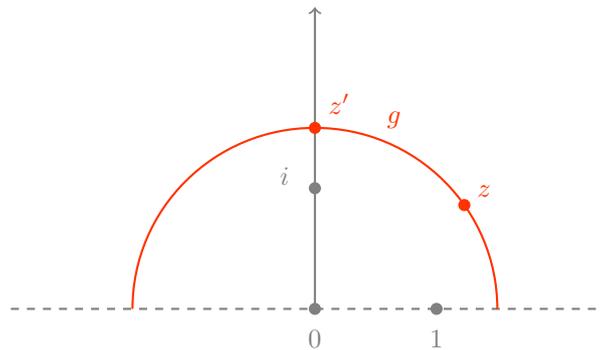


Abbildung 4.7.: Orthogonale geodätische Geraden und Isometrien

**Bemerkung 4.4.29** (Unabhängigkeit des Parallelenaxioms). Mit den bisher entwickelten Techniken kann man zeigen, dass die Geometrie der hyperbolischen Ebene alle Hilbertschen Axiome bis auf das Parallelenaxiom erfüllt; dazu müssen natürlich die Begriffe „Geraden“ etc. in der hyperbolischen Ebene korrekt interpretiert werden. Andererseits erfüllt die euklidische Geometrie alle Hilbertschen Axiome (inklusive Parallelenaxiom). Also ist das Parallelenaxiom von den restlichen Axiomen von Hilbert unabhängig.

## 4.5 Hyperbolische Dreiecke

Wir illustrieren die Eigenschaften der hyperbolischen Geometrie anhand von geodätischen Dreiecken in der hyperbolischen Ebene. Insbesondere werden wir sehen, dass sich die Geometrie der hyperbolischen Dreiecke essentiell von der Geometrie der euklidischen Dreiecke unterscheidet:

- Im Gegensatz zu euklidischen geodätischen Dreiecken ist der Flächeninhalt hyperbolischer geodätischer Dreiecke beschränkt.
- Dieses Phänomen hängt eng damit zusammen, dass die Winkelsumme hyperbolischer geodätischer Dreiecke *nicht* konstant und stets kleiner als  $\pi$  ist (Satz von Gauß-Bonnet; Satz 4.5.4). Insbesondere wird dies zeigen, dass die hyperbolische Ebene und die euklidische Ebene *nicht* lokal isometrisch sind.
- Die dadurch verfügbare Flexibilität führt dazu, dass es in der hyperbolischen Ebene „mehr“ reguläre Polygone und mehr reguläre Pflasterungen gibt und dass andere Kongruenzsätze gelten.

### 4.5.1 Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet

Wir beginnen mit der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts über die riemannsche Metrik bzw. ein geeignetes Integral. Bei der Definition ist zu berücksichtigen, dass wir die Abweichung des lokalen hyperbolischen Skalarprodukts vom Standardskalarprodukt durch einen geeigneten Vorfaktor modellieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Integration von nicht-negativen Funktionen.

**Definition 4.5.1** (hyperbolischer Flächeninhalt). Sei  $f: H \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine messbare Abbildung<sup>3</sup> Dann definieren wir das *Integral von  $f$  über  $\mathbb{H}^2$*  durch

$$\begin{aligned} \int_H f \, d\text{vol}_H &:= \int_H f(x, y) \cdot \sqrt{\det G_{H,(x,y)}} \, d(x, y) \\ &= \int_H \frac{1}{y^2} \cdot f(x, y) \, d(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

wobei

$$G_{H,(x,y)} := \begin{pmatrix} g_{H,(x,y)}(e_1, e_1) & g_{H,(x,y)}(e_1, e_2) \\ g_{H,(x,y)}(e_2, e_1) & g_{H,(x,y)}(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

und  $e_1, e_2 \in T_{H,(x,y)}H = \mathbb{R}^2$  die Standardeinheitsvektoren sind.

Ist  $A \subset H$  messbar, so definieren wir den *hyperbolischen Flächeninhalt von  $A$*  durch

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) := \int_H \chi_A \, d\text{vol}_H \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

wobei

$$\begin{aligned} \chi_A: H &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ z &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in A \\ 0 & \text{falls } z \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

die charakteristische Funktion von  $A$  ist.

Wir fassen hierbei  $\int_H \dots \, d\text{vol}_H$  einfach als Notation auf. Tatsächlich kann man diesen Term mithilfe von Differentialformen in sinnvolle Einzelteile zerlegen und erhält dann aber letztendlich dasselbe Integral.

**Fingerübung 4.5.2** (hyperbolischer Flächeninhalt). Ist der hyperbolische Flächeninhalt von  $[-1, 1] \times [1, \infty) \subset H$  endlich?

Ja  Nein

<sup>3</sup>D.h. messbar bezüglich der von der Topologie induzierten Borel- $\sigma$ -Algebra; da die Metrik  $d_H$  die Standardtopologie auf  $H$  induziert (Bemerkung 4.3.7), entspricht diese Messbarkeit einfach der gewöhnlichen Messbarkeit auf  $H \subset \mathbb{R}^2$ .

**Proposition 4.5.3** (Isometrien sind flächentreu). *Sei  $A \subset H$  messbar und sei  $f \in \text{Isom}(H, d_H)$ . Dann ist  $f(A)$  messbar und*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(f(A)) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A).$$

*Beweis.* Nach Satz 4.4.27 ist  $f$  eine riemannsche Isometrie von  $\mathbb{H}^2$ . Die Flächentreue folgt daher mithilfe des Transformationsatzes aus den Definitionen (Übungsaufgabe).  $\square$

Als letzte Zutat benötigen wir noch etwas Notation für geodätische Dreiecke in  $(H, d_H)$ : Sei  $\Delta := (\gamma_0: [0, L_0] \rightarrow H, \gamma_1: [0, L_1] \rightarrow H, \gamma_2: [0, L_2] \rightarrow H)$  ein geodätisches Dreieck in  $(H, d_H)$ , dessen Bild nicht in einer Geodäten enthalten ist. Aus der Charakterisierung der Geodäten in  $(H, d_H)$  ergibt sich, dass sich  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  nur in den Endpunkten treffen (nachrechnen!) und diese Geodäten somit auch ein Polygon in  $(H, d_H)$  liefern. Da  $H$  zu  $\mathbb{R}^2$  homöomorph ist, gilt der Jordansche Kurvensatz auch in  $H$  (nachrechnen!). Insbesondere können wir wie in Definition 3.3.11 auch das Innere  $\Delta^\circ$  und den Flächeninhalt

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) := \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta^\circ)$$

dieses Polygons definieren. Außerdem definieren die Geodäten  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  drei Winkel

$$\sphericalangle_H(\gamma_2, \gamma_1^-), \quad \sphericalangle_H(\gamma_0, \gamma_2^-), \quad \sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_0^-)$$

wobei  $\gamma_j^-$  die entsprechend umgedrehte Geodäte zu  $\gamma_j$  bezeichnet.

**Satz 4.5.4** (Satz von Gauß-Bonnet für die hyperbolische Ebene). *Sei  $\Delta$  ein geodätisches Dreieck in  $(H, d_H)$ , dessen Bild nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten ist; seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die durch  $\Delta$  definierten Winkel. Dann gilt*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Insbesondere gilt:*

- Die Winkelsumme in hyperbolischen geodätischen Dreiecken ist kleiner als  $\pi$  und
- der Flächeninhalt hyperbolischer geodätischer Dreiecke ist durch  $\pi$  nach oben beschränkt.

**Fingerübung 4.5.5** (Gauß-Bonnet für euklidische Dreiecke?).

1. Ist die Winkelsumme in euklidischen geodätischen Dreiecken kleiner als  $\pi$ ?

Ja  Nein

2. Ist der Flächeninhalt euklidischer geodätischer Dreiecke durch  $\pi$  nach oben beschränkt?

Ja  Nein

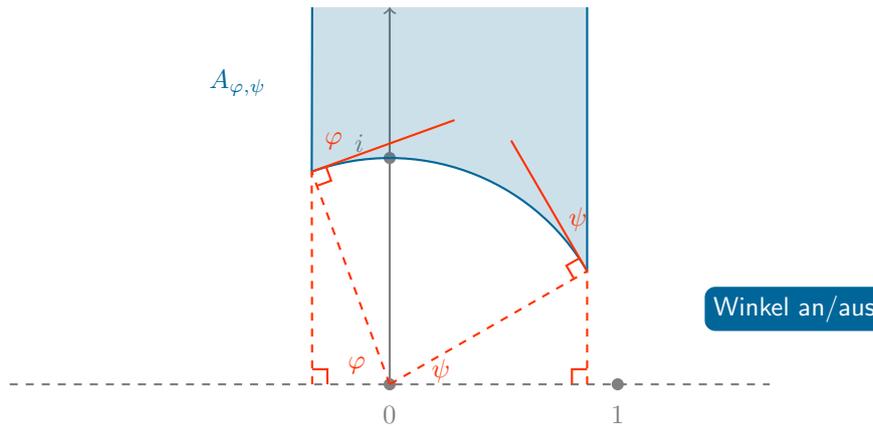


Abbildung 4.8.: Beweis des hyperbolischen Satzes von Gauß-Bonnet: eine Ecke „auf dem Rand“

*Beweis.* Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt gewisser verallgemeinerter Dreiecke, die einen „Eckpunkt auf dem Rand der hyperbolischen Ebene“ haben, und zeigen dann, wie man daraus mit einem einfachen Zerlegungsargument den Fall geodätischer Dreiecke ableiten kann.

- ① Seien  $\varphi, \psi \in [0, \pi]$  mit  $\varphi + \psi < \pi$  und sei

$$A_{\varphi, \psi} := \{(x, y) \in H \mid x \in [\cos(\pi - \varphi), \cos \psi], y \geq \sqrt{1 - x^2}\}$$

(Abbildung 4.8). Offenbar ist  $A_{\varphi, \psi}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $H$  und somit messbar. Wir zeigen, dass  $\mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\varphi, \psi}) = \pi - (\varphi + \psi)$  ist: Mit der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts, dem Satz von Fubini und der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\varphi, \psi}) &= \int_H \chi_{A_{\varphi, \psi}} \, d\text{vol}_H \\ &= \int_{\cos(\pi - \varphi)}^{\cos \psi} \int_{\sqrt{1 - x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} \, dy \, dx && \text{(Satz von Fubini)} \\ &= \int_{\cos(\pi - \varphi)}^{\cos \psi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx && \text{(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)} \\ &= \int_{\pi - \varphi}^{\psi} -1 \, dt && \text{(Transformationsformel)} \\ &= \pi - (\varphi + \psi). \end{aligned}$$

- ② Wir kommen zu unserem eigentlichen geodätischen Dreieck zurück:

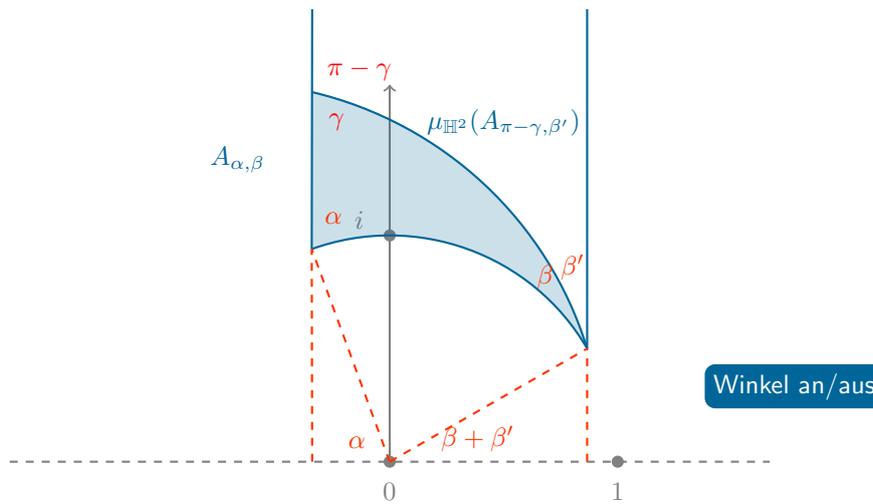


Abbildung 4.9.: Beweis des hyperbolischen Satzes von Gauß-Bonnet

Mithilfe von Möbiustransformationen können wir erreichen,

- dass die Seite „gegenüber von  $\beta$ “ auf einer vertikalen Geodäten liegt (Proposition 4.4.12),
- dass das Bild von  $\Delta$  oberhalb der Geodäten „gegenüber von  $\gamma$ “ liegt und
- dass der Halbkreis zur Geodäten „gegenüber von  $\gamma$ “ Radius 1 und Mittelpunkt 0 hat (horizontale Translation und Skalierung).

Man beachte dabei, dass Möbiustransformationen auch winkeltreu (Korollar 4.4.26) und flächentreu (Proposition 4.5.3) sind. Da das Halbebenenmodell winkeltreu ist (Bemerkung 4.4.24), können wir nun die wesentlichen Winkel mit euklidischen Berechnungen bestimmen. Insbesondere sehen wir zusammen mit der Charakterisierung hyperbolischer Geodäten, dass  $\alpha + \beta < \pi$  ist (nachrechnen!). Somit liegt  $\Delta^\circ$  ganz in  $A_{\alpha, \beta + \beta'}$  (wobei  $\beta'$  wie in Abbildung 4.9 gegeben ist). Zusätzlich zeigt eine Skalierungsisometrie, dass der Abschluss des Komplements  $A_{\alpha, \beta + \beta'} \setminus (\text{im } \Delta \cup \Delta^\circ)$  zu  $A_{\pi - \gamma, \beta'}$  isometrisch ist.

Also erhalten wir mit Schritt ① und Proposition 4.5.3, dass

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta^\circ) &= \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\alpha, \beta + \beta'}) - \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\pi - \gamma, \beta'}) && \text{(Zerlegung)} \\
 &= \pi - (\alpha + \beta + \beta') - \pi + (\pi - \gamma + \beta') && \text{(Warum?)} \\
 &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma),
 \end{aligned}$$

wie behauptet. □

**Caveat 4.5.6** (Nicht-Invarianz der Winkelsumme). In der hyperbolischen Geometrie ist die Winkelsumme in geodätischen Dreiecken *keine* Invariante! (konkrete Beispiele finden sich etwa in Beispiel 4.5.10)

Mithilfe der Winkelsumme können wir nachweisen, dass die hyperbolische und die euklidische Ebene nicht nur nicht global isometrisch sind, sondern sogar lokal nicht isometrisch sind:

**Korollar 4.5.7** ( $\mathbb{H}^2$  ist nicht lokal euklidisch, und umgekehrt). Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $V \subset H$  nicht-leere offene Mengen. Dann gibt es keine Isometrie  $(U, d_2) \rightarrow (V, d_H)$ .

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine Isometrie  $f: (U, d_2) \rightarrow (V, d_H)$ . Insbesondere bildet diese Isometrie geodätische Dreiecke auf geodätische Dreiecke ab. Mit der metrischen Beschreibung der Winkel zwischen Geodäten in der euklidischen bzw. der hyperbolischen Ebene (Ausblick 3.3.5 und Proposition 4.4.25) folgt außerdem, dass  $f$  auch winkeltreu ist.

Da  $U$  nicht-leer und offen ist, enthält  $U$  ein euklidisches geodätisches Dreieck  $\Delta$ , das nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist; dieses hat die Winkelsumme  $\pi$  (Satz 3.3.6). Das geodätische Dreieck  $\Delta$  wird durch  $f$  auf ein geodätisches Dreieck  $\Delta'$  in  $(V, d_H)$  abgebildet, das auch nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist. Da  $f$  winkeltreu ist, hat somit auch  $\Delta'$  Winkelsumme  $\pi$ , im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.4).

Also gibt es *keine* solche Isometrie.  $\square$

**Ausblick 4.5.8** (Kongruenzsatz WWW). Im Gegensatz zur euklidischen Geometrie gilt in der hyperbolischen Ebene der Kongruenzsatz WWW; dieser Satz kann zum Beispiel über einen speziellen hyperbolischen Kosinussatz und die konkrete Beschreibung der Isometriegruppe  $\text{Isom}(H, d_H)$  bewiesen werden.

**Satz 4.5.9** (Kongruenzsatz WWW für hyperbolische Dreiecke). Haben zwei geodätische Dreiecke in  $(H, d_H)$  (die jeweils nicht in einer Geodäten liegen) dieselben Winkel, so sind sie bereits in  $(H, d_H)$  kongruent.

## 4.5.2 Reguläre hyperbolische Dreiecke

Die fehlende Invarianz der Winkelsumme gibt der hyperbolischen Ebene die Freiheit, „mehr“ reguläre geodätische Dreiecke zu ermöglichen als die euklidische Geometrie. Aus ähnlichen Gründen gibt es auch mehr Möglichkeiten, die hyperbolische Ebene regulär zu pflastern als die euklidische Ebene. Diese Tatsache kann in diversen Kunstwerken von Escher bewundert werden.

**Beispiel 4.5.10** (reguläre hyperbolische Dreiecke). Sei  $f: H \rightarrow H$  die Möbiustransformation zu der Matrix

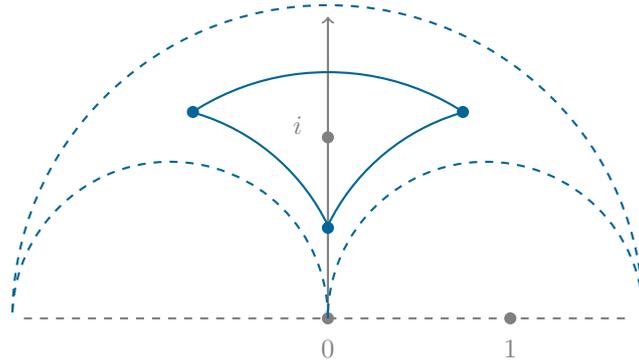


Abbildung 4.10.: Ein reguläres hyperbolisches Dreieck; blau gestrichelt: der Grenzfall für  $y \rightarrow 0$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Zu  $y \in (0, 1)$  betrachten wir die Punkte  $z_0(y) := i \cdot y$  sowie  $z_1(y) := f(i \cdot y)$  und  $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$ . Seien  $\alpha_0(y)$ ,  $\alpha_1(y)$ ,  $\alpha_2(y)$  die entsprechenden Winkel des von  $z_0(y)$ ,  $z_1(y)$ ,  $z_2(y)$  aufgespannten (eindeutigen!) geodätischen Dreiecks in  $(H, d_H)$ .

Einfache Rechnungen zeigen (Übungsaufgabe):

1. Es gilt  $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$ .
2. Es gilt  $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$ .
3. Es gilt  $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$ .
4. Es gilt  $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha_0(y) = 0$ .

Insbesondere gibt es reguläre hyperbolische Dreiecke mit unterschiedlichen Winkeln und unterschiedlichen Winkelsummen (!).

**Beispiel 4.5.11** (reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene). Zum Beispiel kann man somit die hyperbolische Ebene mit kongruenten regulären Dreiecken pflastern, deren Winkel jeweils  $45^\circ$  (also  $\pi/4$ ) beträgt (Abbildung 4.11).

Analog kann man auch hyperbolische reguläre  $n$ -Ecke mit beliebig kleinen Innenwinkeln konstruieren. Als Konsequenz davon erhält man, dass es viele Möglichkeiten gibt, die hyperbolische Ebene mit kongruenten hyperbolischen regulären  $n$ -Ecken zu pflastern.

Besonders ansprechend sehen solche Pflasterungen im Poincaréschen Scheibenmodell aus:

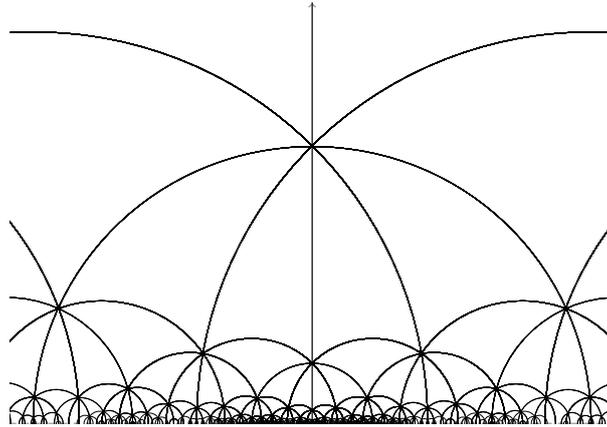


Abbildung 4.11.: Eine Pflasterung von  $(H, d_H)$  durch kongruente reguläre geodätische Dreiecke mit Innenwinkel  $45^\circ$

**Ausblick 4.5.12** (Poincaré-Scheibenmodell und reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene). Die *Cayley-Transformation*

$$C: H \longrightarrow E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$z \longmapsto \frac{z - i}{z + i}$$

ist ein glatter Diffeomorphismus zwischen  $H$  und  $E \subset \mathbb{C}$  (Abbildung 4.12). Überträgt man die riemannsche Metrik  $g_H$  auf  $H$  mithilfe von  $C$  auf  $E$ , so erhält man die durch

$$\frac{4 \cdot (dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$$

beschriebene riemannsche Metrik  $g_E$  auf  $E$ . Sei  $d_E$  die vom entsprechenden Längenbegriff induzierte Metrik auf  $E$ . Nach Konstruktion ist dann  $C: H \longrightarrow E$  eine Isometrie bezüglich  $d_H$  bzw.  $d_E$ ; insbesondere ist die offene Kreisscheibe  $E$  mit dieser (riemannschen) Metrik ein Modell der hyperbolischen Ebene, das sogenannte *Poincarésche Scheibenmodell*.

Welche Eigenschaften hat das Scheibenmodell?

- Da die Cayley-Transformation  $C$  winkeltreu (sowohl bezüglich  $g_H$  und  $g_E$  als auch bezüglich der euklidischen Metrik) ist, ist ebenso wie das Halbebenenmodell (Bemerkung 4.4.24) auch das Poincarésche Scheibenmodell ein winkeltreues Modell der hyperbolischen Ebene.
- Bilder geodätischer Geraden im Scheibenmodell sind genau die Durchmesser von  $E$  bzw. die Kreisbögen, die den „Rand“  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  orthogonal schneiden (Abbildung 4.13).

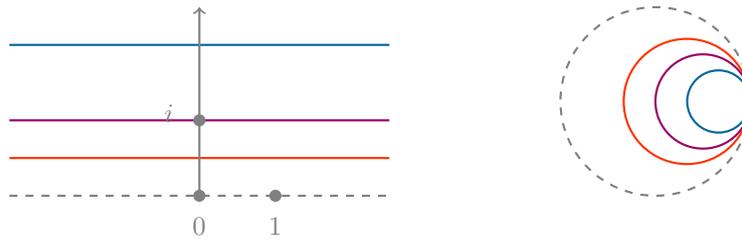


Abbildung 4.12.: Die Cayley-Transformation

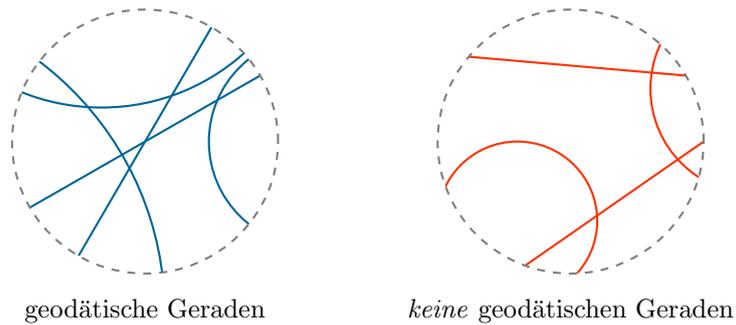


Abbildung 4.13.: Geodätische Geraden im Poincaréschen Scheibenmodell

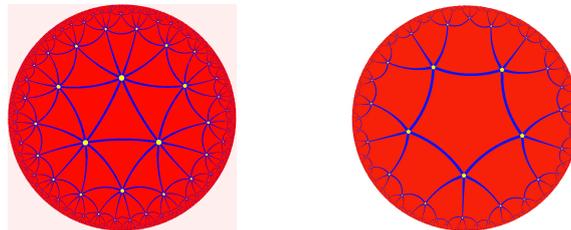


Abbildung 4.14.: Reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene (Tomruen@Wikipedia)

Beispiele für reguläre Pflasterungen der hyperbolischen Ebene finden sich in Abbildung 4.14. Eindrucksvolle Varianten von Pflasterungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Vierecke sind Eschers Holzschnitte *Cirkellimiet I* und *Cirkellimiet IV* [22]. Etwas vertrackter ist die Situation bei Eschers *Cirkellimiet III* [21] (Übungsaufgabe) und manchen seiner Werke, die an das Halbebenenmodell erinnern.

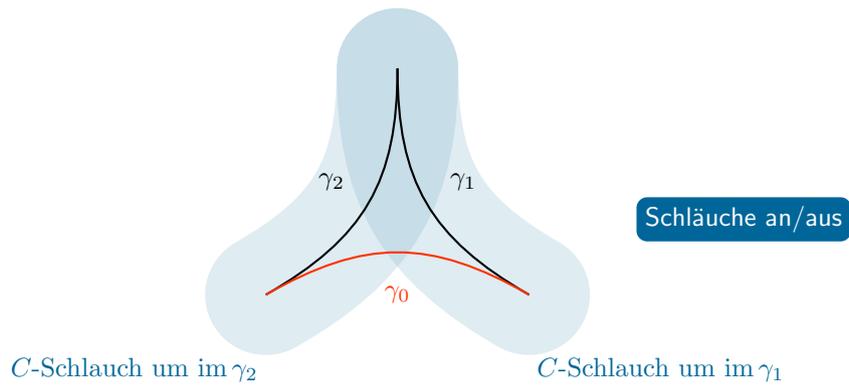


Abbildung 4.15.: Düntheit hyperbolischer geodätischer Dreiecke (schematisch, im Poincaré-Scheibenmodell)

### 4.5.3 Hyperbolische Dreiecke sind dünn

Hyperbolische geodätische Dreiecke sind im folgenden Sinne dünn (Abbildung 4.15):

**Satz 4.5.13** (Düntheit hyperbolischer Dreiecke). *Es gibt eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit: Ist  $(\gamma_0: [0, L_0] \rightarrow H, \gamma_1: [0, L_1] \rightarrow H, \gamma_2: [0, L_2] \rightarrow H)$  ein geodätisches Dreieck in  $(H, d_H)$  und ist  $t \in [0, L_0]$ , so gibt es*

- ein  $s \in [0, L_1]$  mit  $d_H(\gamma_0(t), \gamma_1(s)) \leq C$ .
- oder ein  $s \in [0, L_2]$  mit  $d_H(\gamma_0(t), \gamma_2(s)) \leq C$ .

*Etwas kürzer und symmetrischer lässt sich das wie folgt formulieren: Zu jedem  $j \in \{0, 1, 2\}$  und  $x \in \text{im } \gamma_j$  gibt es ein  $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$  und ein  $y \in \text{im } \gamma_k$  mit  $d_H(x, y) \leq C$ .*

**Bemerkung 4.5.14** (euklidische Dreiecke). Die Eigenschaft aus Satz 4.5.13 steht in starkem Kontrast zur euklidischen Situation: Zu jedem  $C \in \mathbb{R}_{> 0}$  gibt es ein geodätisches Dreieck  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  und einen Punkt in  $\text{im } \gamma_0$ , der weiter als  $C$  von  $\text{im } \gamma_1$  und  $\text{im } \gamma_2$  entfernt ist. Man kann zum Beispiel das geodätische Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den Ecken ?

und den Punkt ? auf der Geodäten von ? nach ? betrachten (Abbildung 4.16; nachrechnen!).

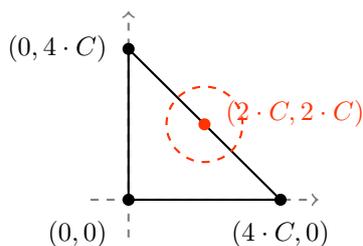


Abbildung 4.16.: In der euklidischen Ebene gibt es dicke geodätische Dreiecke

Man kann Satz 4.5.13 zum Beispiel durch sorgfältige Längenabschätzungen zeigen. Wir wählen einen Beweis über den Flächeninhalt, da wir bei dieser Gelegenheit auch ein anderes Phänomen der hyperbolischen Ebene illustrieren können: das exponentielle Flächenwachstum. Als Hilfsmittel benötigen wir eine Flächeninhaltsabschätzung für hyperbolische Kreise:

**Proposition 4.5.15** (Wachstum des hyperbolischen Flächeninhalts). *Für alle  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_i^{(H, d_H)}(r)) \geq \frac{r}{2} \cdot (e^{r/2} - 1).$$

*Insbesondere wächst der Flächeninhalt hyperbolischer Kreise mindestens exponentiell in Abhängigkeit vom Radius.*

*Beweis.* Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Einfache Abschätzungen zeigen, dass

$$Q_r := \{x + i \cdot y \mid x \in [0, r/2], y \in [e^{-r/2}, 1]\}$$

ganz in  $B_i^{(H, d_H)}(r)$  enthalten ist (Übungsaufgabe). Also ist

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_i^{(H, d_H)}(r)) \geq \mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r).$$

Aus der Definition des hyperbolischen Flächeninhalts erhält man außerdem  $\mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) = r/2 \cdot (e^{r/2} - 1)$  (Übungsaufgabe).  $\square$

Man beachte, dass der Flächeninhalt euklidischer Kreise in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  **wie?** in Abhängigkeit vom Radius wächst.

*Beweis von Satz 4.5.13.* Nach Proposition 4.5.15 über das Flächenwachstum in der hyperbolischen Ebene gibt es ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_i^{(H, d_H)}(C)) \geq 4 \cdot \pi.$$

Sei  $\Delta := (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  ein geodätisches Dreieck in  $(H, d_H)$  und sei  $x \in \text{im } \gamma_0$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Bild von  $\Delta$  nicht in

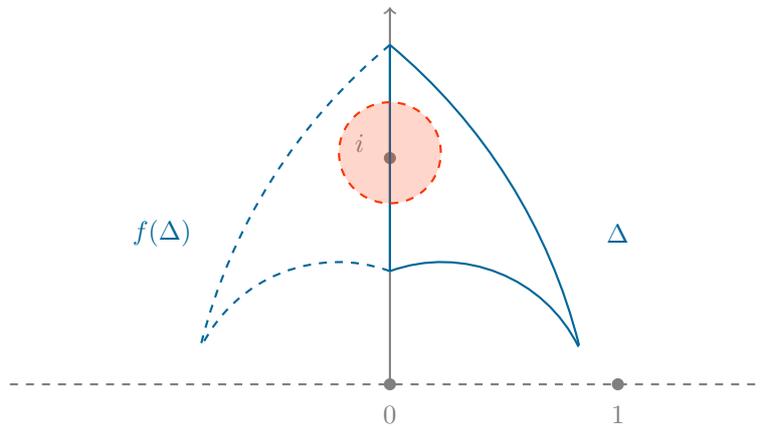


Abbildung 4.17.: Beweis der Düntheit hyperbolischer Dreiecke

einer Geodäten enthalten ist (denn sonst ist die Behauptung offensichtlich erfüllt). Aufgrund der Transitivität der Möbiustransformationen (Proposition 4.4.12 und eine Skalierungsisometrie) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\text{im } \gamma_0$  auf der imaginären Achse liegt und dass  $x = i$  ist.

Angenommen, es gäbe kein  $y \in \text{im } \gamma_1 \cup \text{im } \gamma_2$  mit  $d_H(x, y) \leq C$ . Dann folgt

$$B_i^{(H, d_H)}(C) \subset \Delta^\circ \cup \text{im } \gamma_0 \cup f(\Delta^\circ),$$

wobei  $f: z \mapsto -\bar{z}$  die Spiegelung an der imaginären Achse bezeichnet (Abbildung 4.17). Da  $f$  als Isometrie flächentreu ist (Proposition 4.5.3), folgt mit dem Satz von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.4)

$$\begin{aligned} 4 \cdot \pi &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(B_i^{(H, d_H)}(C)) && \text{(Wahl von } C) \\ &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(\text{im } \gamma_0) + \mu_{\mathbb{H}^2}(f(\Delta^\circ)) && \text{(Additivität von } \mu_{\mathbb{H}^2}) \\ &= \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + 0 + \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) \\ &< 2 \cdot \pi && \text{(Warum?)}, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

Also gibt es ein  $y \in \text{im } \gamma_1 \cup \text{im } \gamma_2$  mit  $d_H(x, y) \leq C$ . □

**Ausblick 4.5.16** (globale negative Krümmung). Umgekehrt kann man diese metrische Düntheitseigenschaft geodätischer Dreiecke nutzen, um eine Definition globaler negativer Krümmung von metrischen Räumen zu formulieren [27, 12, 37]. In der geometrischen Gruppentheorie spielt dies eine wichtige Rolle. Umgekehrt hat diese Sichtweise auch die moderne Differentialgeometrie beeinflusst.

## 4.6 Vergleich mit sphärischer Geometrie

Zum Abschluss vergleichen wir die Situation der hyperbolischen Ebene mit der sphärischen Geometrie, d.h. mit der Geometrie von  $S^2$ . Wir werden dies nicht im Detail ausführen, sondern nur die wichtigsten Punkte kurz zusammenfassen.

**Die Sphäre.** Wir betrachten die zweidimensionale Sphäre

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Mithilfe des Satzes vom regulären Wert (angewendet auf  $x \mapsto \|x\|_2^2$  und den Wert 1) kann man sich leicht überlegen, dass  $S^2$  von  $\mathbb{R}^3$  eine glatte Struktur erbt und eine zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit bzw. eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  bildet. Eine Abbildung nach  $S^2$  ist somit genau dann glatt, wenn die Verknüpfung mit der Inklusion  $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  glatt ist.

Der Bequemlichkeit halber werden wir Punkte auf  $S^2$  oft mit „geographischen“ Bezeichnungen (wie Nordpol, Südpol, Äquator, ...) versehen.

**Das Tangentialbündel der Sphäre.** Eine erste technische Schwierigkeit gibt es bei der Beschreibung des Tangentialbündels von  $S^2$ , da das Tangentialbündel von  $S^2$  im Gegensatz zum Tangentialbündel von  $\mathbb{R}^2$  oder  $H$  *nicht* trivial ist. Man kann sich an dieser Stelle aber mit dem folgenden Trick retten: Ist  $x \in S^2$ , so kann man den Tangentialraum  $T_x S^2$  vermöge der Inklusion  $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  kanonisch mit dem zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp x\}$$

identifizieren (wobei sich „ $\perp$ “ auf das gewöhnliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  bezieht). Im folgenden werden wir immer diese Beschreibung von  $T_x S^2$  verwenden und können daher Ableitungen von Abbildungen nach  $S^2$  wie gewohnt berechnen.

**Die sphärische riemannsche Metrik.** Auf  $S^2$  betrachten wir die riemannsche Metrik  $g_S$ , die durch

$$g_{S,x} := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x S^2 \times T_x S^2}$$

für alle  $x \in S^2$  gegeben ist, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  ist. Wir schreiben  $\mathbb{S}^2$  für die riemannsche Mannigfaltigkeit  $(S, g_S)$ . Außerdem verwenden wir die Notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S,x}$  für  $g_{S,x}$  für  $x \in S^2$  und  $\|\cdot\|_{S,x}$  für die davon induzierte Norm auf  $T_x S^2$ .

**Länge, Metrik, Winkel, Flächeninhalt.** Mithilfe der riemannschen Metrik  $g_S$  auf  $S^2$  können wir wie im hyperbolischen Fall die Länge  $L_{\mathbb{S}^2}$  glatter Kurven definieren: Ist  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow S^2$  glatt, so setzt man

$$L_{S^2}(\gamma) := ?$$

Dies liefert die Metrik(!)

$$d_S: S^2 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, x') \longmapsto ?$$

auf  $S^2$ .

Außerdem kann man analog zur hyperbolischen Ebene mithilfe der riemannschen Metrik  $g_S$  *sphärische Winkel* zwischen glatten Kurven in  $S^2$  definieren (und eine metrische Beschreibung dafür ableiten), sowie *sphärische Integrale* für messbare Funktionen  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und *sphärische Flächeninhalte*  $\mu_{S^2}$  für messbare Teilmengen von  $S^2$  definieren.

**Beispiel 4.6.1.** Man kann zeigen, dass der Äquator die Länge  $2 \cdot \pi$  hat: Wir modellieren den Äquator zum Beispiel durch

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow S^2$$

$$t \longmapsto ?$$

Dann ergibt sich

$$L_{S^2}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|_{S, \gamma(t)} dt \quad (\text{nach Definition von } L_{S^2})$$

$$= \int_0^{2\pi} ? dt \quad (\text{nach Definition von } g_S)$$

$$= \int_0^{2\pi} ? dt$$

$$= 2 \cdot \pi.$$

Ein Projektionsargument ähnlich zum euklidischen und hyperbolischen Fall zeigt, dass der Abstand zwischen Nord- und Südpol bezüglich  $d_S$  genau  $\pi$  ist. Außerdem gilt

$$\mu_{S^2}(S^2) = 4 \cdot \pi.$$

**Geodäten.** Sorgfältige Abschätzungen zeigen wie im hyperbolischen Fall, dass Geodäten in  $(S^2, d_S)$  immer glatt sind und dass die Bilder von Geodäten in  $(S^2, d_S)$  genau die Segmente von halben Großkreisen auf  $S^2$  sind. Ein *Großkreis auf  $S^2$*  ist der Schnitt eines zweidimensionalen Unterraums von  $\mathbb{R}^3$  mit  $S^2$ . Insbesondere gibt es zwischen je zwei Punkten auf  $S^2$  mindestens eine Geodäte.

**Caveat 4.6.2.** Man beachte dabei, dass antipodal gegenüberliegende Punkte auf  $S^2$  nicht durch nur eine Geodäte, sondern durch unendlich viele verschiedene Geodäten verbunden werden (Abbildung 4.18).

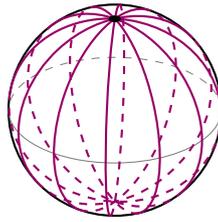


Abbildung 4.18.: Unendlich viele Geodäten zwischen Nord- und Südpol



Abbildung 4.19.: Flugroute von MUC (München) nach NRT (Tokyo);  
<http://www.gcmap.com/>

**Fingerübung 4.6.3** (sphärische Geodäten auf der Erde). Wir nehmen im folgenden an, dass die Erdoberfläche eine Kugel ist.

1. Sind Segmente von Halbkreisen der Längengrade sphärische Geodäten?

Ja  Nein

2. Sind Segmente von Halbkreisen der Breitenkreise sphärische Geodäten?

Ja  Nein

In der Praxis spielt die Klassifikation von sphärischen Geodäten zum Beispiel bei der Berechnung von Flugrouten eine Rolle (Abbildung 4.19); dabei sind natürlich zusätzlich auch noch viele andere meteorologische und politische Faktoren zu beachten.

**Symmetrie.** Wie im hyperbolischen Fall bietet es sich an, zusammen mit den Geodäten auch die Isometriegruppe zu bestimmen. Im sphärischen Fall ist

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(3) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(S^2, d_S) \\ A &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus; dabei verwenden wir für  $A \in \mathrm{O}(3)$  und  $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  die Notation  $A \cdot x$  für die gewöhnliche Matrixmultiplikation. Der Stabilisator eines Punktes aus  $S^2$  ist isomorph zu  $\mathrm{O}(2)$  (nachrechnen).

**Sphärische Dreiecke.** Wie im hyperbolischen Fall ist die Winkelsumme geodätischer Dreiecke in  $(S^2, d_S)$  keine Invariante, sondern hängt eng mit dem Flächeninhalt zusammen:

**Satz 4.6.4 (Satz von Gauß-Bonnet für die Sphäre).** *Sei  $\Delta$  ein geodätisches Dreieck in  $(S^2, d_S)$  mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und das Bild von  $\Delta$  sei nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Dann gilt*

$$\mu_{S^2}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

*Insbesondere gilt  $\pi < \alpha + \beta + \gamma \leq 3 \cdot \pi$ .*

Bei der Definition des Flächeninhalts  $\mu_{S^2}(\Delta)$  ist dabei eine Komponente von  $S^2 \setminus \text{im } \Delta$  zu wählen, die in einer Hemisphäre von  $S^2$  enthalten ist.

**Beispiel 4.6.5 (reguläre sphärische Dreiecke).**

1. Zum Beispiel erhält man aus dem Nordpol und einem Vierteläquator ein reguläres geodätisches Dreieck in  $(S^2, d_S)$  mit Seitenlänge  $\pi/2$  und Winkel  $\pi/2$ . Die Winkelsumme ist in diesem Fall somit  $3 \cdot \pi/2$ .
2. Wählt man drei Punkte auf dem Äquator mit paarweisem Abstand  $2 \cdot \pi/3$ , so erhält man ein reguläres geodätisches Dreieck in  $(S^2, d_S)$  mit Seitenlänge  $2 \cdot \pi/3$  und Winkel  $\pi$ . Die Winkelsumme ist in diesem Fall somit  $3 \cdot \pi$ .

Im Vergleich zur euklidischen Geometrie lässt sich also sagen, dass sphärische Dreiecke „dick“ sind, wohingegen hyperbolische Dreiecke „dünn“ sind.

**Reguläre Pflasterungen.** Die einzigen regulären Pflasterungen (bis auf Isometrie) von  $(S^2, d_2)$ , bei denen in den Ecken mehr als zwei Polygone zusammentreffen, sind die Pflasterungen, die den fünf platonischen Körpern entsprechen (ein Beispiel findet sich in Abbildung 4.20).

**Kartographie.** Analog zu Korollar 4.5.7 können wir die Frage 2.3.7 negativ beantworten (nachrechnen!):

**Satz 4.6.6 ( $S^2$  ist nicht lokal euklidisch, und umgekehrt).** *Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $V \subset S^2$  nicht-leere offene Mengen. Dann gibt es keine Isometrie  $(U, d_2) \rightarrow (V, d_S)$ . Insbesondere ist es nicht möglich, längentreue ebene Landkarten von Ausschnitten der Erdoberfläche zu zeichnen.*

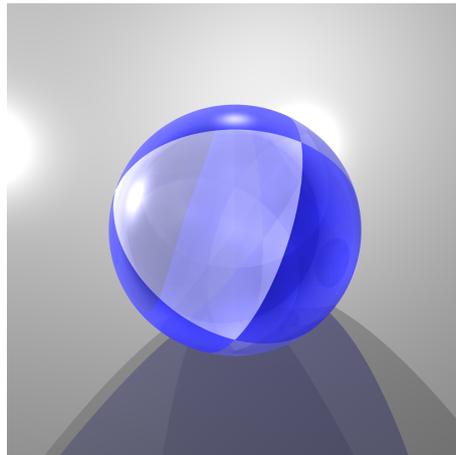


Abbildung 4.20.: Eine reguläre Pflasterung der Sphäre, basierend auf dem Oktaeder

In der Kartographie interessant sind zum Beispiel die Zylinderprojektion (flächentreu) und die stereographische Projektion bzw. die Mercatorprojektion (beide winkeltreu) [6], die auf großen Gebieten der Sphäre definiert sind.

Außerdem kann man mit derselben Methode über die Winkelsummen auch zeigen, dass  $\mathbb{H}^2$  und  $\mathbb{S}^2$  *nicht* lokal isometrisch sind. Etwas analytischer lässt sich dies als Krümmungsphänomen beschreiben:

- Die euklidische Ebene  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ist ungekrümmt (man sagt auch *flach*) hat also Krümmung konstant 0.
- Die Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist gekrümmt mit positiver Krümmung konstant 1.
- Die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}^2$  ist auch gekrümmt, aber dual zur Sphäre, also negativ gekrümmt; sie hat Krümmung konstant  $-1$ .

Man kann diese Werte der Krümmung entweder über eine geeignete Definition aus der Winkelsumme in geodätischen Dreiecken oder als analytischen Ausdruck aus der riemannschen Krümmung berechnen [6, 36].

**Ausblick 4.6.7** (Satz von Gauß-Bonnet). Eine spektakuläre Zusammenfassung des Zusammenhangs zwischen Krümmung und topologischer Gestalt kompakter riemannscher Flächen liefert der Satz von Gauß-Bonnet [6, 36]: Ist  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche zweidimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand), so gilt

$$\int_M K \, d\text{vol}_M = 2 \cdot \pi \cdot \chi(M).$$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

- Es ist  $\int_M \dots \operatorname{dvol}_M$  das Integral „über  $M$ “.
- Es ist  $K: M \rightarrow \mathbb{R}$  die sogenannte Gauß-Krümmung von  $M$ .
- Und  $\chi(M)$  ist die Euler-Charakteristik von  $M$ ; trianguliert man  $M$ , so ist  $\chi(M)$  die Wechsellsumme aus Anzahl der Knoten, Kanten und Dreiecke dieser Triangulierung (wie im eulerschen Polyedersatz ist diese Winkelsumme unabhängig von der gewählten Triangulierung!).

Unsere Varianten des Satzes von Gauß-Bonnet (Satz 4.5.4 und Satz 4.6.4) sind Spezialfälle einer noch allgemeineren Formulierung für Flächen mit Rand.

Wir fassen die wesentlichen Merkmale euklidischer, sphärischer und hyperbolischer Geometrie in Abbildung 4.21 zusammen.

**Anmerkung zum Lernen (Zusammenfassung).** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4. Berücksichtigen Sie dabei die folgenden Fragen:

- Wie kann man die hyperbolische Ebene als metrischen Raum konstruieren?
- Wie kann man eine Anschauung für diese Geometrie gewinnen?
- Wie kann man die Symmetriegruppe und die Geodäten der hyperbolischen Ebene bestimmen?
- Wie kann man Flächeninhalte von Dreiecken definieren?
- Welche Eigenschaften haben hyperbolische Dreiecke und wie kann man diese beweisen?
- Wie kann man die hyperbolische Ebene reguläre pflastern?
- Welche Bedeutung hat die hyperbolische Ebene für das Parallelenaxiom?
- Wie kann man sphärische Geometrie einführen?
- Wie vergleichen sich euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie?
- Können Sie die Tabelle in Anhang A.1 ausfüllen?

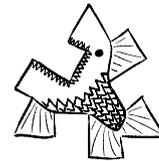
	hyperbolisch	euklidisch	sphärisch
Menge	$H$	$\mathbb{R}^2$	$S^2$
Metrik	$d_H$ , induziert von $g_H$	$d_2$	$d_S$ , induziert von $d_S$
Geodäten	verallgemeinerte Halbkreise	Geraden	halbe Großkreise
Winkelsumme	$< \pi$	$\pi$	$> \pi$
Krümmung	negativ	null	positiv
Isometriegruppe	erzeugt von $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ und Spiegelung	$\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$	$O(3)$
Stabilisator	$O(2)$	$O(2)$	$O(2)$
Gesamtflächeninhalt	$\infty$	$\infty$	$4 \cdot \pi$
reguläre Pflasterungen	unendlich viele essentiell verschiedene	im wesentlichen drei	im wesentlichen fünf

Abbildung 4.21.: Vergleich zwischen euklidischer, sphärischer und hyperbolischer Geometrie

Wo ist der Rest? Wo ist der Typosaurus?



# A



## Anhang

---

### Überblick über dieses Kapitel.

A.1	Der rote Faden	A.2
A.2	Hilberts Axiomatik	A.3
A.3	Eine viel zu kurze Einführung in Lean	A.7
A.4	Kategorien	A.10
A.5	Funktoren	A.13
A.6	Elementare Analysis von Sinus und Kosinus	A.16
A.7	Das Banach-Tarski-Paradoxon	A.18
A.8	Penrose-Puzzle	A.21



## A.2 Hilberts Axiomatik

Der Vollständigkeit halber geben wir hier die Liste der Axiome aus Hilberts *Grundlagen der Geometrie* [29, 57] wieder (wobei wir nur die Erklärungen und Definitionen auswählen, die für die Formulierung der Axiome essentiell sind): Hilberts Axiomatik bezieht sich auf „drei verschiedene Systeme von Dingen“, nämlich Punkten, Geraden und Ebenen und die Beziehungen zwischen diesen Dingen.

### I. Axiome der *Verknüpfung*

1. Zwei von einander verschiedene Punkte  $A, B$  bestimmen stets eine Gerade  $a$ ; wir setzen  $AB = a$  oder  $BA = a$ .
2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade; d.h. wenn  $AB = a$  und  $AC = a$ , und  $B \neq C$ , so ist auch  $BC = a$ .
3. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte  $A, B, C$  bestimmen stets eine Ebene  $\alpha$ ; wir setzen  $ABC = \alpha$ .
4. Irgend drei Punkte  $A, B, C$  einer Ebene  $\alpha$ , die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene  $\alpha$ .
5. Wenn zwei Punkte  $A, B$  einer Geraden  $a$  in einer Ebene  $\alpha$  liegen, so liegt jeder Punkt von  $a$  in  $\alpha$ .
6. Wenn zwei Ebenen  $\alpha, \beta$  einen Punkt  $A$  gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt  $B$  gemein.
7. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und im Raum gibt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

### II. Axiome der *Anordnung*

*Erklärung.* Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „zwischen“ dient.

1. Wenn  $A, B, C$  Punkte einer Geraden sind, und  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt, so liegt  $B$  auch zwischen  $C$  und  $A$ .

2. Wenn  $A$  und  $C$  zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt  $B$ , der zwischen  $A$  und  $C$  liegt und wenigstens einen Punkt  $D$ , so dass  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt.
3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.
4. Irgend vier Punkte  $A, B, C, D$  einer Geraden können stets so angeordnet werden, dass  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  und auch zwischen  $A$  und  $D$  und ferner  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  und auch zwischen  $B$  und  $D$  liegt.

*Definition.* Das System zweier Punkte  $A$  und  $B$ , die auf einer Geraden  $a$  liegen, nennen wir eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit  $AB$  oder  $BA$ . Die Punkte zwischen  $A$  und  $B$  heissen Punkte der Strecke  $AB$  oder auch *innerhalb* der Strecke  $AB$  gelegen; alle übrigen Punkte der Geraden  $a$  heissen *ausserhalb* der Strecke  $AB$  gelegen. die Punkte  $A, B$  heissen *Endpunkte* der Strecke  $AB$ .

5. Es seien  $A, B, C$  drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und  $a$  eine Gerade in der Ebene  $ABC$ , die keinen der Punkte  $A, B, C$  trifft: wenn dann die Gerade  $a$  durch einen Punkt innerhalb der Strecke  $AB$  geht, so geht sie stets entweder durch einen Punkt der Strecke  $BC$  oder durch einen Punkt der Strecke  $AC$ .

### III. Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches Axiom*)

In einer Ebene  $\alpha$  lässt sich durch einen Punkt  $A$  ausserhalb einer Geraden  $a$  stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade  $a$  nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu  $a$  durch den Punkt  $A$ .

### IV. Axiome der *Congruenz*

*Erklärung.* Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „*congruent*“ dient.

1. Wenn  $A, B$  zwei Punkte auf einer Geraden  $a$  und ferner  $A'$  ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden  $a'$  ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden  $a'$  von  $A'$  stets einen und nur einen Punkt  $B'$  finden, so dass die Strecke  $AB$  (oder  $BA$ ) der Strecke  $A'B'$  congruent ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst congruent, d.h. es ist stets:

$$AB \equiv AB.$$



kel  $(h'', k'')$  congruent, d.h. wenn  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$  und  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$  ist, so ist auch stets  $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ .

*Erklärung.* Es sei ein Dreieck<sup>3</sup>  $ABC$  vorgelegt; wir bezeichnen die beiden von  $A$  ausgehenden durch  $B$  und  $C$  laufenden Halbstrahlen mit  $h$  bzw.  $k$ . Der Winkel  $(h, k)$  heisst dann der von den Seiten  $AB$  und  $AC$  eingeschlossene oder der der Seite  $BC$  gegenüberliegenden Winkel des Dreieckes  $ABC$ ; er enthält in seinem Inneren sämtliche innere Punkte des Dreieckes  $ABC$  und wird mit  $\sphericalangle BAC$  oder  $\sphericalangle A$  bezeichnet.

6. Wenn für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind auch stets die Congruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

## V. Axiom der Stetigkeit (*Archimedisches Axiom*)

Es sei  $A_1$  ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten  $A$  und  $B$ ; man construiere dann die Punkte  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , so dass  $A_1$  zwischen  $A$  und  $A_2$ , ferner  $A_2$  zwischen  $A_1$  und  $A_3$ , ferner  $A_3$  zwischen  $A_2$  und  $A_4$  u.s.w. liegt und überdies die Strecken

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

einander gleich<sup>4</sup> sind: dann giebt es in der Reihe der Punkte  $A_2, A_3, A_4, \dots$  stets einen solchen Punkt  $A_n$ , dass  $B$  zwischen  $A$  und  $A_n$  liegt.

<sup>3</sup>D.h. ein Streckenzug  $AB, BC, CA$

<sup>4</sup>Hilbert trifft dazu „zuvor eine Festsetzung über die Gleichheit zweier Strecken auf einer Geraden“, z.B. über Kongruenz von Strecken.

## A.3 Eine viel zu kurze Einführung in Lean

Dies ist eine sehr minimalistische Einführung in den Beweisassistenten **Lean**. Detailliertere Informationen finden sich in der Standard-**Lean**-Einführung [4] bzw. in der **Lean**-Dokumentation [33].

**Interaktives Tool A.3.1.** Probieren Sie **Lean**-Programme in einer lokalen **Lean**-Installation [34] oder auf der **Lean**-Web-Plattform [35] aus!

Viele **Lean**-Beweise, die Sie in Bibliotheken oder in sonstigen **Lean**-Beispielen sehen, werden nur dann nachvollziehbar sein, wenn Sie sie in einem **Lean**-System durchgehen. Wir werden deswegen im Normalfall immer versuchen, die wichtigen Beweisschritte so explizit zu machen, dass die **Lean**-Beweise auch für einen menschlichen Leser direkt verständlich sind.

### A.3.1 Grundlagen

Die Formalisierung von Mathematik benötigt

- ein Universum von Objekten,
- eine Logik-Sprache,
- ein Beweis-Konzept,

sowie zumeist eine Meta-Sprache, in der all diese Dinge formuliert sind. Da diese Ebenen miteinander interagieren, ist ein stringenter Aufbau der Mathematik im Detail sehr aufwendig.

In klassischen handschriftlichen Beweisen verwenden wir zumeist eine Mengenlehre (z.B. ZFC oder NBG), eine klassische Logik (es gibt aber auch andere interessante Logiken!) und einen Beweiskalkül, der es erlaubt, logische Aussagen zu zerlegen und kombinieren.

**Lean** basiert auf Typtheorie statt Mengenlehre, bietet die Wahl zwischen konstruktiver und klassischer Logik, und der Beweiskalkül beruht auf dem Curry-Howard-Isomorphismus (einer Korrespondenz zwischen Beweisen und (Funktions-)Implementierungen mit geeigneten Typen).

**Caveat A.3.2.** Strenggenommen bedeuten in **Lean** formalisierte Aussagen also nicht unbedingt dasselbe wie ihre handschriftlichen Entsprechungen (auch wenn sie „gleich“ aussehen); für unsere Anwendungsbereiche spielen diese subtilen Unterschiede aber keine Rolle.

### A.3.2 Beweise

Beweise leiten aus Axiomen, Voraussetzungen (Aussagen) und Schlussregeln weitere Aussagen ab. Die zentrale Schlussregel in mathematischen Beweisen ist der *Modus Ponens*:

Ist die Aussage  $A$  bewiesen und die Implikation  $A \implies B$  bewiesen, so folgt, dass auch  $B$  bewiesen ist.

Unter dem *Curry-Howard-Isomorphismus* identifiziert man

- Aussagen mit Typen und
- Beweise von Aussagen mit Elementen des entsprechenden Typs.

Der Modus Ponens ist dann nichts anderes als Funktionsapplikation:

Hat man ein Element vom Typ  $A$  und eine Funktion  $A \longrightarrow B$ , so erhält man auch ein Element vom Typ  $B$ .

Daher sind Beweise in *Lean* im Grunde nichts anderes als Implementierungen von Funktionen (und sehen daher auch syntaktisch genauso aus):

In *Lean* bedeutet  $x : A$ , dass  $x$  den Typ  $A$  hat. Ein Lemma der untenstehenden Form besagt also, dass unter der Voraussetzung, dass  $x$  den Typ  $A$  hat ( $A$  „erfüllt“), dann `nonsensical_lemma` den Typ  $\varphi x$  hat (also  $\varphi x$  „erfüllt“ ist). Zumeist ist dabei  $\varphi x$  ein Typ, der eine konkrete mathematische Aussage repräsentiert.

```
lemma nonsensical_lemma
  (x : A)
  :  $\varphi x$ 
:=
begin
  ...
end
```

Ein Beweis des Lemmas ist somit nichts anderes als die Implementierung einer Funktion  $A \longrightarrow \varphi x$  und wird in `:= begin ... end` angegeben.

Die Behauptung eines Lemmas führt dazu, dass ein *goal* (oder mehrere) erreicht werden muss. Während des Beweises werden diese goals manipuliert – je nach Schlussweisen und Zwischenbehauptungen werden goals erreicht oder neue goals hinzugefügt. Der Beweis ist vollständig, sobald alle goals erreicht wurden.

Teile des Zustands sind dabei implizit (und auch die implizite Reihenfolge kann eine Rolle spielen); um die Lesbarkeit und Robustheit zu erhöhen, ist es ratsam, die Beweise expliziter zu gestalten als *Lean* es verlangt.

<code>lemma, theorem,</code> <code>have, ...</code> <code>show</code>	behauptet eine Aussage; erfordert einen Beweis behauptet/löst ein goal; im Erfolgsfall wird dieses goal aus der Liste der zu erreichenden goals entfernt
<code>assume</code>	führt einen Bezeichner ein, als Vorbereitung des Beweises einer All-Aussage oder einer Implikation
<code>use</code>	erlaubt aus einem Beispiel eine Existenz-Aussage zu beweisen
<code>rcases</code>	extrahiert z.B. einen Zeugen aus einer Existenz-Aussage
<code>cases</code>	Fallunterscheidung
<code>induction</code>	Beweis per Induktion (nicht nur über natürliche Zahlen!)
<code>by</code>	gibt eine Begründung; kann mit <code>apply</code> , <code>exact</code> , <code>simp</code> , <code>rw</code> , <code>refine</code> , <code>arith</code> , ... auf andere Aussagen und komplexe Beweistaktiken zurückgreifen
<code>library_search,</code> <code>suggest, hint</code>	sucht in den vorhandenen Bibliotheken nach Möglichkeiten, im Beweis Fortschritte zu machen
<code>calc</code>	startet eine „Berechnung“
<code>def</code>	Definition
<code>let</code>	lokale Definition

Abbildung A.1.: Grundwortschatz Lean

Eine Auswahl des Lean-Vokabulars ist in Abbildung A.1 zusammengestellt. Mehr Details finden sich in der Dokumentation [4, 33]. Die einzelnen Beweisschritte bestehen zumeist aus der Elimination oder Introdution von logischen Konstrukten:

- Der Beweis einer zusammengesetzten Aussage erfordert eine Introdution (z.B. die Einführung von Quantoren oder logischen Konnektoren).
- Die Extraktion von Komponenten aus zusammengesetzten Aussagen erfordert eine Elimination (z.B. die Extraktion der beiden Komponenten einer Und-Aussage).

## A.4 Kategorien

Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und struktur erhaltenen Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen,  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie [43, 11]:

**Definition A.4.1** (Kategorie). Eine *Kategorie*  $C$  besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eine Klasse<sup>5</sup>  $\text{Ob}(C)$ ; die Elemente von  $\text{Ob}(C)$  heißen *Objekte von*  $C$ .
- Zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{Ob}(C)$  einer Menge  $\text{Mor}_C(X, Y)$ ; die Elemente von  $\text{Mor}_C(X, Y)$  heißen *Morphismen von*  $X$  *nach*  $Y$  *in*  $C$ . (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten  $X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$  einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ: \text{Mor}_C(Y, Z) \times \text{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \text{Mor}_C(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für jedes Objekt  $X$  in  $C$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_X \in \text{Mor}_C(X, X)$  mit folgender Eigenschaft: Für alle  $Y \in \text{Ob}(C)$  und alle Morphismen  $f \in \text{Mor}_C(X, Y)$  bzw.  $g \in \text{Mor}_C(Y, X)$  gilt

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{und} \quad \text{id}_X \circ g = g.$$

(Dadurch ist  $\text{id}_X$  eindeutig bestimmt und heißt *Identitätsmorphismus von*  $X$  *in*  $C$ .)

- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte  $W, X, Y, Z$  in  $C$  und alle Morphismen  $f \in \text{Mor}_C(W, X)$ ,  $g \in \text{Mor}_C(X, Y)$  und  $h \in \text{Mor}_C(Y, Z)$  gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

---

<sup>5</sup>Klassen sind eine Verallgemeinerung von Mengen; so gibt es etwa die Klasse aller Mengen [24, 56].

**Caveat A.4.2.** Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln!

**Beispiel A.4.3** (leere Kategorie). Die *leere Kategorie* ist die (eindeutig bestimmte) Kategorie, deren Objektklasse die leere Menge ist.

**Beispiel A.4.4** (Gruppen als Kategorien). Sei  $G$  eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie  $C_G$ :

- Objekte: Die Kategorie  $C_G$  besitze genau ein Objekt, etwa  $0$ .
- Morphismen: Es sei  $\text{Mor}_C(0, 0) := G$ .
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Mor}_C(0, 0) \times \text{Mor}_C(0, 0) &\longrightarrow \text{Mor}_C(0, 0) \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

**Beispiel A.4.5** (Mengenlehre). Die Kategorie **Set** der Mengen besteht aus:

- Objekte: Es sei  $\text{Ob}(\text{Set})$  die Klasse(!) aller Mengen.
- Morphismen: Sind  $X$  und  $Y$  Mengen, so sei  $\text{Mor}_{\text{Set}}(X, Y)$  die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen  $X \rightarrow Y$ .
- Verknüpfungen: Sind  $X, Y$  und  $Z$  Mengen, so sei die Verknüpfung  $\text{Mor}_{\text{Set}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\text{Set}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\text{Set}}(X, Z)$  die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist  $X$  eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus  $\text{id}_X$  von  $X$  in **Set**.

**Beispiel A.4.6** (Algebra).  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$ Kategorie der  $\mathbb{R}$ -Vektorräume Die Kategorie  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorräume besteht aus:

- Objekte: Es sei  $\text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{R}})$  die Klasse aller  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.
- Morphismen: Sind  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume, so sei  $\text{Mor}_{\text{Vect}_{\mathbb{R}}}(V, W)$  die Menge aller lineare Abbildungen  $V \rightarrow W$ .
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie **Group** der Gruppen, die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen, die Kategorie  $\text{Mod}_R$  der  $R$ -Rechtsmoduln bzw. die Kategorie  ${}_R\text{Mod}$  der  $R$ -Linksmoduln über einem Ring  $R$ , ...

**Beispiel A.4.7** (Topologie). Die Kategorie **Top** der topologischen Räume besteht aus:

- Objekte: Es sei  $\text{Ob}(\text{Top})$  die Klasse aller topologischen Räume.
- Morphismen: Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so sei

$$\text{map}(X, Y) := \text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$ .

- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Alle Begriffe, die sich durch Objekte und (Komposition von) Morphismen ausdrücken lassen, lassen sich zu entsprechenden Begriffen in allgemeinen Kategorien verallgemeinern. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

**Definition A.4.8** (Isomorphismus). Sei  $C$  eine Kategorie. Objekte  $X, Y \in \text{Ob}(C)$  sind *isomorph in  $C$* , wenn es Morphismen  $f \in \text{Mor}_C(X, Y)$  und  $g \in \text{Mor}_C(Y, X)$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind  $f$  und  $g$  *Isomorphismen in  $C$*  und wir schreiben  $X \cong_C Y$  (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist:  $X \cong Y$ ).

**Beispiel A.4.9** (Isomorphismenbegriffe).

- Objekte in **Set** sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.
- Objekte in **Group**, **Ab**,  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$ , ... sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.
- Objekte in **Top** sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind.

**Definition A.4.10** (Automorphismengruppe). Sei  $C$  eine Kategorie und sei  $X \in \text{Ob}(C)$ . Dann bildet die Menge  $\text{Aut}(X)$  aller Isomorphismen  $X \rightarrow X$  in  $C$  bezüglich der Komposition von Morphismen in  $C$  eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von  $X$  in  $C$* .

## A.5 Funktoren

Die Übersetzung zwischen mathematischen Theorien (d.h. zwischen Kategorien) erfolgt durch sogenannte Funktoren. Grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“ (Abbildung A.2).

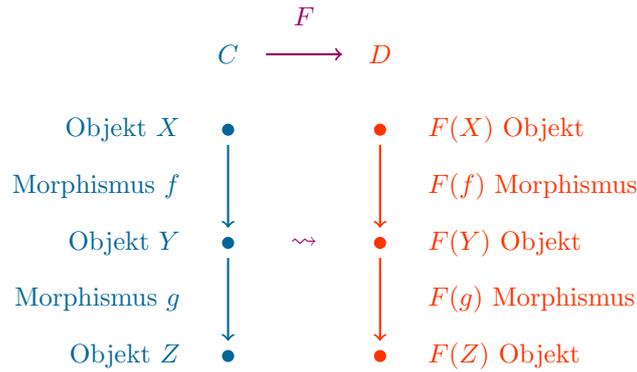


Abbildung A.2.: Funktor, schematisch

**Definition A.5.1** (Funktor). Seien  $C$  und  $D$  Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor*  $F: C \rightarrow D$  besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung  $F: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$ .
- Zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{Ob}(C)$  einer Abbildung

$$F: \text{Mor}_C(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_C(F(X), F(Y)).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle  $X \in \text{Ob}(C)$  ist  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ .
- Für alle  $X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$  und alle  $f \in \text{Mor}_C(X, Y), g \in \text{Mor}_C(Y, Z)$  gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

**Beispiel A.5.2** (Identitätsfunktor). Sei  $C$  eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor*  $\text{Id}_C: C \rightarrow C$  wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\text{Ob}(C) &\longrightarrow \text{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X.\end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle  $X, Y \in \text{Ob}(C)$  betrachten wir

$$\begin{aligned}\text{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \text{Mor}_C(X, Y) \\ f &\longmapsto f.\end{aligned}$$

**Beispiel A.5.3** (Vergissfunktoren). Der Vergissfunktoren  $\text{Top} \longrightarrow \text{Set}$  ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung  $\text{Ob}(\text{Top}) \longrightarrow \text{Ob}(\text{Set})$ , die einem topologischen Raum die unterliegende Menge zuordnet.
- Auf Morphismen: Für alle topologischen Räume  $X, Y$  betrachten wir

$$\begin{aligned}\text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y) = \text{map}(X, Y) &\longrightarrow \text{Mor}_{\text{Set}}(X, Y) \\ f &\longmapsto f.\end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren  $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Set}$ ,  $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Ab}$ , ...

**Beispiel A.5.4** (basierte Vektorräume). Man kann die Mengenlehre über den folgenden Funktor  $F: \text{Set} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$  in die lineare Algebra übersetzen:

- Auf Objekten definieren wir

$$\begin{aligned}F: \text{Ob}(\text{Set}) &\longrightarrow \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ X &\longmapsto \bigoplus_X \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(Wir betrachten dabei eine Menge  $X$  in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von  $\bigoplus_X \mathbb{R}$ .)

- Auf Morphismen definieren wir  $F$  wie folgt: Sind  $X, Y$  Mengen und ist  $f: X \longrightarrow Y$  eine Abbildung, so definieren wir  $F(f): \bigoplus_X \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{R}$  als die eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, die  $f$  von der Basis  $X$  auf ganz  $\bigoplus_X \mathbb{R}$  fortsetzt.

Dies liefert tatsächlich einen Funktor. Analog erhält man auch einen freien Erzeugungsfunktoren  $\text{Set} \longrightarrow \text{Ab}$ .

Eine wesentliche Eigenschaft von Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – Isomorphie erhalten und somit ein geeignetes Konzept für Invarianten liefern:

**Proposition A.5.5** (Funktoren erhalten Isomorphie). *Seien  $C, D$  Kategorien, sei  $F: C \rightarrow D$  ein Funktor und seien  $X, Y \in \text{Ob}(C)$ .*

1. *Ist  $f \in \text{Mor}_C(X, Y)$  ein Isomorphismus in  $C$ , so ist der übersetzte Morphismus  $F(f) \in \text{Mor}_D(F(X), F(Y))$  ein Isomorphismus in  $D$ .*
2. *Inbesondere: Ist  $X \cong_C Y$ , so folgt  $F(X) \cong_D F(Y)$ . Bzw.: Ist  $F(X) \not\cong_D F(Y)$ , so ist  $X \not\cong_C Y$ .*

*Beweis.* Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil.  $\square$

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

**Caveat A.5.6.** Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

## A.6 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und  $\pi$  kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (Bemerkung 3.3.3).

**Definition A.6.1** (Sinus, Kosinus). Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ \sin: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

**Graphische Darstellung.** Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von  $\cos$  bzw.  $\sin$  in Abbildung A.3.

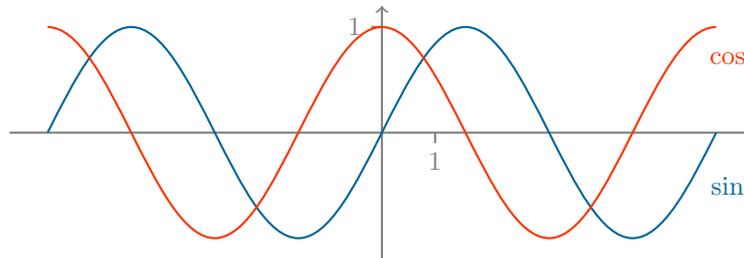


Abbildung A.3.: Graphische Darstellung von  $\cos$  und  $\sin$

**Symmetrie.** Nach Definition gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

**Differenzierbarkeit/Ableitungen.** Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren!)

$$\cos' = -\sin \quad \text{und} \quad \sin' = \cos.$$

**Quadratsumme.** Es gilt

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

denn  $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$  und  $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$ .

**Die Zahl  $\pi$  und ihre Hälfte.** Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass  $\sin(x) > 0$  für alle  $x \in (0, 2]$  gilt; also ist  $\cos$  wegen  $\cos' = -\sin$  auf  $[0, 2]$  streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass  $\cos(2) < 0$  ist. Also hat  $\cos$  in  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle  $x_0$ . Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist  $\cos(\pi/2) = 0$ . Aus der Quadratsumme und der Positivität von  $\sin$  auf  $[0, 2]$  folgt  $\sin(\pi/2) = 1$ .

**Additionstheoreme.** Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\end{aligned}$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \quad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

**Periodizität.** Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x) \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x)\end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Invertierbarkeit.** Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

$$\begin{aligned}\cos: [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ \sin: [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1]\end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit  $\arccos$  bzw.  $\arcsin$ .

## A.7 Das Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Kuriosität der euklidischen Isometriegruppe ist, dass sie paradoxe Zerlegungen zulässt [53, 13]. Wir werden dies im folgenden an einer Variante des Banach-Tarski-Paradoxons skizzieren. Grob gesprochen besagt das Banach-Tarski-Paradoxon, dass man die Einheitssphäre  $S^2$  in endlich viele Teile zerlegen kann, die man durch Isometrien von  $(\mathbb{R}^3, d_2)$  so verschieben und verdrehen kann, dass man sie danach zu zwei isometrischen Kopien von  $S^2$  zusammenfügen kann (Abbildung A.4). Diese endlich vielen Stücke müssen natürlich ziemlich „wild“ aussehen – sie können zum Beispiel insbesondere nicht messbar sein. Tatsächlich beruht der Beweis auch auf einer Form des Auswahlaxioms.

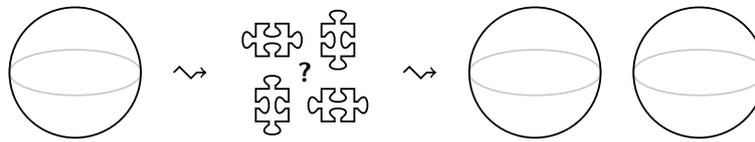


Abbildung A.4.: Das Banach-Tarski-Paradoxon, schematisch

**Definition A.7.1** (paradoxe Teilmenge). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, sei  $G := \text{Isom}(X, d)$  und sei  $Y \subset X$  eine nicht-leere Teilmenge. Die Menge  $Y$  heißt *paradox* (in  $(X, d)$ ), wenn  $Y$  eine paradoxe Zerlegung besitzt. Eine *paradoxe Zerlegung* von  $Y$  ist dabei ein Paar  $((A_g)_{g \in K}, (B_h)_{h \in L})$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Es sind  $K \subset G$  und  $L \subset G$  endliche Teilmengen.
- Sowohl  $(A_g)_{g \in K}$  als auch  $(B_h)_{h \in L}$  sind Familien von Teilmengen von  $Y$  und

$$Y = \left( \bigcup_{g \in K} A_g \right) \cup \left( \bigcup_{h \in L} B_h \right), \quad Y = \bigcup_{g \in K} g \cdot A_g, \quad Y = \bigcup_{h \in L} h \cdot B_h$$

sind *disjunkte* Vereinigungen.

**Beispiel A.7.2** (endliche Mengen sind nicht paradox). Ein einfaches Zählargument zeigt, dass endliche Teilmengen von metrischen Räumen *nicht* paradox sind.

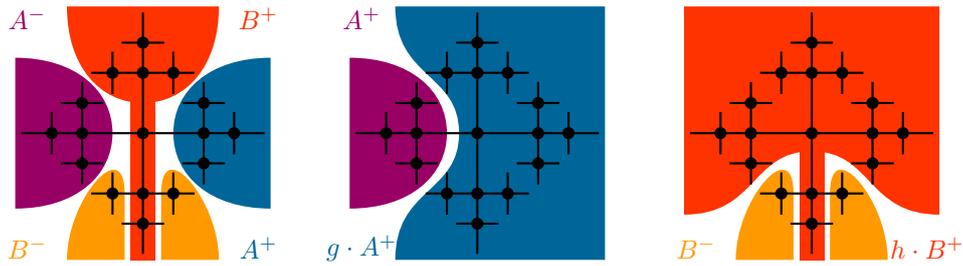


Abbildung A.5.: Ein Beispiel für eine paradoxe Zerlegung des 4-regulären Baums [37, Figure 9.2]

**Beispiel A.7.3** (Lebesgue-messbare Teile?). Analog sieht man auch (da das Lebesgue-Maß unter euklidischen Isometrien invariant ist), dass eine paradoxe Teilmenge  $Y \subset S^2$  (wobei wir  $S^2$  mit der euklidischen Metrik von  $\mathbb{R}^3$  versehen) *keine* paradoxe Zerlegung besitzen kann, deren Partitions Mengen Lebesgue-messbar sind und positives, endliches Maß haben.

**Beispiel A.7.4** (Paradoxität des 4-regulären Baums). Sei  $T = (V, E)$  ein 4-regulärer Baum und sei  $d$  die von  $T$  auf  $V$  induzierte Metrik. Dann ist  $V$  als Teilmenge von  $(V, d)$  paradox, denn: Wir betrachten die in Abbildung A.5 skizzierten Teilmengen  $A^+, A^-, B^+, B^-$  von  $V$ . Nach Konstruktion ist  $V = A^+ \sqcup A^- \sqcup B^+ \sqcup B^-$  eine disjunkte Zerlegung von  $V$ . Andererseits sehen wir in Abbildung A.5 auch, dass es Isometrien  $g, h \in \text{Isom}(V, d)$  mit

$$g \cdot A^+ \sqcup A^- = V = h \cdot B^+ \sqcup B^-$$

gibt (die Isometrie  $g$  verschiebt die „vertikalen Hauptäste“ nach links, die Isometrie  $h$  verschiebt die „horizontalen Hauptäste“ nach unten). Somit erhalten wir eine paradoxe Zerlegung von  $V$ .

Eine genaue Betrachtung der Gruppe  $\text{SO}(3) \subset \text{O}(3)$  liefert die folgende (vereinfachte) Variante des Banach-Tarski-Paradoxons:

**Satz A.7.5** (Banach-Tarski-Paradoxon/Hausdorff-Paradoxon). *Es gibt eine abzählbare Teilmenge  $D \subset S^2$  mit der Eigenschaft, dass  $S^2 \setminus D$  als Teilmenge von  $(\mathbb{R}^3, d_2)$  paradox ist.*

*Beweisskizze.* Um die Paradoxität nachzuweisen, verwenden wir, dass die Isometriegruppe von  $(\mathbb{R}^3, d_2)$  hinreichend kompliziert ist. Nach Definition der Einheitssphäre gilt  $g(S^2) \subset S^2$  für alle  $g \in \text{Isom}_0(\mathbb{R}^3, d_2) \cong \text{O}(3)$  (mit dem Isomorphismus aus Satz 3.4.5). Insbesondere trifft diese Invarianz dann auch auf die Untergruppe  $\text{SO}(3) := \{A \in \text{O}(3) \mid \det A = 1\} \subset \text{O}(3)$  zu.

Sei  $F \subset \text{SO}(3)$  die Untergruppe, die von den Matrizen

$$a := \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Man kann zeigen, dass diese Gruppe  $F$  eine sogenannte freie Gruppe vom Rang 2 ist und dass  $S := \{a, b\}$  ein freies Erzeugendensystem von  $F$  ist [53, 37]. Insbesondere ist dann  $T := \text{Cay}(F, S)$  ein 4-regulärer Baum [37]. Nach Beispiel A.7.4 ist die Knotenmenge von  $T$  paradox; man beachte dabei, dass man die paradoxe Zerlegung so wählen kann, dass die entsprechenden Isometrien sogar durch Linkstranslation mit Gruppenelementen aus  $F$  gegeben sind.

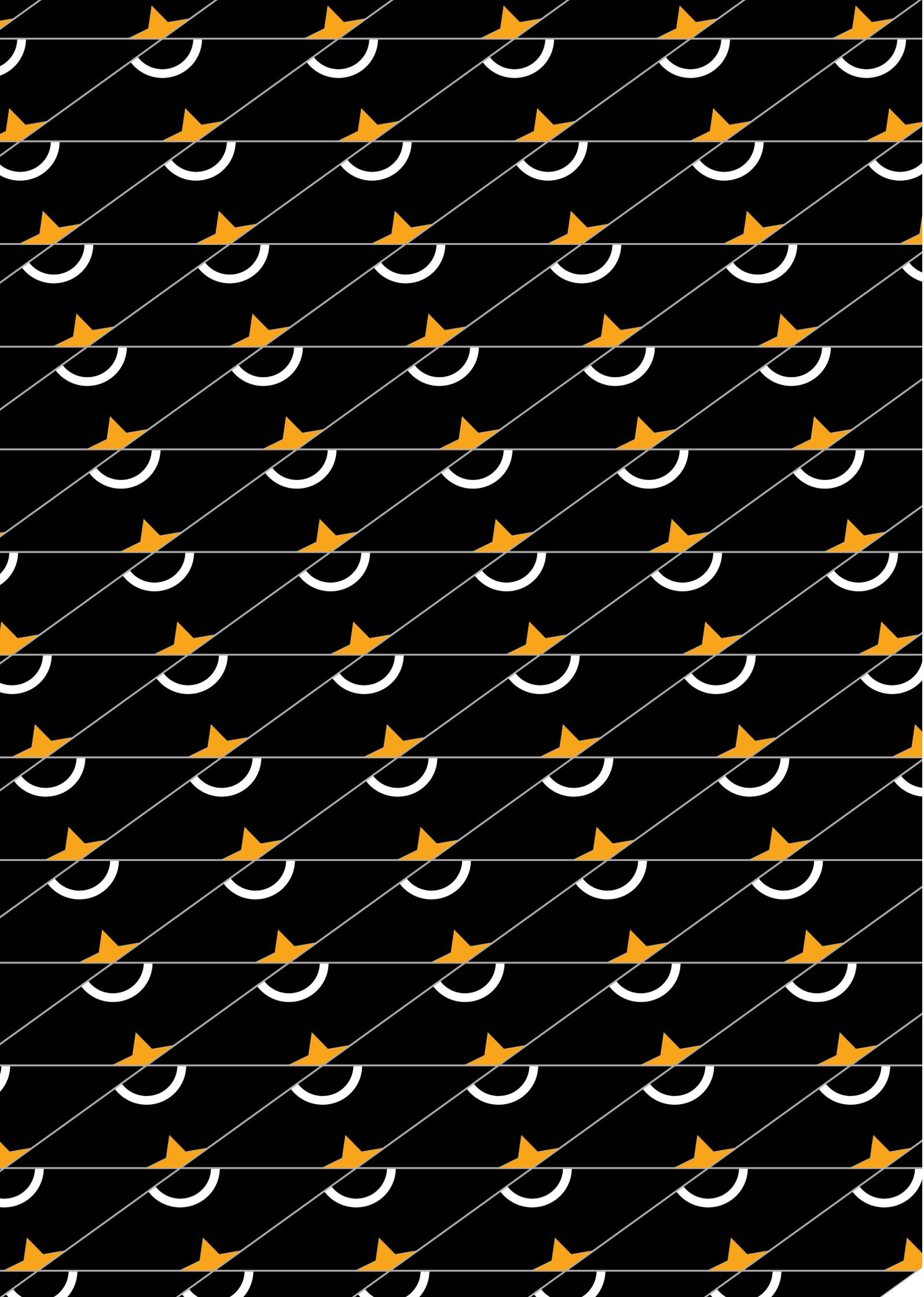
Die Paradoxität von  $T$  vererbt sich folgendermaßen auf  $S^2$ : Die Elemente von  $\text{SO}(3)$  operieren auf  $S^2$  als Rotationen um Geraden; jedes nicht-triviale Element von  $\text{SO}(3)$  hat also genau zwei Fixpunkte in  $S^2$ . Sei  $D' \subset S^2$  die Menge aller Fixpunkte von nicht-trivialen Elementen aus  $F$ ; also ist  $D := F \cdot D' = \bigcup_{g \in F} g(D')$  abzählbar. Insbesondere haben dann die nicht-trivialen Elemente von  $F$  keine Fixpunkte in  $S^2 \setminus D$  und  $S^2 \setminus D$  zerlegt sich somit in eine disjunkte Vereinigung von freien  $F$ -Bahnen. Mit dem Auswahlaxiom können wir ein Repräsentantensystem für diese  $F$ -Bahnen in  $S^2 \setminus D$  wählen und damit aus der gewählten paradoxen Zerlegung von  $T$  bahnenweise eine paradoxe Zerlegung von  $S^2 \setminus D$  konstruieren [53, 37]. Also ist  $S^2 \setminus D$  paradox.  $\square$

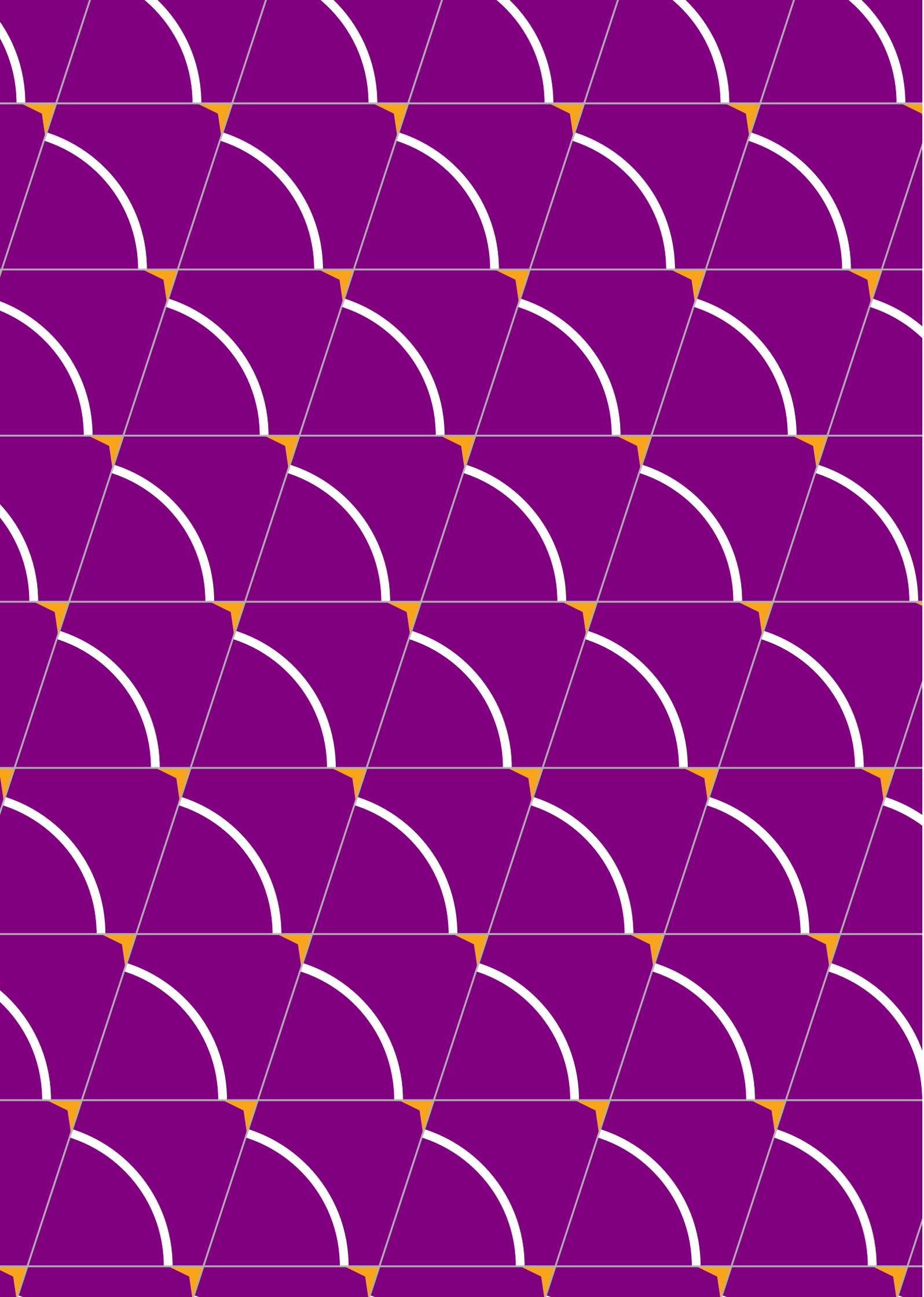
Mit einer sorgfältigeren Analyse kann man auch paradoxe Zerlegungen für  $S^2$  und allgemeinere Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$  konstruieren [53].

**Ausblick A.7.6 (Amenabilität).** Paradoxe Zerlegungen spielen auch in der großen Geometrie eine wichtige Rolle. Es stellt sich heraus, dass die Nicht-Existenz paradoxer Zerlegungen diverse geometrische Charakterisierungen besitzt, die an vielen Stellen auf natürliche Weise auftreten (z.B. in der geometrischen Gruppentheorie, in der Funktionalanalysis, ...) [53, 48, 13, 37].

## A.8 Penrose-Puzzle

Aus den Vorlagen auf den folgenden beiden Seiten können Teile für eine rhombische Penrose-Parkettierung gefertigt werden.



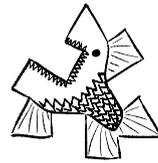




B

Übungsblätter

---



# Geometrie: Woche 1

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

13. April 2021

---

## Leseauftrag (für die Vorlesung am 13. April).

- Registrieren Sie sich auf GRIPS für diese Vorlesung.

In der ersten Vorlesung werden wir Organisatorisches besprechen und uns mit einem thematischen Überblick sowie den wichtigsten Zielen der Vorlesung beschäftigen.

Nach dieser ersten Vorlesung wird das Lesematerial für die zweite Vorlesung bereitgestellt. Im restlichen Verlauf des Semesters wird das Material für die gesamte Woche  $n + 1$  jeweils am Freitag der Woche  $n$  zur Verfügung gestellt.

## Leseauftrag (für die Vorlesung am 16. April).

- Überlegen Sie sich, wie Sie Ihr Selbststudium effizient und erfolgreich gestalten können, z.B.: Wann bearbeiten Sie die Leseaufträge? Wie stellen Sie sicher, dass Sie nicht nur das Material kurz überfliegen, sondern sich wirklich eingehend damit beschäftigen? Wann/Wie „treffen“ Sie sich mit anderen Vorlesungsteilnehmern, um die Themen und Fragen zu besprechen? Wie/Wo stellen Sie Fragen, die beim Lesen des Skriptes oder beim Bearbeiten der Übungsaufgaben auftreten? Welche Notizen möchten Sie sich während der Zoom-Treffen der Vorlesungen und Übungen machen? Welche zusätzlichen Quellen möchten Sie verwenden? Wie integrieren Sie die Bearbeitung der Übungsaufgaben in den restlichen Ablauf? Wann/Wie bauen Sie regelmäßige Pausen von der Arbeit am Computer ein?
- Registrieren Sie sich für den Text-Chat und interagieren Sie mit anderen Teilnehmern!
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 1.2 *Axiome der Mini-Geometrie*.
- Lesen Sie Kapitel 1.3 *Axiome vs. Modelle*.
- (Optional.) Lesen Sie Anhang A.2 *Hilberts Axiomatik*.

## Fingerübung (Mini-Geometrie).

1. Formulieren Sie die Axiome der Mini-Geometrie nach der Ersetzung von „Punkt“ durch „Blorx“, von „Gerade“ durch „Portal“ und von „liegt auf“ durch „flitzt durch“.
2. Wie lautet in dieser Variante die Definition von „Schnittpunkt blorx“?
3. Von „parallel“?
4. Wie lautet der Satz „Jeder Blorx flitzt durch mindestens acht Portale.“ in gewöhnlicher Mini-Geometrie?

*Hinweis.* Lösungen zu *Fingerübungen* werden nicht abgegeben/korrigiert.

**Aufgaben** (für die Übungen am April 20–23). Im ersten Übungstermin besteht die Gelegenheit, den Übungsleiter und die anderen Übungsteilnehmer besser kennenzulernen und es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 1) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 0.1** (endliche Mini-Geometrie-Modelle). Ein Modell  $(P, G, \sqsubset)$  von Mini-Geometrie ist *endlich*, wenn die Menge  $P$  endlich ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Ist  $(P, G, \sqsubset)$  ein endliches Mini-Geometrie-Modell, so ist  $G$  endlich.
2. Ist  $(P, G, \sqsubset)$  ein Mini-Geometrie-Modell und ist  $G$  endlich, so ist  $P$  endlich.

**Aufgabe 0.2** (Modelle über  $\mathbb{F}_2$ ). Zeichnen Sie  $A(\mathbb{F}_2)$  und  $A(\mathbb{F}_2^3)$  und erklären Sie Ihre Bilder.

**Aufgabe 0.3** (Unabhängigkeit). Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel  $(u, v, w, x)$  von Punkten, wobei die Punkte  $u, v$ , die Punkte  $v, w$ , die Punkte  $w, x$  und die Punkte  $x, u$  je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist  $(u, v, w, x)$  ein Viereck in Mini-Geometrie, so ist  $(u, v, w)$  ein Dreieck in Mini-Geometrie.
2. Ist  $(x, y, z)$  ein Dreieck in Mini-Geometrie, so ist  $(x, y, z, z)$  ein Viereck in Mini-Geometrie.

**Aufgabe 0.4** (Gradsummen). Sei  $X = (V, E)$  ein Graph. Ist  $v \in V$ , so ist

$$\deg v := |\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

der *Grad von  $v$  (in  $X$ )*.

1. Zeigen Sie: Ist  $(V, E)$  ein Graph mit endlich vielen Knoten, so gilt

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|.$$

2. Folgern Sie: Die Anzahl der Menschen, die heute einen Abstand von weniger als 1.5 Metern zu einer ungeraden Anzahl von Menschen hatten, ist gerade.

**Bonusaufgabe** (Die Schule von Athen).



1. Woher kennen Sie dieses Bild?
2. Wo sind auf diesem Bild Platon, Aristoteles, Pythagoras und Euklid?
3. Warum ist Hilbert (der Mathematiker mit Hut) nicht abgebildet?

# Geometrie: Woche 2

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

20. April 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 20. April). Wir machen nun einen kleinen Exkurs: Wir formalisieren ein Fragment von Mini-Geometrie im Beweisassistenten Lean.

- Lesen Sie Kapitel 1.4 *Formalisierung und Verifikation*.  
Es geht nicht darum, dass Sie hier jedes Detail verstehen; wichtig ist aber, die grundsätzliche Struktur und die enthaltenen mathematischen Schlüsse wiederzuerkennen. Wir werden in der Vorlesung ausführlich über diese Implementierung sprechen.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.3 *Eine viel zu kurze Einführung in Lean*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 23. April).

- Lesen Sie Kapitel 1.5 *Symmetrie*.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.4 *Kategorien*.
- Lesen Sie Kapitel 1.6.1 *Ramsey-Zahlen*.

In den nächsten Vorlesungen werden wir weitere Anwendungen der Mini-Geometrie bzw. Graphentheorie betrachten.

**Fingerübung** (Formelsalat).

1. Wie kann man die Schnittpunkteigenschaft in Formeln in einem Mini-Geometrie-Modell  $(P, G, \sqsubset)$  schreiben?
2. Wie kann man die Parallelitätseigenschaft in Formeln in einem Mini-Geometrie-Modell  $(P, G, \sqsubset)$  schreiben?
3. Wie kann man folgende Formel in einem Mini-Geometrie-Modell  $(P, G, \sqsubset)$  kurz in Worten schreiben?

$$\exists g \in G \quad \forall h \in G \quad g = h$$

4. Wie kann man folgende Formel in einem Mini-Geometrie-Modell  $(P, G, \sqsubset)$  kurz in Worten schreiben?

$$\exists x \in G \quad \forall g \in G \quad x \sqsubset g$$

**Aufgaben** (für die Übungen am April 27–30). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 1) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 1.1 (Graphen).** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Ist  $(V, E)$  ein Graph, so gilt:

$$\forall v \in V \quad \exists e \in E \quad v \in e$$

2. Ist  $(V, E)$  ein Graph, so gilt:

$$|V| = 2021 \implies |E| \leq 20212021$$

**Aufgabe 1.2 (Unabhängigkeit).** Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel  $(u, v, w, x)$  von Punkten, wobei die Punkte  $u, v$ , die Punkte  $v, w$ , die Punkte  $w, x$  und die Punkte  $x, u$  je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ein Viereck ist *nicht-entartet*, wenn alle vier Eckpunkte verschieden sind. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sind  $(u, v, w)$  und  $(u, w, z)$  Dreiecke in Mini-Geometrie, so ist  $(u, v, w, z)$  ein Viereck in Mini-Geometrie.
2. Ist  $(u, v, w, x)$  ein nicht-entartetes Viereck in Mini-Geometrie, so ist die eindeutige Gerade durch  $u$  und  $v$  parallel zu der eindeutigen Gerade, auf der die Punkte  $w$  und  $x$  liegen.

**Aufgabe 1.3 (Die Fano-Ebene).** Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie, dass  $P(K)$  tatsächlich ein Modell für Mini-Geometrie ist.
2. Sei  $K$  ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte und Geraden in der Mini-Geometrie  $P(K)$ .
3. Wie kann man untenstehendes Bild als Skizze von  $P(\mathbb{F}_2)$  verstehen? Beschriften Sie insbesondere alle Punkte und Geraden geeignet!



**Aufgabe 1.4 (Übungsaufgaben).** Eine Gruppe von 17 Studenten bearbeitet drei Übungsaufgaben. Je zwei Studenten diskutieren eine dieser drei Aufgaben miteinander. Zeigen Sie, dass es dann drei Studenten und eine Aufgabe A gibt, so dass je zwei dieser drei Studenten über A diskutiert haben.

*Hinweis.* Verwenden Sie ein geeignetes Schubfachargument und Mini-Ramsey.

**Bonusaufgabe (Schulbuch-Geraden).**

1. Extrahieren Sie aus einem Mathematik-Schulbuch Ihrer Wahl eine „Definition“ des Begriffes „Gerade“.

*Hinweis.* Wie bei jedem Zitat ist eine Quellenangabe erforderlich!

2. Handelt es sich dabei eher um eine axiomatische oder eher um eine konkrete Definition?
3. Welchen Präzisionsgrad messen Sie dieser „Definition“ bei?
4. Welche kritischen Fragen könnte ein Schüler dazu stellen?

# Geometrie: Woche 3

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

23. April 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 27. April). Diese Woche lernen wir ein paar Klassiker aus der Graphentheorie und einfache Anwendungen davon kennen.

- Lesen Sie Kapitel 1.6.2 *Das Spiel SET*.
- Lesen Sie Kapitel 1.6.3 *Strategie via Symmetrie*.
- Lesen Sie Kapitel 1.6.4 *Der Heiratssatz* bis zum Ende des Beweises des Heiratssatzes.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 30. April).

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 1.6.4 *Der Heiratssatz*.
- Lesen Sie Kapitel 1.7.1 *Geometrische Realisierung von Graphen*.
- (Optional). Lesen Sie Anhang A.5 *Funktoren*.

In der nächsten Vorlesung werden wir uns mit dem eulerschen Polyedersatz und ersten Anwendungen davon beschäftigen.

**Fingerübung** (Symmetrie in Spielen?).

1. Gewinnt der erste Spieler sicher bei Tic-Tac-Toe, indem er den ersten Zug in das zentrale Feld setzt und im folgenden die Züge des zweiten Spielers am zentralen Feld punktspiegelt?
2. Gewinnt Schwarz sicher bei Schach, indem es die an der „horizontalen Mittellinie“ gespiegelten Züge von Weiß spielt?
3. Bestimmen Sie die Symmetrien des Mühle-Spielbretts.
4. Bestimmen Sie die Symmetrien des Blokus-Trigon-Spielbretts.

**Aufgaben** (für die Übungen am 4.–7. Mai). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 2) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 2.1 (Isomorphie und Symmetrie).** Seien  $M$  und  $M'$  die Mini-Geometrie-Modelle zu den Graphen  $(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 1\}\})$  bzw.  $(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 2\}\})$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt  $M \cong_{\text{MG}} M'$ .
2. Die Gruppe  $\text{Aut}_{\text{MG}}(M)$  enthält genau zwei Elemente.

**Aufgabe 2.2 (kleine Mini-Geometrien).** Gibt es an dem folgenden Beweis etwas auszusetzen? Ist die behauptete Aussage überhaupt wahr? Begründen Sie Ihre Antworten!

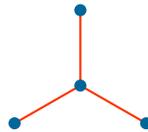
*Behauptung.* Bis auf Isomorphie von Mini-Geometrien gibt es höchstens ein Mini-Geometrie-Modell  $(P, G, \sqsubset)$  mit  $|P| = 4$  und  $|G| = 2$ .

*Beweis.* Seien  $M = (P, G, \sqsubset)$  und  $M' = (P', G', \sqsubset')$  Modelle von Mini-Geometrie mit  $|P| = 4 = |P'|$  und  $|G| = 2 = |G'|$ . Dann gibt es also Bijektionen  $f: P \rightarrow P'$  und  $F: G \rightarrow G'$ . Seien  $f': P' \rightarrow P$  und  $F': G' \rightarrow G$  die inversen Bijektionen. Dann sind  $(f, F): M \rightarrow M'$  und  $(f', F'): M' \rightarrow M$  zueinander inverse Isomorphismen von Mini-Geometrien.  $\square$

**Aufgabe 2.3 (Dreifuß).** Wir betrachten die unten schematisch dargestellte Situation; eine solche Konstellation ist ein *Dreifuß*.

1. Definieren Sie die Dreifuß-Bedingung in der Sprache der Mini-Geometrie.
2. Wie lautet diese Bedingung in Mini-Geometrie-Modellen? (in Worten)
3. Wie lautet diese Bedingung in Mini-Geometrie-Modellen? (als logische Formel)
4. Wie kann man diese Bedingung in Lean als `is_tripod` formalisieren?

*Hinweis.* Fügen Sie diese Definition zu `minigeometry_exercise.lean` hinzu. Probieren Sie auf jeden Fall in Lean aus, ob ihre Implementierung keine Beschwerden von Lean hervorruft.



**Aufgabe 2.4 (Dreifußdreieck).** Sei  $(x, y, z)$  ein Dreieck in Mini-Geometrie und sei  $(m, x, y, z)$  ein Dreifuß „mit Zentrum  $m$ “ (Aufgabe 2.3).

1. Zeigen Sie, dass dann auch  $(m, x, y)$  ein Dreieck in Mini-Geometrie ist. Illustrieren Sie Ihren Beweis durch eine geeignete Skizze.
2. Vervollständigen Sie den Beweis von `tritri` in `minigeometry_exercise.lean` in Lean. Verwenden Sie den Beweis aus der ersten Teilaufgabe als Grundlage und kommentieren Sie Ihren Lean-Code entsprechend.

**Bonusaufgabe (Graphen aus Molekülen).**

1. Erklären Sie, wie man aus Molekülen Graphen erhalten kann.  
*Hinweis.* Graphen in unserem Sinne lassen keine Unterscheidungen zwischen verschiedenen Arten von Knoten oder Kanten zu! Das ist also eine sehr grobe Transformation von Molekülen zu Graphen.
2. Geben Sie Beispiele für Isomere, die zu nicht-isomorphen Graphen führen.

**Bonusaufgabe (Isomorphie linearer Mini-Geometrien).** Sei  $K$  ein Körper und seien  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $A(K^n) \cong_{\text{MG}} A(K^m)$ . Zeigen Sie, dass dann  $n = m$  gilt.

# Geometrie: Woche 4

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

30. April 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 4. Mai). Wir formulieren und beweisen den eulerschen Polyedersatz; außerdem lernen wir erste Anwendungen dieses Satzes kennen.

- Wiederholen Sie die Begriffe *wegzusammenhängend* und *Wegzusammenhangskomponente*.
- Lesen Sie Kapitel 1.7.2 *Der eulersche Polyedersatz*.
- Lesen Sie Kapitel 1.7.3 *Anwendung: Färbungen und Nicht-Planarität*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 7. Mai). Nach der Mini-Geometrie betrachten wir nun einen konkreteren Zugang zur Geometrie, nämlich die metrische Geometrie. Zunächst wiederholen wir einfache Grundbegriffe und Beispiele.

- Lesen Sie Kapitel 2.1 *Metrische Räume*.
- Wozu haben Sie metrische Räume bisher im Studium verwendet?

**Fingerübung** (Färbung von Landkarten).

1. Wieviele Knoten hat der duale Graph zur Deutschlandkarte (aufgeteilt in Bundesländer)?
2. Wieviele Kanten hat dieser Graph?
3. Wieviele Farben benötigen Sie, um eine Deutschlandkarte, aufgeteilt in Bundesländer, zu färben?
4. Wieviel Farben benötigen Sie, um eine Karte von Bayern, aufgeteilt in Land-/Stadtkreise, zu färben?

**Aufgaben** (für die Übungen am 11.–14. Mai). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 3) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 3.1** (Einbettbarkeit). Sei  $X$  der Graph  $(\{0, 1, 2\}, \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\})$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (nicht nur anschaulich, sondern mit geeigneten Sätzen/Konstruktionen)!

1. Der Graph  $X$  ist in  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$  einbettbar.
2. Der Graph  $X$  ist in  $\mathbb{R}$  einbettbar.

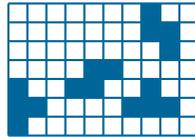
**Aufgabe 3.2** (L-Tromino-Spiel). Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem  $2021 \times 2021$ -Schachbrett, bei dem das zentrale Feld (also das 1011-te Feld in der 1011-ten Zeile) fehlt:

- Zu Beginn ist das Spielbrett leer.
- Ein Zug besteht darin, einen Stein der Form  (sog. *L-Tromino*) so auf drei Schachbrett-Felder zu setzen, dass er sich mit keinem anderen Stein überlappt; der Stein darf dabei auch gedreht werden: 
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Stein setzen kann, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.

*Hinweis.* Verwenden Sie eine geeignete Symmetrie!

**Aufgabe 3.3** (Zug für Zug). Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf dem untenstehenden Spielbrett:



- Spieler A beginnt und setzt eine Spielfigur auf ein freies (d.h. weißes) Feld seiner Wahl. Danach macht Spieler B den ersten normalen Zug.
- Ein Zug besteht darin, diese Figur auf ein horizontal oder vertikal benachbartes Feld zu setzen, das die Figur bisher noch *nicht* besucht hat. Insbesondere ziehen beide Spieler mit derselben Figur!
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Modellieren Sie das Spielbrett durch einen geeigneten Graphen und geben Sie ein perfektes Matching für diesen Graphen an (Skizzen genügen).
2. Erklären Sie, warum/wie dies zu einer Gewinnstrategie für Spieler B führt.

**Aufgabe 3.4** (SET). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Wieviele Geraden gibt es in der Mini-Geometrie  $A(\mathbb{F}_3^4)$ ?
2. In wievielen SETs ist Ihre Lieblings-SET-Karte enthalten?

*Hinweis.* Nutzen Sie geeignete Symmetrien und zählen Sie nichts mehrfach.

**Bonusaufgabe** (Mathematik-Wettbewerbe).

1. Wieviele Runden gibt es beim *Bundeswettbewerb Mathematik*? Wie laufen diese ab? Zu welchem Zeitpunkt sollten Lehrer ihre Klassen darüber informieren?
2. Welche Mathematik-Wettbewerbe für Schüler gibt es in Bayern?

# Geometrie: Woche 5

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

7. Mai 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 11. Mai). Wir führen „Geraden“ in metrischer Geometrie ein und betrachten die Länge von Kurven in metrischen Räumen.

- (Optional) Werfen Sie einen Blick auf die (sehr spärliche) Implementierung metrischer Räume in Lean: `metricspace.lean` (S. C.10ff).
- Lesen Sie Kapitel 2.2 *Geodäten*.
- Lesen Sie Kapitel 2.3 *Länge von Kurven* bis Proposition 2.3.3.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 14. Mai). In metrischen Räumen können Sphären etc. definiert werden. Insbesondere erhalten wir so einen Kreisbegriff in der euklidischen Ebene. Wir gelangen so zu einem zentralen Thema der Schulgeometrie: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 2.3.
- Lesen Sie Kapitel 2.4.1 *Kreise, Sphären, Bälle*.
- Lesen Sie Kapitel 2.4.2 *Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal* bis Bemerkung 2.4.8.

Nächste Woche werden wir uns weiter mit Konstruierbarkeit befassen sowie mit Symmetrie in metrischen Räumen und dem Extremalprinzip.

**Fingerübung** (Geodäten in der Ebene). Welche der folgenden Abbildungen sind Geodäten in den jeweiligen metrischen Räumen?

1.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$
2.  $[0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$
3.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \sqrt{2} \cdot t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$
4.  $[0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto 1/\sqrt{2} \cdot t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$
5.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$
6.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto t \cdot (1, 1)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

**Aufgaben** (für die Übungen am 18.–21. Mai). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 4) besprochen.

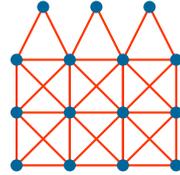
*Bitte wenden*

**Aufgabe 4.1** (Isometrien der Ebene). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Es gilt  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2) = \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_1)$ .
2. Es gilt  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2) = \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ .

*Hinweis.* Welche Isometrien von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  kennen Sie?

**Aufgabe 4.2** (die Villa des Nikolaus). Die untenstehende Skizze eines Graphen spezifiziert, wieviele Knoten es gibt und welche Knoten durch Kanten verbunden sind. Ist dieser Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort!



*Hinweis.* Man kann die Lösung „sehen“! (Und dann formal begründen ...)

**Aufgabe 4.3** (Sechsfarbensatz). Beweisen Sie den Sechsfarbensatz: Für jeden endlichen (zusammenhängenden) planaren Graphen  $(V, E)$  gibt es eine Abbildung  $c: V \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  mit

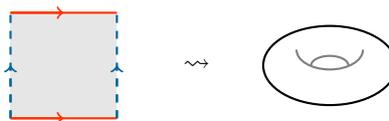
$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

*Hinweis.* Behandeln Sie induktiv Knoten von niedrigem Grad.

**Aufgabe 4.4** (Quintrix). König Quintrix herrscht über ein Reich, bestehend aus fünf zusammenhängenden Provinzen, wobei je zwei dieser Provinzen eine gemeinsame Grenze positiver Länge besitzen. Begründen Sie Ihre Antworten!

1. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planeten befinden? Oder auf einer Scheibe?
2. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eines Torus-Planetens befinden?

*Hinweis.* Den Torus erhält man durch folgende Verklebung der Seiten eines Quadrats; es kann hilfreich sein, Skizzen in dieser Quadratansicht zu erstellen.



**Bonusaufgabe** (Einbettbarkeit in  $\mathbb{R}^3$ ). Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

die sogenannte *Momentenkurve*.

1. Skizzieren Sie die Momentenkurve in  $\mathbb{R}^3$ .
2. Seien  $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$  und sei  $M(t_1, \dots, t_4) := (t_j^{k-1})_{j,k \in \{1, \dots, 4\}}$  (eine reelle  $4 \times 4$ -Matrix). Zeigen Sie: Sind die vier Zahlen  $t_1, \dots, t_4$  alle verschieden, so ist  $\det M(t_1, \dots, t_4) \neq 0$ .
3. Schließen Sie daraus: Sind  $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$  vier verschiedene Zahlen, so liegen die Punkte  $\mu(t_1), \dots, \mu(t_4)$  *nicht* in einer gemeinsamen Ebene in  $\mathbb{R}^3$ .
4. Folgern Sie: Indem man die Knoten auf die Momentenkurve abbildet und diese Punkte dann durch die Kanten entsprechenden Strecken verbindet, erhält man für jeden endlichen Graphen eine Einbettung nach  $\mathbb{R}^3$ .

# Geometrie: Woche 6

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

14. Mai 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 18. Mai). Wir befassen uns detailliert mit einem Beispiel eines Konstruktionsproblems und beweisen ein Starrheitsresultat für euklidische Symmetrien.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 2.4.2 *Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal*.
- (Optional, wenn Sie bereits die Vorlesung Algebra gehört haben) Wiederholen Sie den Hauptsatz der Galoistheorie und den Zusammenhang zwischen Galoistheorie und Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.
- Lesen Sie Kapitel 2.5 *Symmetrie*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 21. Mai). Ein wichtige Lösungsmethode ist das Extremalprinzip; insbesondere bei geometrischen Problemen ist es häufig einsetzbar. Nach der metrischen Geometrie spezialisieren wir uns auf die euklidische Geometrie und nehmen dazu das Skalarprodukt systematisch zur Hilfe.

- Lesen Sie Kapitel 2.6 *Das Extremalprinzip*.
- Wiederholen Sie die Begriffe *Norm* und *Skalarprodukt*.
- Lesen Sie Kapitel 3.1.1 *Normierte Räume*.
- Lesen Sie Kapitel 3.1.2 *Skalarprodukte*.

Nächste Woche werden wir uns mit Orthogonalität und dem analytischen Zugang zur Länge von Kurven beschäftigen.

**Fingerübung** (Konstruierbarkeit). Sei  $M := \{(0, 0), (1, 0)\}$ . Wie kann man die folgenden Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal, ausgehend von  $M$ , lösen? Warum sind die Konstruktionen durchführbar und warum liefern sie das korrekte Ergebnis?

1. Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1.
2. Konstruktion einer Raute mit Seitenlänge 1.
3. Konstruktion von  $(1/2, \sqrt{3})$ .
4. Konstruktion von  $(0, 1)$ .
5. Konstruktion von  $(1/4, 0)$ .
6. Konstruktion von  $(1/3, 0)$ .

*Hinweis.* Diese Konstruktion benötigt eine Tatsache, die Sie vielleicht schon sehr lange nicht mehr in dieser Form verwendet haben.

**Aufgaben** (für die Übungen am 25.–28. Mai). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 5) besprochen. Der 25. Mai ist Pfingstdienstag (vorlesungsfrei); Details werden vom Übungsleiter bekanntgegeben.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 5.1 (Kollisionsabfrage).** Ein typisches Problem bei der Implementierung von Computerspielen ist, zu entscheiden, ob sich zwei Objekte (z.B. der Spielercharakter und giftige Brühe) überschneiden oder nicht. Wir betrachten zwei quadratische Objekte. Seien  $x, x' \in \mathbb{R}^2$  und

$$Q := [x_1 - 1, x_1 + 1] \times [x_2 - 1, x_2 + 1], \quad Q' := [x'_1 - 1, x'_1 + 1] \times [x'_2 - 1, x'_2 + 1] \subset \mathbb{R}^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Es gilt  $Q \cap Q' \neq \emptyset$ , wenn  $d_2(x, x') \leq \sqrt{2} \cdot 2$ .
2. Es gilt  $Q \cap Q' \neq \emptyset$ , wenn  $d_\infty(x, x') \leq 2$ .

**Aufgabe 5.2 (Mindestabstand).** Zeigen Sie: In einem quadratischen Raum mit Seitenlänge 2 m können sich *nicht* fünf Personen gleichzeitig aufhalten, die alle voneinander den Mindestabstand von 1.5 m einhalten.

*Hinweis.* Die Personen halten sich auf dem (ebenen) Boden auf. Wenden Sie das Schubfachprinzip auf geeignete vier Schubladen an! Vergessen Sie nicht, die „offensichtlichen“ Dinge auch zu beweisen.

**Aufgabe 5.3 (Lochebene).** Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  *nicht* geodätisch ist!

*Hinweis.* Achten Sie darauf, dass Ihr Argument nicht nur anschaulich plausibel, sondern wirklich wasserdicht ist. Setzen Sie einen Widerspruchsbeweis an und überlegen Sie sorgfältig, wie man Information zwischen  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  und  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$  hin- und herschieben kann.

**Aufgabe 5.4** ( $\sqrt{2} = 2$  ?!). Was ist falsch am „Beweis“ in Beispiel 2.3.6? Erklären Sie genau, worin der Fehler besteht und welche Schritte korrekt sind.



**Bonusaufgabe (Alpha-Max-Beta-Min).**

1. Was ist das Alpha-Max-Beta-Min-Verfahren?
2. Wozu/Warum wird es verwendet?

# Geometrie: Woche 7

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

21. Mai 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 25. Mai).

- Vorlesungsfrei!
- Falls Sie Langeweile haben und schon alle anderen Literaturhinweise verschlungen haben:

<https://www.youtube.com/watch?v=87uo2TPrl8>

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 28. Mai). Wir erinnern kurz an Orthogonalität. Danach beginnen wir mit einer etwas analytischeren Betrachtung von Kurven.

- Lesen Sie Kapitel 3.1.3 *Orthogonalität*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.1 *Analytische Grundlagen*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.2 *Länge von Kurven*.

Nächste Woche werden wir noch mehr über Kurven erfahren und uns mit Winkeln auseinandersetzen.

**Fingerübung** (Länge von Kurven). Bestimmen Sie die Längen der folgenden Kurven in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  analytisch:

1.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1, 0)$
2.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$
3.  $[0, 2021] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$
4.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, 0)$
5.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$
6.  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^2)$

**Aufgaben** (für die Übungen am 1.–4. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 6) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 6.1** (Taxi-Kongruenzsätze). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. In  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  sind Sphären von gleichem Radius kongruent: Ist  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und sind  $x, x' \in \mathbb{R}^2$ , so sind die Sphären  $S_x^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$  und  $S_{x'}^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  kongruent.
2. In  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  gilt der Kongruenzsatz SSS: Sind  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  und  $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$  geodätische Dreiecke in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  und gilt

$$L(\gamma_0) = L(\gamma'_0), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma'_1), \quad L(\gamma_2) = L(\gamma'_2),$$

so sind die die Mengen im  $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$  und im  $\gamma'_0 \cup \gamma'_1 \cup \gamma'_2$  in  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  kongruent.

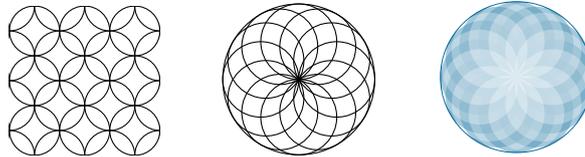
**Aufgabe 6.2** (goldenes Schnittchen). Konstruieren Sie in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^2$  mit

$$d_2(x, y) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

mit Zirkel und Lineal aus der Menge  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ . Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie Durchführbarkeit und Korrektheit.

**Aufgabe 6.3** (Kreise in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X).

1. Vervollständigen Sie `circles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der linken Abbildung erhalten.
2. Vervollständigen Sie `circlecircles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der mittleren Abbildung erhalten.
3. *Bonusaufgabe.* Seien Sie kreativ! Modifizieren Sie das Programm aus der zweiten Teilaufgabe so, dass Sie die rechte Abbildung o. ä. erhalten.



*Hinweis.* Wenn Sie keine eigene L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Installation haben, können Sie den Quellcode unter <https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php> übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!

**Aufgabe 6.4** (Polyduell). In der euklidischen Ebene  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  treffen sich 2021 Personen zu einem Polyduell. Gemäß alter Tradition stellen sie sich so auf, dass die Abstände zwischen je zwei Personen alle verschieden sind. Pünktlich zum offiziellen Startsignal erschießt jeder gleichzeitig denjenigen, der ihm am nächsten ist (bezüglich  $d_2$ ).

1. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Teilnehmer überlebt.

*Hinweis.* Extremalprinzip!

2. Zeigen Sie, dass sich die (geradlinigen!) Flugbahnen zweier Kugeln *nicht* schneiden können.

**Bonusaufgabe** (Origami).

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie Konstruierbarkeit von Punkten in  $\mathbb{R}^2$  via Origami definiert ist und erklären Sie die erlaubten Konstruktionschritte sowohl mathematisch als auch origamisch.
2. Schlagen Sie in der Literatur nach wie sich Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu Konstruierbarkeit mit Origami verhält.

*Hinweis.* Wie immer: Quellen müssen vollständig und korrekt zitiert werden!

# Geometrie: Woche 8

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

28. Mai 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 1. Juni). Wir fahren mit der analytischen Untersuchung von Kurven in Hilberträumen fort und beschäftigen uns mit der Parametrisierung nach Bogenlänge sowie der Krümmung von Kurven.

- Lesen Sie Kapitel 3.2.3 *Parametrisierung nach Bogenlänge*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.4 *Krümmung von Kurven*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 4. Juni). Wir kehren zu Dreiecken zurück und definieren mithilfe des Skalarprodukts und analytischer Begriffe von Kurven die Innenwinkel in euklidischen geodätischen Dreiecken.

- Lesen Sie Anhang A.6 *Elementare Analysis von Sinus und Kosinus*.  
Dies dient nur der Wiederholung; wir werden dies nicht im Detail in der Vorlesung besprechen. Da wir die Resultate verwenden möchten, sollten Sie sicherstellen, dass Sie sich an diese Dinge aus der Analysis erinnern.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.1 *Winkel*.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.2 *Winkelsumme in euklidischen Dreiecken*.
- Wiederholen Sie das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^2$  und Standardsätze zur Berechnung; falls Sie das Lebesgue-Maß noch nicht kennen, genügt auch die Beschreibung von Flächeninhalten über iterierte Riemann-Integrale.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.3 *Flächeninhalte* bis Bemerkung 3.3.9.

Nächste Woche gehen wir weiter auf Flächeninhalte von euklidischen Polygonen ein und beweisen insbesondere den Satz von Pick.

**Fingerübung** (Krümmung von Kurven). Skizzieren Sie die untenstehenden Kurven  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  (mit dem Standardskalarprodukt) und bestimmen Sie die (signierte) Krümmung. Welche Länge haben diese Kurven?

1.  $t \mapsto (t, 0)$
2.  $t \mapsto 1/\sqrt{2} \cdot (t, t)$
3.  $t \mapsto \begin{cases} (\sin t, \cos t) & \text{falls } t \geq 0 \\ (\sin t, 2 - \cos t) & \text{falls } t < 0 \end{cases}$

**Aufgaben** (für die Übungen am 8.–11. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 7) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 7.1 (Orthogonalität).** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Sind  $x, y, z \in V$  mit  $x \perp y$  und  $y \perp z$ , so folgt  $x \perp z$ .
2. Sind  $x, y, z \in V$  mit  $x \perp (y + z)$ , so folgt  $x \perp y$  und  $x \perp z$ .

**Aufgabe 7.2 (Polarisierung und Cauchy-Schwarz in Lean).** Suchen Sie in der mathlib von Lean die folgenden Sachverhalte über Skalarprodukte:

1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,
2. die Polarisierungsgleichung.

Geben Sie jeweils den genauen Namen und die Typ-Signatur der Theoreme an und geben Sie die Module an, in denen sich die Theoreme befinden. Warum gibt es jeweils mehrere Theoreme, die sich damit befassen?

**Aufgabe 7.3 (Perpendikulus).** Der Roboter Perpendikulus lebt in der euklidischen Ebene  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ; aufgrund seines ausgeprägten Orthogonalitätsbewusstseins bewegt er sich auf Perpendikulus-Routen fort:

Eine *Perpendikulus-Route* aus  $n \in \mathbb{N}$  Segmenten ist eine Folge  $(s_1, \dots, s_n)$  von  $n$  geraden Segmenten (d.h. euklidischen Geodäten) in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit folgenden Eigenschaften: Ist  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so hat  $s_j$  die Länge  $j$ , das Segment  $s_j$  endet am Anfang von  $s_{j+1}$  und  $s_{j+1}$  ist orthogonal zu  $s_j$ ; dabei verstehen wir  $s_{n+1}$  als  $s_1$  (insbesondere ist die Route geschlossen). Wir nennen  $n \in \mathbb{N}$  eine *Perpendikulus-Zahl*, wenn es eine Perpendikulus-Route mit  $n$  Segmenten gibt.

1. Zeigen Sie, dass 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Vielfache von 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
3. Warum sind 7, 10 und 12 *keine* Perpendikulus-Zahlen?
4. Zeigen Sie, dass jede Perpendikulus-Zahl durch 8 teilbar ist.

*Hinweis.* Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dann, wie Sie den Kern des Problems durch zwei Gleichungen beschreiben können. Illustrieren Sie Ihre Argumente mit geeigneten Skizzen!



**Aufgabe 7.4 (Kurven-Energie).** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum, seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \rightarrow V$  stetig differenzierbar. Dann definieren wir die *Energie von  $\gamma$*  durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Zeigen Sie, dass  $L(\gamma)^2 \leq 2 \cdot (T_1 - T_0) \cdot E(\gamma)$  und dass Gleichheit genau dann vorliegt, wenn die Funktion  $\|\dot{\gamma}\|$  konstant ist.

*Hinweis.* Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auf einem geeigneten Funktionenraum.

*Bonusaufgabe.* Was bedeutet das in der Praxis? (Z.B. beim Autofahren ...)

**Bonusaufgabe (Lehrplan).** Finden Sie online den Lehrplan Mathematik für Gymnasien in Bayern und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie oft treten die Wörter „Beweis“ und „Definition“ im Lehrplan auf?
2. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für die Zukunft des Fachs „Mathematik“ an Gymnasien?

# Geometrie: Woche 9

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

4. Juni 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 8. Juni). Wir beweisen den Satz von Pick und gehen danach auf die euklidische Isometriegruppe ein.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 3.3.3 *Flächeninhalte*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.1 *Winkeltreue*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 11. Juni). Wir schließen die Beschreibung der euklidischen Isometriegruppe ab und beweisen die klassischen Kongruenzsätze in der euklidischen Ebene.

- Wiederholen Sie *orthogonale Matrizen/Abbildungen* und ihre Eigenschaften (Lineare Algebra).
- Lesen Sie Kapitel 3.4.2 *Die euklidische Isometriegruppe*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.3 *Kongruenz*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.4 *Reguläre Polygone* bis Bemerkung 3.4.16.

Nächste Woche betrachten wir auch reguläre Polyeder sowie Pflasterungen der Ebene. Dann beginnen wir den letzten großen Abschnitt der Vorlesung: Die Konstruktion bzw. Untersuchung der hyperbolischen Ebene.

**Fingerübung** (euklidische Isometrien). Welche der folgenden Matrizen beschreiben (bezüglich der Standardbasis auf  $\mathbb{R}^2$ ) euklidische Isometrien  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ? Skizzieren Sie die Abbildungen!

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.  $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$
5.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
6.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Aufgaben** (für die Übungen am 15.–18. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 8) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 8.1** (gleiche Krümmung). Seien  $\gamma_1, \gamma_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurven mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist  $\|\kappa_{\gamma_1}(t)\|_2 = \|\kappa_{\gamma_2}(t)\|_2$  für alle  $t \in (-1, 1)$ , so folgt  $\gamma_1 = \gamma_2$ .
2. Ist  $\kappa_{\gamma_1}(t) = \kappa_{\gamma_2}(t)$  für alle  $t \in (-1, 1)$ , so folgt  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

**Aufgabe 8.2** (gleiche Winkel). Geben Sie ein Beispiel für einen Winkel  $\alpha \in (0, \pi)$  und für Vektoren  $v_0, \dots, v_4 \in \mathbb{R}^3$  mit

$$\forall_{j,k \in \{1, \dots, 4\}} \quad j \neq k \implies \sphericalangle(v_j - v_0, v_k - v_0) = \alpha.$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

*Hinweis.* Wer wenig rechnen möchte, kann mit einem Würfel beginnen ...

*Bonusaufgabe.* Was hat das mit Methan zu tun?

**Aufgabe 8.3** (kleine Dreiecke). Seien  $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten

$$\Delta(x, y, z) := \{t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0, 1], t_x + t_y + t_z = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nehmen an, dass  $\Delta(x, y, z)$  außer  $x, y, z$  keine weiteren Punkte aus  $\mathbb{Z}^2$  enthält. Zeigen Sie, dass

$$|\det(y - x, z - x)| = 1.$$

*Hinweis.* Warum ist  $(y - x, z - x)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathbb{Z}^2$ ?

**Aufgabe 8.4** (Isometriegruppe des Quadrats). Wir betrachten die folgende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$

$$Q := ([-1, 1] \times \{-1, 1\}) \cup (\{-1, 1\} \times [-1, 1])$$

und den Graphen

$$X := (V, E) := (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}).$$



Wir versehen  $Q$  mit der von der euklidischen Metrik  $d_2$  induzierten Metrik; wir versehen  $V$  mit der von  $X$  induzierten Metrik  $d$ .

1. Zeigen Sie: Ist  $f \in \text{Isom}(Q, d_2)$ , so bildet  $f$  diagonal gegenüberliegende Punkte auf diagonal gegenüberliegende Punkte ab (Extremalprinzip!). Folgern Sie, dass  $\text{Isom}(Q, d_2)$  zu  $\text{Isom}(V, d)$  isomorph ist.
2. Bestimmen Sie die Isometriegruppe von  $(Q, d_2)$ ; d.h. geben Sie die Verknüpfungstabelle oder eine algebraische Beschreibung an. Begründen Sie Ihre Antwort!

**Bonusaufgabe** (Loch Ocht). Der schottische See Loch Ocht ist kreisförmig mit einem Radius von einer Meile. Aufgrund des dichten Nebels ist überhaupt nur erkennbar, was weniger als eine Meile entfernt ist. In diesem See leben acht Ungeheuer (sogenannte Ochties), die ihren Hals und Kopf, ihrem großen Vorbild Nessie nacheifernd, aus dem See recken. Zeigen Sie, dass es dann zwei Ochties gibt, die sich sehen können.

*Hinweis.* Extremalprinzip!

# Geometrie: Woche 10

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

11. Juni 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 15. Juni). Wir setzen die Untersuchung von Regularität/Objekten mit „viel Symmetrie“ fort.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 3.4.4 *Reguläre Polygone*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.5 *Reguläre Polyeder*.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.7 *Das Banach-Tarski-Paradoxon*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 18. Juni). Wir schließen die Untersuchung euklidischer Geometrie mit Pflasterungen der euklidischen Ebene ab und stürzen uns dann in eine etwas exotischere Geometrie: die hyperbolische Geometrie.

- Lesen Sie Kapitel 3.5 *Pflasterungen der euklidischen Ebene*.
- Experimentieren Sie mit Anhang A.8 *Penrose-Puzzle*.
- Lesen Sie Kapitel 4.1 *Was ist riemannsche Geometrie?*

Es geht nicht darum, dass sie dies im Detail verstehen; Sie sollten aber das unterliegende Grundprinzip nachvollziehen können. Nächste Woche werden wir die hyperbolische Ebene basierend auf diesem Grundprinzip einführen. Für unseren Zugang müssen Sie dabei nicht die technischen Details der Definition von Mannigfaltigkeiten, Tangentialbündeln, ... kennen.

**Fingerübung** (Symmetriegruppen). Bestimmen Sie die Isometriegruppen diverser Haushaltsgegenstände (bezüglich der von der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik):

1. Bleistift (rund/dreieckig/sechseckig)
2. Kugelschreiber
3. A4-Papier
4. Teller
5. Tischtennisball
6. Tennisball
7. Steckdose
8. USB-Stecker
9. Pizza-Karton
10. FFP2-Maske

**Aufgaben** (für die Übungen am 22.–25. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 9) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 9.1** (Spieglein, Spieglein, Spieglein, ...). Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto x + a$$

die Translation um  $a$ . Im folgenden betrachten wir Spiegelungen an affinen Hyperebenen bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $\mathbb{R}^n$ . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Man kann  $f$  in eine Komposition von genau 2020 Spiegelungen zerlegen.
2. Man kann  $f$  in eine Komposition von genau 2021 Spiegelungen zerlegen.

*Hinweis.* „Determinante!“ sagte die Tante, die alle Invarianten kannte.



**Aufgabe 9.2** (Isometrien aus Spiegelungen).

1. Zu  $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi]$  sei

$$R_\alpha: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot x.$$

Zeigen Sie, dass man  $R_\alpha$  als Komposition von Spiegelungen in  $\mathbb{R}^2$  (bzgl. des Standardskalarprodukts) schreiben kann. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass jedes Element aus  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$  als Komposition von endlich vielen Spiegelungen in  $\mathbb{R}^n$  (bzgl. des Standardskalarprodukts) geschrieben werden kann.

*Hinweis.* Welche Normalformen/Spektralsätze für orthogonale Matrizen kennen Sie aus der Linearen Algebra?

**Aufgabe 9.3** (Kongruenzsätze).

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .
2. Beweisen Sie den Kongruenzsatz SsW in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

**Aufgabe 9.4** (Gleichseitigkeit für alle!). Der imperiale Hofmathematiker Isosceles des Trigon Empire hat die auf der nächsten Seite abgedruckte Arbeit vorgelegt. Was ist schiefgelaufen? Erklären Sie genau, was korrekt ist und was nicht.

**Bonusaufgabe** (Gruppen aus Molekülen).

1. Welche Symmetriegruppe haben Methanmoleküle? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Welche chemischen Eigenschaften hängen mit der Symmetriegruppe von Molekülen zusammen? Wie? Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

**Bonusaufgabe** (Gruppen aus der Biologie).

1. Geben Sie Beispiele für Blüten und ihre Isometriegruppen. Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Welche Isometriegruppe haben sphärische Viren zumeist? Geben Sie Beispiele für solche Viren und beschreiben Sie die Isometriegruppe genauer. Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

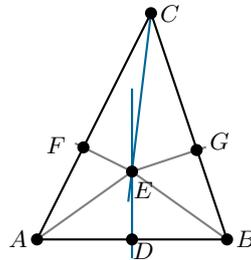
**Satz (Großartiger Gleichseitigkeitssatz von Isosceles).** Jedes geodätische Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  ist gleichseitig, d.h.: Sind  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so gilt

$$\|A - B\|_2 = \|B - C\|_2 = \|C - A\|_2.$$

*Beweis.* Angenommen, die drei Seiten wären absurderweise nicht alle gleich lang, ohne Einschränkung etwa  $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$ .

Sei  $w$  die Winkelhalbierende an der Ecke  $C$ , d.h.  $w$  ist eine Gerade durch  $C$  und die Winkel zwischen  $w$  und  $A - C$  bzw. zwischen  $w$  und  $B - C$  sind gleich groß. Sei  $m$  die Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$ , d.h.  $m$  ist orthogonal zu  $B - A$  und geht durch  $D := 1/2 \cdot (A + B)$ .

Wegen  $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$  haben  $m$  und  $w$  genau einen Schnittpunkt  $E$ . Sei  $F$  der Schnittpunkt der zu  $A - C$  orthogonalen Geraden durch  $E$  mit der Geraden durch  $A$  und  $C$ , und sei  $G$  der Schnittpunkt der zu  $B - C$  orthogonalen Geraden durch  $E$  mit der Geraden durch  $B$  und  $C$ .



Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

1. Nach Pythagoras ist  $\|E - A\|_2 = \|E - B\|_2$ , da  $m$  zu  $B - A$  orthogonal ist und da  $\|D - A\|_2 = 1/2 \cdot \|B - A\|_2 = \|D - B\|_2$ .
2. Es gilt  $\sphericalangle(G - E, C - E) = \sphericalangle(F - E, C - E)$ ; dies folgt aus der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken sowie der Konstruktion von  $w$  als Winkelhalbierende und von  $F$  bzw.  $G$  als Lotfußpunkte. Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir daher

$$\|F - C\|_2 = \|G - C\|_2 \quad \text{und} \quad \|E - F\|_2 = \|E - G\|_2.$$

3. Mit den ersten beiden Schritten und Pythagoras folgt dann außerdem

$$\|A - F\|_2 = \|B - G\|_2.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Der Punkt  $E$  liegt innerhalb des von  $A, B, C$  aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned} \|A - C\|_2 &= \|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= \|B - G\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2. \end{aligned}$$

- Der Punkt  $E$  liegt außerhalb des von  $A, B, C$  aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned} \|A - C\|_2 &= -\|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= -\|B - G\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2. \end{aligned}$$

Es folgt also  $\|A - C\|_2 = \|B - C\|_2$ , im Widerspruch zu unserer grotesken Annahme. ■

# Geometrie: Woche 11

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

18. Juni 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 22. Juni). Wir konstruieren das Halbebene-  
modell der hyperbolischen Ebene als riemannsche Mannigfaltigkeit und konstruieren die Metrik auf der hyperbolischen Ebene.

- Lesen Sie Kapitel 4.2 *Konstruktion der hyperbolischen Ebene*.
- Lesen Sie Kapitel 4.3 *Länge von Kurven*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 25. Juni). Wir beginnen mit der simultanen Bestimmung der Isometrien und der Geodäten der hyperbolischen Ebene; dies werden wir nächste Woche fortsetzen.

- Lesen Sie Kapitel 4.4.1 *Riemannsche Isometrien*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.2 *Möbiustransformationen*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.3 *Transitivität der Möbiustransformationen* bis Proposition 4.4.10.

**Fingerübung** (hyperbolische Länge). Ordnen Sie diese Kurven  $[0, 1] \rightarrow H \subset \mathbb{C}$  in der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  der Länge nach! Skizzieren Sie die Kurven!

1.  $t \mapsto i + t$
2.  $t \mapsto 2021 \cdot i + t$
3.  $t \mapsto i + (1 + i) \cdot t$
4.  $t \mapsto i + t + i \cdot t^2$

**Aufgaben** (für die Übungen am 29. Juni–2. Juli). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 10) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 10.1** (Pflasterungen der euklidischen Ebene). Sei  $K$  eine endliche Menge von Polygonen in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

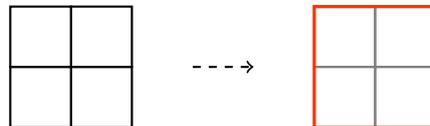
1. Ist  $P$  eine Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Protokacheln aus  $K$ , so ist  $P$  unendlich.
2. Ist  $P$  eine Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Protokacheln aus  $K$ , so gilt:

$$\forall Q \in K \quad \exists_{g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)} \quad g(Q) \in P.$$

**Aufgabe 10.2** (Konstruktion des regulären Fünfecks). Konstruieren Sie aus der Menge  $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$  mit Zirkel und Lineal ein reguläres Fünfeck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit Radius 1. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.

*Hinweis.* Was hat Aufgabe 6.2 mit den Kuchenstückdreiecken eines regulären Fünfecks vom Radius 1 zu tun?

**Aufgabe 10.3** (Inflation von Quadraten). Warum kann man mit der Inflation



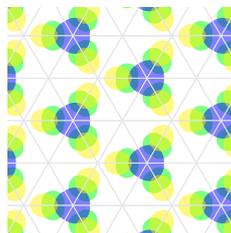
nicht analog zum Beweis für Penrose-Pflasterungen zeigen, dass jede Pflasterung von  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  durch kongruente Quadrate aperiodisch ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

*Hinweis.* Bei der beschriebene Inflation bestehen die „neuen“ Quadrate je aus  $2 \times 2$  der „alten“ Quadrate.

**Aufgabe 10.4** (Kaleidoskop in  $\text{\LaTeX}$ ). Vervollständigen Sie die  $\text{\LaTeX}$ -Quelldatei `caledoscope_exercise.tex` so, dass Sie einen Kaleidoskop-Bilder-Generator erhalten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Vervollständigen Sie `\caledohexagon` so, dass ein Sechseck aus sechs wie in einem Kaleidoskop gespiegelten Dreiecken entsteht.
2. Vervollständigen Sie dann das Programm durch geeignete Translationen von `\caledohexagon`.

*Hinweis.* Wenn Sie keine eigene  $\text{\LaTeX}$ -Installation haben, können Sie den Quellcode unter <https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php> übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in  $\text{\LaTeX}$  lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



**Bonusaufgabe** (*alea rotata est*). Vervollständigen Sie im OpenSCAD-Programm `cube_exercise.scad` die Funktion `cube_isometries` so, dass ein Würfel erzeugt wird. Erklären Sie den mathematischen Hintergrund Ihrer Lösung!

*Hinweis.* Installation und mehr Informationen: <https://openscad.org/>. Man kann auch ohne genauere Kenntnis oder Installation von OpenSCAD ohne Schwierigkeiten erahnen, wie man die Aufgabe lösen kann!

*Hinweis.* Mit diesem Programm lassen sich 3D-Objekte für den 3D-Druck erstellen ... frohes Experimentieren!

# Geometrie: Woche 12

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

25. Juni 2021

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 29. Juni). Diese Woche vervollständigen wir die Klassifikation der hyperbolischen Geodäten und Isometrien.

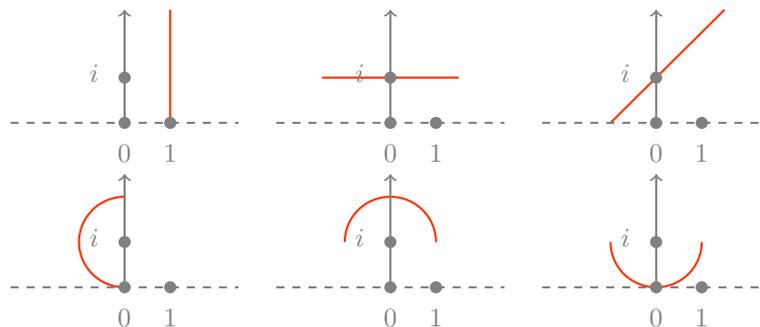
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.4.3 *Transitivität der Möbiustransformationen*.
- Wiederholen Sie das Parallelenaxiom und den Unabhängigkeitsbegriff.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.2 *Hilberts Axiomatik*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.4 *Geodäten der hyperbolischen Ebene*. Insbesondere kommen wir hier auf das Parallelenaxiom zurück!
- Lesen Sie Kapitel 4.4.5 *Winkel* bis Bemerkung 4.4.24.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 2. Juli). Als letztes Hilfsmittel zur Klassifikation führen wir hyperbolische Winkel ein.

- Wiederholen Sie die Definition und Eigenschaften von Winkeln in der euklidischen Geometrie.
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.4.5 *Winkel*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.6 *Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene*.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.1 *Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet* bis Definition 4.5.1.

Nächste Woche befassen wir uns mit der Winkelsumme in hyperbolischen geodätischen Dreiecken und regulären Pflasterungen der hyperbolischen Ebene.

**Fingerübung** (hyperbolische Geodäten). Welche der folgenden Bilder im Halbebenenmodell stellen hyperbolische Geodäten dar?



**Aufgaben** (für die Übungen am 6. Juli–9. Juli). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 11) besprochen.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 11.1** (hyperbolische Metrik). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung  $z \mapsto z + i$  ist eine Isometrie von  $(H, d_H)$ .
2. Es gilt  $d_H(i, 1 + 2 \cdot i) = \sqrt{2}$ .

*Hinweis.* Muss man dazu  $d_H(i, 1 + 2 \cdot i)$  exakt berechnen?

**Aufgabe 11.2** (hyperbolische Spiegelung). Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\bar{z}, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{z}$  die komplexe Konjugation von  $z \in H \subset \mathbb{C}$  bezeichnet.

1. Veranschaulichen Sie  $f$  geeignet. Es gibt hier natürlich viel Spielraum; erklären Sie, warum/wie Ihre Veranschaulichung zur Definition passt!
2. Zeigen Sie, dass  $f$  eine riemannsche Isometrie  $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$  ist.

**Aufgabe 11.3** (Stabilisator von  $i$ ). Zeigen Sie, dass  $\text{Stab}_i = \text{SO}(2)$ . Dabei schreiben wir  $\text{Stab}_i = \{A \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}$  für den Stabilisator von  $i \in H$  bezüglich der Möbiustransformationsoperation.

**Aufgabe 11.4** (positive Definitheit der hyperbolischen Metrik). Seien  $z, z' \in H$  mit  $d_H(z, z') = 0$ . Zeigen Sie, dass dann bereits  $z = z'$  gilt.

*Hinweis.* Verwenden Sie die triviale Abschätzung für hyperbolische Längen; die vertikale Abschätzung hilft bei Kurven, die zu weit nach oben entfliehen.

**Bonusaufgabe** (riemannsche Länge vs. metrische Länge). Seien  $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $T_0 < T_1$  und sei  $\gamma: [T_0, T_1] \longrightarrow H$  eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H, d_H)}(\gamma).$$

*Hinweis.* Die Ungleichung  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H, d_H)}(\gamma)$  folgt direkt aus der Definition von  $d_H$  und der metrischen Länge  $L_{(H, d_H)}$ .

Die umgekehrte Ungleichung  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H, d_H)}(\gamma)$  erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von  $d_H$ ), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit der analytischen Beschreibung der metrischen Länge in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten.

**Bonusaufgabe** (hyperbolische Geometrie – so vergisst man sie nie!).

*Formulieren Sie ein Gedicht,  
das die Konstruktion der hyperbolischen Ebene erklärt;  
doch Vorsicht: ohne Reime zählt es nicht  
und Punkte bleiben so verwehrt.  
Dabei sollte man auch nicht vergessen,  
die Länge von Kurven hyperbolisch zu messen;  
und wie bei allen metrischen Räumen,  
die Definition der Metrik nicht zu versäumen.*

# Geometrie: Woche 13

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

2. Juli 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 6. Juli). Wir behandeln den Satz von Gauß-Bonnet, der einen Zusammenhang zwischen Winkelsumme und Flächeninhalt in hyperbolischen Dreiecken herstellt, und seine Anwendungen.

- Wiederholen Sie die Winkelsumme in euklidischen Dreiecken.
- Wiederholen Sie die Transformationsformel für mehrdimensionale Integration.
- Wiederholen Sie die Definition des Flächeninhalts euklidischer Dreiecke.
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.5.1 *Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 9. Juli).

- Wiederholen Sie die Klassifikation regulärer Polygone/Polyeder/Pflasterungen in der euklidischen Geometrie.
- (Optional) Wiederholen Sie die funktionentheoretischen Eigenschaften der Cayley-Transformation.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.2 *Reguläre hyperbolische Dreiecke*.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.3 *Hyperbolische Dreiecke sind dünn*.

Damit ist unsere Behandlung der hyperbolischen Geometrie abgeschlossen; nächste Woche gehen wir noch kurz auf die sphärische Geometrie ein und vergleichen euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie.

**Fingerübung** (hyperbolische Dreiecke).

1. Skizzieren Sie ein hyperbolisches geodätisches Dreieck mit „kleiner“ Winkelsumme.
2. Skizzieren Sie ein hyperbolisches geodätisches Dreieck mit „großer“ Winkelsumme.
3. Skizzieren Sie zwei hyperbolische geodätische Dreiecke, die dieselbe Winkelsumme besitzen, aber nicht kongruent sind.
4. Skizzieren Sie zwei kongruente hyperbolische geodätische Dreiecke, so dass die Punkte des einen alle Imaginärteil kleiner als 1 haben und die Punkte des anderen alle Imaginärteil größer als 1 haben.

**Aufgaben** (für die Übungen am 13. Juli–16. Juli). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 12) besprochen.

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die folgenden Übungsblätter werden als Bonusblätter gewertet.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 12.1** (Möbiustransformationen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Matrix  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  mit  $f_A(i/2) = i$  und  $f_A(i) = 2 \cdot i$ .
2. Es gibt Matrizen  $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  mit  $f_A(i) = 2021 \cdot i = f_B(i)$  und  $A \neq B$ .

**Aufgabe 12.2** (Inversion am Kreis). Wir betrachten die Abbildung (wobei wir  $H$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auffassen)

$$f: H \longrightarrow H$$

$$z \longmapsto -\frac{1}{z}.$$

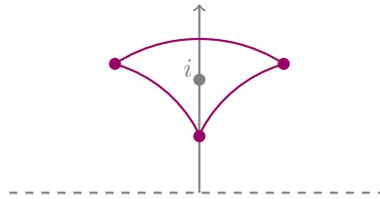
Zeigen Sie: Ist  $K$  ein verallgemeinerter Halbkreis, so ist auch  $f(K)$  ein verallgemeinerter Halbkreis. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!  
*Hinweis.* Da dies Teil des Beweises von Proposition 4.4.17 ist, dürfen Sie natürlich Proposition 4.4.17 *nicht* verwenden.

**Aufgabe 12.3** (ein hyperbolisches Dreieck). Zeichnen Sie das geodätische Dreieck in  $(H, d_H)$  mit den Ecken  $1 + i$ ,  $i - 1$ ,  $2 + 2 \cdot i$ . Erklären Sie dabei genau, warum Ihre Zeichnung korrekt ist und wie Sie die entscheidenden Komponenten berechnet/konstruiert haben.

**Aufgabe 12.4** (reguläre hyperbolische Dreiecke). Sei  $f: H \longrightarrow H$  die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Zu  $y \in (0, 1)$  betrachten wir die Punkte  $z_0(y) := i \cdot y$  sowie  $z_1(y) := f(i \cdot y)$  und  $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$ .



Seien  $\alpha_0(y)$ ,  $\alpha_1(y)$ ,  $\alpha_2(y)$  die entsprechenden Winkel des von  $z_0(y)$ ,  $z_1(y)$ ,  $z_2(y)$  aufgespannten geodätischen Dreiecks in  $(H, d_H)$ .

1. Zeigen Sie, dass  $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$  ist.
2. Zeigen Sie, dass  $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$ .
4. Skizzieren Sie einen Beweis für  $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha_0(y) = 0$ .

*Hinweis.* Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Schritte formulieren und mit geeigneten Skizzen illustrieren; Sie müssen die zugehörigen Berechnungen nicht im Detail ausführen.

**Bonusaufgabe** (Gezwitscher von Gauß-Bonnet).

1. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet als 280-Zeichen-„Tweet“, ohne mathematische Symbole zu verwenden.
2. Fassen Sie den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet in 280 Zeichen zusammen, ohne mathematische Symbole zu verwenden; zusätzlich zu den 280 Zeichen dürfen Sie auch noch ein Bild verwenden (ohne Text oder mathematische Symbole im Bild).

# Geometrie: Woche 14

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

9. Juli 2021

---

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 13. Juli). Zum Abschluss skizzieren wir kurz wie man analog zur euklidischen und hyperbolischen Geometrie auch sphärische Geometrie behandeln kann.

- Lesen Sie Kapitel 4.6 *Vergleich mit sphärischer Geometrie*.

**Leseauftrag** (für die Vorlesung am 16. Juli). Dies ist die letzte Vorlesung. Es ist keine Vorbereitung nötig: Enjoy the ride!

**Fingerübung** (geographische Koordinaten). Wir nehmen im folgenden an, dass die Erde eine Kugel mit Radius 6370 km ist.

1. Schlagen Sie die geographischen Koordinaten von Regensburg, Tokyo, Port Moresby und Nuuk nach.
2. Was bedeuten diese Koordinaten?
3. Wie weit sind diese Orte vom Südpol entfernt? Vom Nordpol? Vom Äquator?
4. Bestimmen Sie die Entfernung von Regensburg nach Tokyo, Port Moresby und Nuuk.
5. Skizzieren Sie auf einem Globus Geodäten zwischen diesen Orten.
6. Skizzieren Sie in einem Atlas Geodäten zwischen diesen Orten.

**Aufgaben.** Freiwillige Abgabe bis 16. Juli, 8:30 (via GRIPS). Diese Aufgaben zählen als Bonuspunkte.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 13.1** (Dreiecke). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt ein geodätisches Dreieck in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit den Seitenlängen 1, 2, 4.
2. Es gibt ein geodätisches Dreieck in  $(H, d_H)$  mit den Seitenlängen 1, 2, 4.

**Aufgabe 13.2** (hyperbolisches Flächenwachstum). Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zeigen Sie, dass

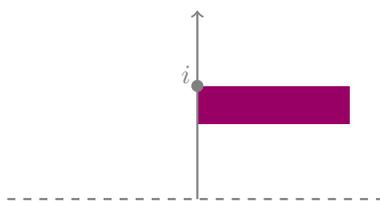
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_i^{(H, d_H)}(r)) \geq \frac{r}{2} \cdot (e^{r/2} - 1),$$

indem Sie wie folgt vorgehen: Sei  $Q_r := \{x + i \cdot y \mid x \in [0, r/2], y \in [e^{-r/2}, 1]\}$ .

1. Zeigen Sie, dass  $Q_r \subset B_i^{(H, d_H)}(r)$  gilt und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen.

*Hinweis.* Warum ist  $d_H(i, x + i) \leq r/2$  für alle  $x \in [0, r/2]$ ? Was passiert mit den vertikalen Abständen? Warum hilft das?

2. Zeigen Sie, dass  $\mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) = r/2 \cdot (e^{r/2} - 1)$  ist und folgern Sie daraus die Behauptung.



**Aufgabe 13.3** (Cirkellimiet III). Betrachten Sie den Holzschnitt *Cirkellimiet III* von M.C. Escher:

<https://mcescher.com/wp-content/uploads/2019/05/LW-434.jpg>

Falls die abgebildeten Vierecke/Dreiecke jeweils kongruente geodätische reguläre hyperbolische Vierecke bzw. Dreiecke (im Poincaré-Scheibenmodell) sind, können dann die weißen Linien hyperbolische geodätische Geraden sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

*Hinweis.* Winkel?!

**Aufgabe 13.4** (Isometrien sind flächentreu). Sei  $A \subset H$  eine messbare Menge und sei  $f \in \text{Isom}(H, d_H)$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $f(A)$  messbar ist und, dass

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(f(A)) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A)$$

gilt.

*Hinweis.* Falls Sie den Begriff „messbar“ noch nicht kennen, können Sie stattdessen auch „offen“ oder „abgeschlossen“ oder „Jordan-messbar“ oder ... verwenden.

Sie können die Aussage zunächst für riemannsche Isometrien beweisen oder mit einem konkreten Erzeugendensystem von  $\text{Isom}(H, d_H)$  arbeiten.

**Bonusaufgabe** (Skript). Finden Sie möglichst viele (Tipp-)Fehler im Skript!

Abgabe bis spätestens 16. Juli 2021, 8:30, via GRIPS.

# Geometrie: Woche 15

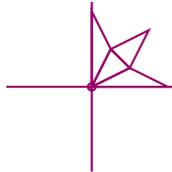
Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

16. Juli 2021



Commander Blorx ist derzeit auf wichtiger Mission für die pangalaktisch tätige **Geheim-Polygon-Gruppe (GPG)**. Durch seine Raffinesse ist es ihm gelungen, einen verschlüsselten Auftrag aus dem Paralleluniversum Primar III abzufangen:

Sei  $G$  die von den Spiegelungen an den Hyperebenen durch  $(0, 0)$  und  $(2021, 0)$  bzw. durch  $(0, 0)$  und  $(0, 2021)$  erzeugte Untergruppe von  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ . Bestimmen Sie die Orbits der unten abgebildeten Polygone unter der Operation von  $G$  auf  $\mathbb{R}^2$  durch Evaluation und färben Sie die entstehenden Polygone entsprechend.



Blorx bereist daraufhin auf Kosten der GPG diverse Raumstationen, Planeten, blaue Löcher, ..., um weitere Informationen zu sammeln. Helfen Sie Blorx dabei, Richtiges von Falschinformationen zu trennen und diese Nachricht zu entschlüsseln!

**Problem 14.1.** Als erstes geht Blorx dem folgenden Gerücht über Mini-Geometrie nach, das er auf einem maroden Raumfrachter aufgeschnappt hat:

Für alle Punkte  $x, x', y, z$  gilt: Sind  $(x, y, z)$  und  $(x', y, z)$  Dreiecke, so ist auch  $(x, x', z)$  ein Dreieck.

Welchen Status hat dieses Gerücht im Kontext der anderen Mini-Geometrie-Axiome?

- KE Immer wahr.
- ME Immer falsch.
- BE Unabhängig.

**Problem 14.2.** Blorx befragt im Hinterzimmer der berühmigten Eisdieler Plato Gelato drei Agenten zu den relevanten Zahlen der streng geheimen platonischen Körper. Welche der Aussagen ist wahr?

- ZE Wenn Oktaeder 88 Ecken haben, dann haben Ikosaeder 2020 Seitenflächen.
- DLE Wenn Ikosaeder zwölf Ecken haben, haben Würfel acht Seiten.
- KE Wenn Tetraeder oder Dodekaeder 30 Kanten haben, dann haben Oktaeder acht Ecken.

**Problem 14.3.** Eine suspekta Gestalt behauptet, dass er einer der allwissenden Mönche vom Planeten Planar sei, und dass er auf einer alten Schriftrolle planare Einbettungen der folgenden Graphen entdeckt habe. Für welchen Graphen ist das sicher nicht wahr?

- LISCH  $\text{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \{[1]\})$
- TISCH  $\text{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \{[2]\})$
- RISCH  $\text{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \mathbb{Z}/2021)$

*Bitte wenden*

**Problem 14.4.** Ein zirkulanischer Informant verrät Blorx sein Lieblingsaxiom in metrischen Räumen  $(X, d)$ :

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) \leq 1 \implies S_x^{(X, d)}(1) \cap S_y^{(X, d)}(1) \neq \emptyset.$$

Welchen Status hat dieses Axiom im Vergleich zu den üblichen Axiomen metrischer Räume?

- WER Immer wahr.
- WÄR Immer falsch.
- FÄR Unabhängig.

**Problem 14.5.** Psssst! Blorx wird zugeflüstert, dass für Vierecke in der euklidischen Ebene der Kongruenzsatz SSSS gelte. Ist das haltbar?

- ODER Ja.
- UND Nein.

**Problem 14.6.** Auf Triangular trifft Blorx zwei alte Bekannte, die ihm Geheimnisse über Dreiecke anvertrauen wollen. Der erste behauptet, dass er ein reguläres Dreieck beschaffen kann, dessen Innenwinkel  $\alpha \in (0, \pi)$  die Gleichung  $\sqrt{3} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$  erfüllt. Wo könnte es ein solches Dreieck geben?

- THE In der euklidischen Ebene.
- MET In der hyperbolischen Ebene.
- BO Auf der Sphäre.

**Problem 14.7.** Der zweite behauptet, dass er ein reguläres Dreieck anbieten kann, dessen Innenwinkel  $\alpha \in (0, \pi)$  die Gleichung  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$  erfüllt. Wo könnte es ein solches Dreieck geben?

- TER In der euklidischen Ebene.
- TEN In der hyperbolischen Ebene.
- SEN Auf der Sphäre.

**Problem 14.8.** Blorx ahnt, dass er demnächst auffliegen wird. Daher bereitet er diverse Fluchoptionen vor. Welche der folgenden Abbildungen  $(\mathbb{R}_{>2021}, d_2) \rightarrow (H, d_H)$  sind isometrische Einbettungen?

- TAN  $t \mapsto i \cdot t$
- GÄN  $t \mapsto i \cdot e^t$
- WAN  $t \mapsto i \cdot \ln t$

**Problem 14.9.** Auf der Flucht vor den Hütern des Gesetzes überlegt Blorx, welche Metrik er für seine Fluchtroute  $\gamma: [0, 1] \rightarrow H, t \mapsto i + t \cdot (1 + i)$  wählen soll. Ist  $\gamma$  bezüglich  $d_2$  oder bezüglich  $d_h$  kürzer?

- OCH Bezüglich  $d_2$ .
- ACH Bezüglich  $d_H$ .
- SACH Egal.

**Problem 14.10.** Um abzutauchen und seine Identität zu verschleiern, wendet Blorx die Möbiustransformation  $f: H \rightarrow H$  zur Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  an. Bezüglich welcher Metriken ist  $f$  isometrisch?

- SYM Bezüglich  $d_1, d_2$  und  $d_H$ .
- SYN Nur bezüglich  $d_2$  und  $d_H$ .
- HYPER Nur bezüglich  $d_H$ .

**Problem 14.11.** Führen Sie den Auftrag von Primar III aus!



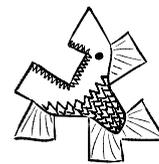
**Lösung.**

11	8	2	5	4	1	9	7	10	6	3

---

Keine Abgabe!

# C



## Quellcode

---

- `minigeometry.lean`: Eine Implementierung von Mini-Geometrie in Lean; S. C.2.
- `metricspace.lean`: Eine sehr rudimentäre Implementierung metrischer Räume in Lean; S. C.10.
- `circles_exercise.tex`, `circlecircles_exercise.tex`: Vorlagen für Kreismuster in  $\text{\LaTeX}$ (Aufgabe 6.3); S. C.13
- `absestimate.lean`: Beweis der im Beweis von Proposition 3.1.14 verwendeten Betragsabschätzung; S. C.14
- `calidoscope_exercise.tex`: Vorlage für ein Kaleidoskop in  $\text{\LaTeX}$ (Aufgabe 10.4); S. C.15
- `cube_exercise.scad`: Vorlage für einen Würfel in OpenSCAD (Aufgabe 10.B); S. C.17
- `ico_lecture.pov`: Ikosaeder in Povray; S. C.19

```

/- Clara L"oh 2021 -/

import tactic -- standard proof tactics

open classical -- we want to work in classical logic

/-
# Mini Geometry

This is a basic implementation of Mini Geometry,
as described in
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie\_ss21/
  lecture\_notes.pdf
-/

/- Mini Geometry models -/

/-
MG 1: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es h"ochstens eine
Gerade, so
dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen.

For each two different points, there exists at most one line
such that both points lie on this line.
-/
def satisfies_MG1
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"
  (lies_on : P → G → Prop)
:=  $\forall$  x y : P,  $\forall$  g h : G,
  ( x  $\neq$  y
   $\wedge$  lies_on x g  $\wedge$  lies_on y g
   $\wedge$  lies_on x h  $\wedge$  lies_on y h)
   $\rightarrow$  g = h

/-
MG 2: Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei verschiedene
Punkte.

For each line, there exist at least two points that lie on this
line.
-/
def satisfies_MG2
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"

```

```

    (lies_on : P → G → Prop)
:= ∀ g : G, ∃ x y : P,
    x ≠ y
    ∧ lies_on x g ∧ lies_on y g

/-
Lean version of Mini Geometry models:
-/
class MG
  (P : Type*) -- "points"
  (G : Type*) -- "lines"
:= (lies_on : P → G → Prop)
   (MG1 : satisfies_MG1 P G lies_on)
   (MG2 : satisfies_MG2 P G lies_on)

/- Some basic notions -/

/- Tests whether x is an intersection of g and h -/
def is_intersection_of
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (g : G)
  (h : G)
:= MG.lies_on x g
   ∧ MG.lies_on x h

/- Tests whether g and h are parallel -/
def are_parallel
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (g : G)
  (h : G)
:= ¬ (∃ x : P, is_intersection_of P G x g h)

/- Tests whether x and y lie on a common line -/
def lie_on_a_common_line
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (y : P)
:= ∃ g : G, ( MG.lies_on x g
              ∧ MG.lies_on y g )

/- Tests whether (x,y,z) is a triangle -/
def is_triangle
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]

```

```

    (x : P)
    (y : P)
    (z : P)
:= lie_on_a_common_line P G x y
  ^ lie_on_a_common_line P G y z
  ^ lie_on_a_common_line P G z x

-- exercise:
/- Tests whether (x,y,z) is an anti-triangle -/
-- def is_anti_triangle

/- Some very simple properties -/

/- If x and y lie on a common line,
    then y and x lie on a common line. -/
lemma lie_on_a_common_line_sym
  (P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
  (x : P)
  (y : P)
  (line_xy: lie_on_a_common_line P G x y)
  : lie_on_a_common_line P G y x
:=
begin
  /- extracting a witness g for the fact that x and y
      lie on a common line -/
  rcases line_xy with ⟨ g : G, xy_in_g ⟩,
  /- xy_in_g shows that x_in_g and y_in_g -/
  have x_in_g : MG.lies_on x g,
    by {apply xy_in_g.1},
  have y_in_g : MG.lies_on y g,
    by {apply xy_in_g.2},
  -- we now only recombine the statements in a different order
  show lie_on_a_common_line P G y x,
    by {unfold lie_on_a_common_line,      -- unfolding the
        definition
        use g,                             -- taking care of  $\exists$ 
        exact and.intro y_in_g x_in_g}, -- reassembling the
    ^-statement
end

-- exercise
/- If (x,y,z) is a triangle, then also (z,x,y) is a triangle.
    -/
-- lemma triangle_cyc

```

```

/- Some examples of Mini Geometry models -/

/- The empty model:
   It has no points, no lines and the trivial lies_on relation;
   in addition to the definition of these components, we have
   to supply proofs for the axioms MG1 and MG2.
-/
def empty_lies_on
  (x : empty)
  (g : empty)
:= false

lemma empty_satisfies_MG1
: satisfies_MG1 empty empty empty_lies_on
:=
begin -- this is so simple that it can be checked automatically
  by tauto,
end

lemma empty_satisfies_MG2
: satisfies_MG2 empty empty empty_lies_on
:=
begin -- this is also almost automatic; found via hint
  by {unfold satisfies_MG2,
      simp at *,
      exact dec_trivial},
end

-- Thus: The empty model indeed is a Mini Geometry:
instance empty_MG : MG empty empty
:= MG.mk empty_lies_on
      empty_satisfies_MG1
      empty_satisfies_MG2

/- The I model:
   We consider the Mini Geometry associated with the graph
   0 --- 1   2
-/

inductive I_P : Type
| I_0
| I_1
| I_2

```

```

inductive I_G : Type
| I_01

def I_lies_on
  (x : I_P)
  (y : I_G)
  : Prop
:=
begin
  -- thanks to the special structure of the I model,
  -- we only need to check whether x is I_0 or I_1;
  -- we use a case distinction:
  cases x,
  case I_P.I_0 : {exact true},
  case I_P.I_1 : {exact true},
  case I_P.I_2 : {exact false},
end

-- in the I model, all lines are equal (there is only one line)
lemma I_G_all_equal
  (g : I_G)
  (h : I_G)
  : (g = h)
:=
begin
  -- we use a case distinction:
  cases g,      -- only one possible case for g: g = I_01
  cases h,      -- only one possible case for h: h = I_01
  exact rfl, -- thus, g = h, by reflexivity
end

lemma I_satisfies_MG1
: satisfies_MG1 I_P I_G I_lies_on
:=
begin
  -- in order to show this forall-statement,
  -- we prove the statement for each member
  assume x y : I_P,
  assume g h : I_G,
  show ( x ≠ y
    ∧ I_lies_on x g ∧ I_lies_on y g
    ∧ I_lies_on x h ∧ I_lies_on y h)
    → g = h,
  by {intro, -- adding the assumption on the left hand side of
    the implication

```

```

    exact I_G_all_equal g h}, -- there is only one line!
end

lemma I_satisfies_MG2
: satisfies_MG2 I_P I_G I_lies_on
:=
begin
  assume g : I_G, -- there is only one possibility! I_G.I_01
  show  $\exists x y : I_P, x \neq y$ 
       $\wedge I\_lies\_on\ x\ g \wedge I\_lies\_on\ y\ g,$ 
  begin
    use I_P.I_0, -- take x as "0"
    use I_P.I_1, -- take y as "1"
    by tauto, -- now it can simply be checked automatically
  end
end

-- The I model indeed is a Mini Geometry
instance I_MG : MG I_P I_G
:= MG.mk I_lies_on
      I_satisfies_MG1
      I_satisfies_MG2

/- Parallel postulate -/
def is_parallel_through
(P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
(x : P)
(g : G)
(h : G)
:= MG.lies_on x h  $\wedge$  are_parallel P G g h

def parallel_postulate
(P : Type*) (G : Type*) [MG P G]
:=  $\forall x : P, \forall g : G,$ 
    ( $\neg$  MG.lies_on x g)
 $\rightarrow (\exists h : G, is\_parallel\_through\ P\ G\ x\ g\ h$ 
       $\wedge (\forall k : G, is\_parallel\_through\ P\ G\ x\ g\ k \rightarrow k =$ 
      h ))

/- The parallel postulate is independent of the Mini Geometry
axioms,
i.e., there exist models of Mini Geometry that satisfy it
and there exist models of Mini Geometry that do not
satisfy it. -/

```

```

-- The empty model satisfies the parallel postulate
lemma pp_empty_MG
: parallel_postulate empty empty
:=
begin
  -- again, this is so simple
  -- that this can be basically solved automatically
  assume x,
  show _,
    by {cases x}
end

-- The I model does not satisfy the parallel postulate
lemma not_pp_I_MG
: ¬ parallel_postulate I_P I_G
:=
begin
  -- these will be our witnesses:
  let x : I_P := I_P.I_2,
  let g : I_G := I_G.I_01,

  -- x does not lie on g
  have x_not_on_g: ¬ MG.lies_on x g,
    by {exact not_of_eq_false rfl},

  -- but there is no parallel through x
  have no_parallel_through_x:
    ¬ (∃ h : I_G, is_parallel_through I_P I_G x g h),
  begin -- by exhaustive search
    exact (finset.exists_mem_empty_iff (λ (x : I_G),
      are_parallel I_P I_G g x)).mp,
  end,

  -- we can now combine these properties into establishing that
  -- the parallel postulate is not satisfied, because of x and
  g
  by {unfold parallel_postulate,
    refine not_forall.mpr _,
    use x,
    refine not_forall.mpr _,
    use g,
    finish},
end

```

```

-- Thus, the parallel postulate is independent of MG
theorem pp_is_independent_of_MG
: (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G,   @parallel_postulate P G
  MGPG)
∧ (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G, ¬ @parallel_postulate P G
  MGPG)
:=
begin
  have pp_example: ∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G,
    @parallel_postulate P G MGPG,
    begin -- the empty MG is such an example
      use empty,
      use empty,
      use empty_MG,
      exact pp_empty_MG,
    end,

  have pp_nonexample: (∃ P G : Type, ∃ MGPG : MG P G, ¬
    @parallel_postulate P G MGPG),
    begin -- the I MG is such a non-example
      use I_P,
      use I_G,
      use I_MG,
      exact not_pp_I_MG,
    end,

  -- it remains to combine both parts into the and-statement
  by {exact and.intro pp_example pp_nonexample},
end

```

```

/- Clara L"oh 2021 -/

import tactic          -- standard proof tactics
import data.real.basic -- standards on real numbers

open classical        -- we want to work in classical logic

/-
# Metric Spaces

This is an implementation of some very basic facts on metric
spaces. A more comprehensive treatment can be found in the
mathlib library topology.metric_space .
-/

class metric_space
  (X : Type*)      -- underlying set
  (d : X → X → ℝ) -- the distance function
:= (d_nonneg : ∀ x y : X, d x y ≥ 0)
   (d_self :   ∀ x : X,   d x x = 0)
   (d_definite : ∀ x y : X, d x y = 0 → x = y)
   (d_symm :   ∀ x y : X, d x y = d y x)
   (d_triangle : ∀ x y z : X, d x z ≤ d x y + d y z)

-- Isometric embeddings are maps between metric spaces
-- that preserve the distance.
def is_isometric_embedding
  (X : Type*) (d : X → X → ℝ) [metric_space X d]
  (X' : Type*) (d' : X' → X' → ℝ) [metric_space X' d']
  (f : X → X')
:= ∀ x y : X, d' (f x) (f y) = d x y

-- The composition of isometric embeddings is an isometric
-- embedding
lemma comp_of_isom_emb
  (X : Type*) (d : X → X → ℝ) [metric_space X d]
  (X' : Type*) (d' : X' → X' → ℝ) [metric_space X' d']
  (X'' : Type*) (d'' : X'' → X'' → ℝ) [metric_space X'' d'']
  (f : X → X')
  (f' : X' → X'')
  (isom_embd_f : is_isometric_embedding X d X' d' f)
  (isom_embd_f' : is_isometric_embedding X' d' X'' d'' f')
  : (is_isometric_embedding X d X'' d'' (f' ∘ f))
:=
begin

```

```

assume x y : X,
let f'' : X → X'' := f' ∘ f,

-- we prove the claim by direct computation
show d'' (f'' x) (f'' y) = d x y, by
calc d'' (f'' x) (f'' y) = d'' (f' (f x)) (f' (f y))
    : by {refl}
    -- resolving def of f''
... = d' (f x) (f y)
    : by {exact isom_embd_f' (f x) (f y)}
}

-- f' is an isom emb
... = d x y
    : by {exact isom_embd_f x y},
    -- f is an isom embd
end

-- As an example metric space, we consider the real numbers
-- with the standard metric:
noncomputable
def d_real
  (x : ℝ)
  (y : ℝ)
:= abs (x - y)

noncomputable
instance real_std_metric_space : metric_space ℝ d_real
:= metric_space.mk
  -- non-negativity
  (assume x y : ℝ,
   show d_real x y ≥ 0,
    by {unfold d_real, exact abs_nonneg (x - y)})
  -- distance from self
  (assume x : ℝ,
   show d_real x x = 0,
    by {unfold d_real, ring, exact abs_zero})
  -- definiteness
  (assume x y : ℝ,
   assume dist_0 : d_real x y = 0,
   have abs_0 : abs (x - y) = 0,
    by {exact dist_0},
   show x = y,
    by {exact eq_of_abs_sub_eq_zero abs_0})
  -- symmetry
  (assume x y : ℝ,

```

```
show d_real x y = d_real y x,  
  by {unfold d_real, exact abs_sub x y})  
-- triangle inequality  
(assume x y z : ℝ,  
  show d_real x z ≤ d_real x y + d_real y z,  
    by {unfold d_real, exact abs_sub_le x y z})
```

```

% Exercise 6.3, first part
\documentclass{standalone}

\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{calc}

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[x=1cm,y=1cm]
  % clip output to the given rectangle
  \clip (1,1) rectangle +(6,6);
  % loop (with loop variable \j)
  \foreach \j in {0,...,3} {%
    % draw a circle of radius 1 whose centre is at the given
    coordinate
    \draw (2*\j,1) circle (1);
    % coordinates can be added as follows: ((j,0) + (1,1))

    % todo: complete this example!
  }
\end{tikzpicture}
\end{document}

% Exercise 6.3, second part
\documentclass{standalone}

\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{calc}

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[x=1cm,y=1cm]
  % draw the outer circle
  \draw (0,0) circle (2);
  % draw the inner circles
  % loops: see circles_exercise.tex

  % polar coordinates might be helpful: (30:1) means 'angle =
  30 degrees' and 'radius = 1'
  \draw (42:1) circle (1);

  % todo: complete this example!

  % for the bonus problem:
  % filling circles with blue: use \fill[blue] instead of \draw
  % change opacity of fill colour: use \fill[blue, opacity=0.5]
  instead, etc.
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

```

/- Clara L"oh 2021 -/

import tactic          -- standard proof tactics
import data.real.basic -- standards on real numbers

open classical        -- we want to work in classical logic

/-
# A small estimate for absolute values

This is the proof of a simple estimate on absolute values.

-/

lemma simple_estimate
  (x y : real)
  (x_plus_y_1 : x + y = 1)
  (x_geq_y : x ≥ y)
  : (abs x ≥ abs y)
:=
begin
  -- We first show  $x \geq 0$  and thus  $\text{abs } x = x$ :
  have x_geq_0 : x ≥ (0 : real),
    by {linarith}, -- the linear arithmetic solver auto-
    proves this
  have abs_x_eq_x : abs x = x,
    by {rw abs_of_nonneg x_geq_0},

  -- We now distinguish two cases,
  -- namely whether  $y$  is non-negative or not:
  have case_y_nonneg : y ≥ 0 → abs x ≥ abs y, by
  begin
    assume y_nonneg : 0 ≤ y,
    calc abs x = x      : by {exact abs_x_eq_x}
      ... ≥ y          : by {exact x_geq_y}
      ... = abs y      : by {rw abs_of_nonneg y_nonneg},
  end,

  have case_y_neg : y < 0 → abs x ≥ abs y, by
  begin
    assume y_neg : y < 0,
    calc abs x = x      : by {exact abs_x_eq_x}
      ... ≥ x - 1      : by {linarith}
      ... = -y         : by {linarith[x_plus_y_1]}
      ... = abs y      : by {rw abs_of_neg y_neg},
  end,

  show abs x ≥ abs y, by {finish},
end

```

```

% Exercise 10.4
\documentclass{standalone}

\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{calc}

% a single triangular tile
\def\caleidotile{%
  \begin{scope}
    % clipping contents to the base tile
    \clip (90:1) -- (210:1) -- (330:1) -- cycle;
    % items
    % todo: feel free to add more items/colours/...!
    \fill[green,opacity=0.5] (\greenx,\greeny) circle (0.4cm);
    \fill[blue,opacity=0.5] (\bluex,\bluey) circle (0.6cm);
    \fill[yellow,opacity=0.5] (\yellowx,\yellowy) circle (0.5cm);
  );
  \fill[purple,opacity=0.5] (\purplex,\purpley) circle (0.3cm);
  );
  \end{scope}
  % boundary of the base tile
  \draw[black!10] (90:1) -- (210:1) -- (330:1) -- cycle;
}

% a hexagon of six triangular tiles, reflected appropriately
\def\caleidohexagon{%
  % todo: complete this list of angles for the \foreach loop!
  \foreach \j in {0,120} {%
    \begin{scope}[rotate={\j}]
      \begin{scope}[shift={(30:1)}]
        \caleidotile
      \end{scope}
    \end{scope}
  }
  % todo: complete the definition of the hexagon
  % (watch out for correct reflections; y=-1cm will flip the y-
  % direction of a scope)
}

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[x=1cm,y=1cm]
  % setting a seed for reproducible randomness
  % (convenient for testing! just remove the %)
  % \pgfmathsetseed{42}
  % random coordinates for the pieces

```

```
\pgfmathsetmacro{\greenx}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\greeny}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\bluex}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\bluey}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\yellowx}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\yellowy}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\purplex}{rnd}
\pgfmathsetmacro{\purpley}{rnd}

% clip visible range
\clip (-4,-4) rectangle +(8,8);
% suitable translations of the base hexagon give the desired
  filling
\foreach \x in {-2,...,2} {%
  \foreach \y in {-3,...,3} {%
    % todo: complete this definition by inserting suitable
    shift coordinates
    \begin{scope}[shift={{(0,0)}}]
      \caleidohexagon
    \end{scope}
  }
}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

```

// Cube
//
//-----
// global settings
// global resolution settings
$fs = 0.1; // facet resolution
$fa = 2;   // angle resolution
$fn = 100; // circle resolution
// helper geometry
debug = true;
// thickness of faces
t = 1;
// edge length of the cube
el = 20;

//-----
// main:
cube(el);

//-----
// cube with edge length c (centred at the origin)
module cube(c) {
  union() {
    // we reconstruct the cube by applying enough symmetries to
    // the base face
    cube_isometries() cube_baseface(c);
  }
}

// base face of the cube (edge length c)
module cube_baseface(c) {
  translate (-c/2*[0,0,1]) // moving the block to the
    correct position
  linear_extrude(t) // 2D-square -> 3D-block of
    thickness t
  square(size = c, center = true); // 2D-square
}

// two generating symmetries of the cube
module c_r1() {
  rotate(a=90,v=[1,0,0]) children();
}
module c_r2() {
  rotate(a=90,v=[0,1,0]) children();
}

```

```
// enough symmetries of the cube
module cube_isometries() {
  union() {
    children();
    c_r1() children();
    // ?!
    // the isometries for the remaining faces are missing ...
    // note that isometries can also be composed,
    // using syntax of the form "f() g() children();" etc
    // ?!
  }
}
```

```

/* Rendering an icosahedron in Povray
Clara L\oh, 07/2021
low res: povray ico_lecture.pov
higher res: povray -W1600 -H1200 -Q9 ico_lecture.pov
*/

/*
-----

Settings, camera, and light

-----
*/

# include "colors.inc" // basic colors
# declare Mathgreen = rgb <0,115/255,119/255>;

global_settings { max_trace_level 8
}

// camera: location and direction of view
camera { location <10,10,10>
        look_at <0,0,0>
}

// fiat lux!
light_source { <0,0,50>
               color White }
light_source { <0,0,0>
               color White }
light_source { <25,25,50>
               color Yellow }

/*
-----

Additional mirrors

-----
*/

plane { <0,-1,0>, 10
        pigment { color Black }
        finish { reflection 1

```

```

        phong 1
    }
}

plane { <-1,0,0>, 10
    pigment { color Black }
    finish { reflection 1
        phong 1
    }
}

plane { <0,0,-1>, 10
    pigment { color Black }
    finish { reflection 1
        phong 1
    }
}

/*
-----

The icosahedron

-----

*/

// a single face (with the given normal direction)
#define icoface (dir)
    plane { dir, 1
        scale 3
        texture { pigment { color Mathgreen
            filter 0.8
        }
            finish { reflection 0.3
                phong 1
            }
        }
        interior { ior 2.5 }
    }
}
#define

// the golden ratio
#define phi=(1+sqrt(5))/2;

```

```
// constructing the icosahedron as intersection of 20 half-
    spaces
// (which will then define the faces)
intersection{
  icoface (<1,1,1>)
  icoface (<-1,1,1>)
  icoface (<1,-1,1>)
  icoface (<1,1,-1>)
  icoface (<1,-1,-1>)
  icoface (<-1,1,-1>)
  icoface (<-1,-1,1>)
  icoface (<-1,-1,-1>)
  //
  icoface (<0,1/phi,phi>)
  icoface (<0,-1/phi,phi>)
  icoface (<0,1/phi,-phi>)
  icoface (<0,-1/phi,-phi>)
  //
  icoface (<phi,0,1/phi>)
  icoface (<-phi,0,1/phi>)
  icoface (<phi,0,-1/phi>)
  icoface (<-phi,0,-1/phi>)
  //
  icoface (<1/phi,phi,0>)
  icoface (<-1/phi,phi,0>)
  icoface (<1/phi,-phi,0>)
  icoface (<-1/phi,-phi,0>)
}
```

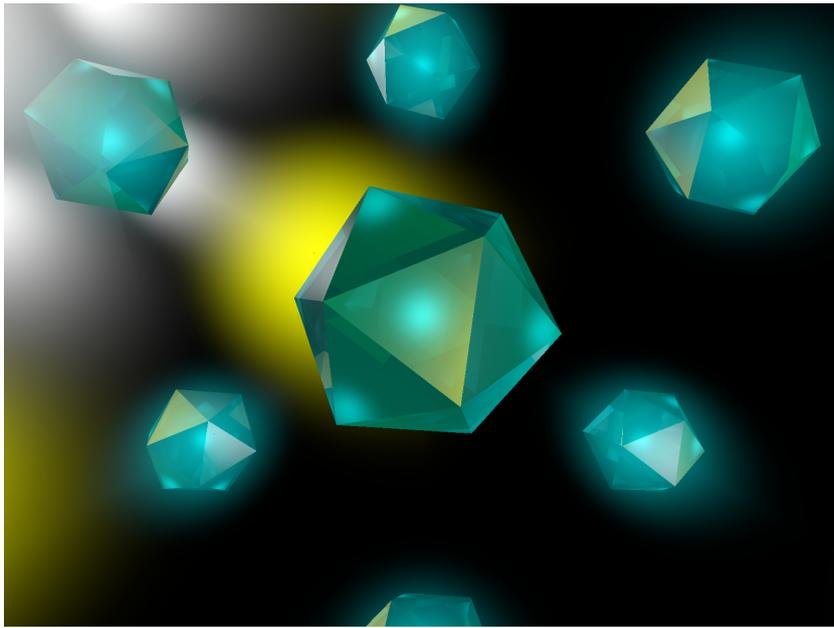
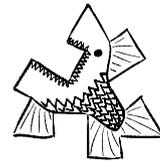


Abbildung C.1.: Icosaeder, gerendert von Povray

D

Organisatorisches

---



D.2

D. Organisatorisches

# Geometrie im SS 2021

## Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/Julian Seipel

April 2021

---

**Homepage.** Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter/Lesepläne finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/geometrie\\_ss21](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/geometrie_ss21)

<https://elearning.uni-regensburg.de>

**Virtuelle Lehre.** Aufgrund der Covid-19-Pandemie wird diese Vorlesung bis auf weiteres online stattfinden, basierend auf:

- **Angeleitetes Selbststudium.** Es wird ein ausführliches Vorlesungsskript geben. Für jede Vorlesung (bis auf die erste) gibt es einen entsprechenden Leseplan.
- **Online-Vorlesungen.** Während der Vorlesungstermine werden wir die Themen der Leseaufträge diskutieren und mit verschiedenen Computer-Werkzeugen experimentieren. Insbesondere besteht während der Vorlesung die Möglichkeit, Fragen zu stellen!  
Je nach Teilnehmerzahl werden wir die Vorlesung noch interaktiver gestalten.
- **Online-Übungsgruppen.** Lösungen zu den Übungsaufgaben müssen via GRIPS eingereicht werden; die Korrekturen erhalten sie auch via GRIPS.  
Während der Übungstermine werden die Übungsaufgaben besprochen und es besteht die Gelegenheit, Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen zu stellen.
- **Text-Chat.** Zusätzlich gibt es ein informelles Chat-Forum; Sie können dort die Vorlesung/Übungen besprechen oder Koordinaten für Online-Treffen mit anderen Teilnehmern austauschen; den Einladungslink finden Sie in GRIPS.

**Videokonferenzen.** Für die Videokonferenzen verwenden wir zoom:

[uni-regensburg.zoom.us](https://uni-regensburg.zoom.us)

Die Zugangsdaten finden Sie in GRIPS (und nicht öffentlich auf der Homepage). Hinweise zu diesen Videokonferenzen:

- Obwohl wir nicht im selben Raum sind, kann es hilfreich zu sein, sich vorzustellen, dass wir im selben Raum sind.
- Seien Sie pünktlich.
- Nehmen Sie diese Treffen *nicht* auf. Auch nicht teilweise.

- Versuchen Sie, sich ausschließlich auf die Diskussion in der Videokonferenz zu konzentrieren (und nicht noch zig andere Dinge nebenher zu erledigen ...).
- Bitte schalten Sie Ihre Kamera ein (wenn Ihre Wohnsituation dies zulässt). Insbesondere für die anderen Teilnehmer entsteht so ein besseres Gemeinschaftsgefühl und eine natürlichere Interaktion.
- Sie können gerne während der Vorlesung den **zoom**-Chat verwenden (zu Vorlesungsthemen ...); ich werde während der Vorlesung nicht auf Fragen im Chat achten können – Sie können aber einfach direkt mündlich Ihre Fragen stellen oder Antworten geben.

**Vorlesung.** Die Vorlesung findet jeweils dienstags (8:30–10:00) und freitags (8:30–10:00) statt. Die erste Vorlesung ist am Dienstag, den 13. April, um 8:30. Das Vorlesungsskript ist über die Vorlesungshomepage und GRIPS zugänglich. Die letzte Vorlesung ist am 16. Juli.

Warum gibt es keine Aufzeichnungen der Vorlesungen? Während der Covid-19-Pandemie bieten die Vorlesungstermine wertvolle Interaktionszeit. Ich möchte alle Teilnehmer dazu ermutigen, sich aktiv an den Diskussionen zu beteiligen und Fragen zu stellen bzw. zu beantworten. Deshalb möchte ich auch die Atmosphäre so locker, informell und unverbindlich wie möglich halten.

Falls Sie aus terminlichen Gründen nicht an den Vorlesungen teilnehmen können, werden Sie aber auch mit dem ausführlichen Skript und den Übungsgruppen ohne Schwierigkeiten den Stoff erarbeiten können.

**Übungen.** Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich freitags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Freitag eine Woche später um 10:00 Uhr abzugeben.

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte) und herausforderndere Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte).

Sie dürfen (und sollen) die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden (andernfalls werden die Punkte aberkannt). Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen zu präsentieren (andernfalls werden die Punkte aberkannt).

Die Übungen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen wird die Aufgabenserie 0 besprochen.

**Fingerübungen.** Zusätzlich enthalten das Skript und die Übungsblätter Fingerübungen, die elementare Techniken und Begriffe trainieren. Diese Aufgaben sollten im Idealfall so einfach sein, dass sie innerhalb weniger Minuten gelöst werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert.

**Einteilung in die Übungsgruppen.** Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS.

Sie können sich bis Donnerstag, den 15. April 2021, um 10:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Falls Sie noch keine Kennung des Rechenzentrums haben, wenden Sie sich bitte an Julian Seipel.

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird spätestens am Montag, den 19. April 2021, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zur Einteilung der Übungsgruppen und zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Julian Seipel ([julian.seipel@ur.de](mailto:julian.seipel@ur.de)).

**Leistungsnachweise.** Diese Vorlesung kann wie in den einzelnen Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge eingebracht werden.

- *Studienleistung:* Erfolgreiche Teilnahme an den Übungen: mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.
- *Prüfungsleistung:* Zweistündige Klausur (s.u.). Die Modulnote ergibt sich wie im jeweiligen Modulkatalog angegeben.

**Klausur.** Die Klausur findet voraussichtlich am 23. Juli 2021, von 9:00 bis 11:00 Uhr, statt. Je nach Gesamtlage wird diese Klausur als Präsenz- oder als Take-Home-Open-Book-Klausur stattfinden.

Die Wiederholungsklausur ist voraussichtlich am Ende der Semesterferien; der genaue Termin wird so bald wie möglich bekanntgegeben. Die Wiederholungsklausur kann auch als Erstversuch geschrieben werden; diese Option ist nur in Einzelfällen sinnvoll: der nächste Wiederholungstermin ist dann erst ein Jahr später im Rahmen der nächsten Vorlesung zur Geometrie.

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig. Wir werden rechtzeitig Einträge in FlexNow vorbereiten. Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

<http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/studierende-und-studienanfaenger/index.html>

**Hinweise für Wiederholer.** Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester die Klausurzulassung erhalten haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können mit dieser Zulassung auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Skript). Außerdem

kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Für den Drittversuch besteht alternativ zur Klausur auch wahlweise die Möglichkeit, die Prüfung als mündliche Prüfung abzulegen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Julian Seipel mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

#### **Ansprechpartner.**

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Julian Seipel:

[julian.seipel@ur.de](mailto:julian.seipel@ur.de)

- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder an Julian Seipel.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Julian Seipel oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung oder das zuständige Prüfungsamt:

<http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/ansprechpersonen/index.html>

- Offizielle Informationen der Verwaltung zur Covid-19-Pandemie finden Sie unter:

<https://go.ur.de/corona>

Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

[http://www-cgi.uni-regensburg.de/Studentisches/FS\\_MathePhysik/cmsms/](http://www-cgi.uni-regensburg.de/Studentisches/FS_MathePhysik/cmsms/)

# Geometrie im SS 2021

## Hinweise zu den Übungsaufgaben

Prof. Dr. C. Löh/Julian Seipel

April 2021

---

**Ziel der Übungsaufgaben.** Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen. Insbesondere ist der Weg das Ziel: Es ist wertvoller, eigenständig eine Aufgabe suboptimal zu bearbeiten als eine korrektere Lösung von jemand anders zu übernehmen. Nutzen Sie den Luxus, dass Sie für Ihre Abgaben *individuelle* Rückmeldung erhalten!

Das Punkteminimum für die Studienleistung ist das *Minimum*. Sie sollten versuchen, möglichst viele Punkte zu erreichen und nicht nach Erreichen dieser Minimalzahl die Übungen schleifen lassen!

### Wie bearbeitet man eine Übungsaufgabe?

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch. Kennen Sie alle auftretenden Begriffe? Verstehen Sie, was in den Aufgaben verlangt wird?
- Was sind die Voraussetzungen? Was ist zu zeigen? Wie könnten diese Dinge zusammenhängen? Gibt es Sätze aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie die behaupteten Aussagen, an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?
- Versuchen Sie, das Problem in kleinere Teilprobleme aufzuteilen. Können Sie diese Teilprobleme lösen?
- Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit den Begriffen und Sätzen auseinandersetzen.
- Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

### Wie schreibt man eine Lösung auf?

- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis.
- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf.
- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!
- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten!
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken!
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.

**Bewertungskriterien.** Bei der Bewertung der abgegebenen Lösungen wird auf folgendes geachtet:

- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?

Viel Erfolg und viel Spass bei den Übungen!

# Geometrie im SS 2021

## Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/Julian Seipel

April 2021

---

**Ziel der Prüfungsvorbereitung.** Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung.

Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

**Erreichen dieses Ziels.** Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek und Computer-Werkzeuge)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Kurz vor der Prüfung:

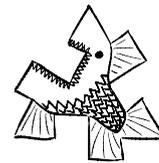
- Kann ich mein Wissen präzise und verständlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren . . .)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen?
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?

**Bewertungskriterien.** In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, . . .)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen
- Es werden keine Programmieraufgaben gestellt.

Viel Erfolg bei der Prüfung!





# Literaturverzeichnis

---

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

- [1] Aunt Annie's Crafts. *Flexagon*,  
<http://www.auntannie.com/Geometric/Flexagon/Index.html> Cited on page: 115
- [2] D. Austin. Penrose Tiles Talk Across Miles, *AMS Feature Column*, August 2005,  
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-penrose> Cited on page: 121
- [3] D. Austin. Penrose Tilings Tied up in Ribbons, *AMS Feature Column*, Dezember 2005,  
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons> Cited on page: 121
- [4] J. Avigad, L. de Moura, S. Kong. *Theorem Proving in Lean*, Release 3.23.0, [https://leanprover.github.io/theorem\\_proving\\_in\\_lean/](https://leanprover.github.io/theorem_proving_in_lean/), 2021.  
Cited on page: 16, A.7, A.9
- [5] P. Bartlett. *Latin squares*, MathCamp 2012.  
[http://web.math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp\\_2012/latin\\_squares/MC2012\\_LatinSquares\\_lecture1.pdf](http://web.math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2012/latin_squares/MC2012_LatinSquares_lecture1.pdf)  
Cited on page: 38

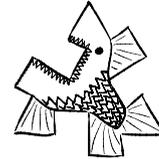
- [6] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*, zweite Auflage, De Gruyter, 2010. Cited on page: 96, 168
- [7] J. Beck. *Combinatorial Games – Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press, 2011. Cited on page: 31
- [8] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009. Cited on page:
- [9] O. Blumenthal. *Lebensgeschichte*, in: D. Hilbert. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer, 1935. Cited on page: 7
- [10] S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014. Cited on page: 80
- [11] M. Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*, Springer-Spektrum, 2015. Cited on page: A.10
- [12] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1999. Cited on page: 163
- [13] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010. Cited on page: A.18, A.20
- [14] H.S.M. Coxeter. *Regular polytopes*, dritte Auflage, Dover Publications, 1973. Cited on page: 116, 118
- [15] A. Crans, T. Fiore, R. Satyendra. Musical Actions of Dihedral Groups, *American Mathematical Monthly* 116(6), S. 479–495, 2009. Cited on page: 115
- [16] M.W. Davis. *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, Band 32, Princeton University Press, 2008. Cited on page: 118
- [17] B.L. Davis, D. MacLagan. The card game SET, *The Mathematical Intelligencer* 25(3), S. 33–40, Juni 2003. Cited on page: 33
- [18] R. Diestel. *Graph Theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005. Cited on page: 35, 48, 49, 50
- [19] C. Druțu, M. Kapovich. *Geometric group theory*, Mit einem Anhang von B. Nica, American Mathematical Society Colloquium Publications, 63, American Mathematical Society, 2018. Cited on page: 55, 66
- [20] A. Engel. *Problem Solving Strategies, Problem Books in Mathematics*, Springer, 1998. Cited on page: 73, 84

- [21] M.C. Escher. *Cirkellimiet III*, 1960. Available online at <http://www.mcescher.nl/galerij/erkenning-succes/cirkellimiet-iii/> Cited on page: 160
- [22] M.C. Escher. *Cirkellimiet IV*, 1960. Available online at <http://www.mcescher.nl/galerij/erkenning-succes/cirkellimiet-iv/> Cited on page: 160
- [23] Euklid. *Στοιχεῖα*.  
Altgriechisch: <http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/index.html>  
Deutsche Übersetzung von J.F. Lorenz (1781, Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses):  
[http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925\\_00005.html](http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10235925_00005.html)  
Cited on page: 6
- [24] U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985. Cited on page: A.10
- [25] M. Gardner. *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Game*, University of Chicago Press, 1988. Cited on page: 115
- [26] G. Gonthier. Formal proof—the four-color theorem, *Notices Amer. Math. Soc.*, 55(11), S. 1382–1393, 2008.  
Implementierung in Coq: <https://github.com/math-comp/fourcolor> Cited on page: 49
- [27] M. Gromov. Hyperbolic groups. in *Essays in group theory*, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, Band 8, S. 75–263, Springer, 1987. Cited on page: 163
- [28] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.  
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html> Cited on page: 47
- [29] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, fünfte Auflage, Vieweg+Teubner, 1922. Cited on page: 7, A.3
- [30] K. Kasahara. *Origami figürlich und geometrisch*, Augustus Verlag, 2000. Cited on page: 118
- [31] A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994. Cited on page: 69
- [32] S. Lang. *Algebra*, dritte überarbeitete Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 211, Springer, 2005. Cited on page: 80
- [33] Lean community. Learning Lean,  
<https://leanprover-community.github.io/learn.html> Cited on page: 16, A.7, A.9

- [34] Lean community. Get started with Lean,  
[https://leanprover-community.github.io/get\\_started.html](https://leanprover-community.github.io/get_started.html) Cited on page: 17, A.7
- [35] Lean community. Lean web editor,  
<https://leanprover-community.github.io/lean-web-editor/> Cited on page: A.7
- [36] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics, Band 176, Springer, 1997. Cited on page: 126, 137, 168
- [37] C. Löh. *Geometric Group Theory, an Introduction*, Universitext, Springer, 2018. Cited on page: 55, 66, 163, A.19, A.20
- [38] C. Löh. *Algebra*, Vorlesungsskript, WS 17/18, Universität Regensburg, 2018.  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/algebra\\_ws1718/lecture\\_notes.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf)  
Cited on page: 70
- [39] C. Löh. *Lineare Algebra II*, Vorlesungsskript, SS 17, Universität Regensburg, 2017.  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/linalg2\\_ss17/lecture\\_notes.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/linalg2_ss17/lecture_notes.pdf)  
Cited on page: 80, 82, 83, 109, 110
- [40] C. Löh. *Differential Geometry I*, Vorlesungsskript, WS 20/21, Universität Regensburg, 2021.  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/diffgeo1\\_ws2021/lecture\\_notes.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/diffgeo1_ws2021/lecture_notes.pdf)  
Cited on page: 129
- [41] C. Löh, S. Krauss, N. Kilbertus (Hrsg.). *Quod erat knobelandum. Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg*, Springer Spektrum, 2016. Cited on page: 33
- [42] F. Lorenz. *Einführung in die Algebra I*, dritte Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1996. Cited on page: 70
- [43] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Cited on page: A.10
- [44] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*, The Johns Hopkins University Press, 2001. Cited on page: 50
- [45] J.R. Munkres. *Topology*, zweite Auflage, Pearson, 2003. Cited on page: 45
- [46] J.F. Nash. Equilibrium points in  $n$ -person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), S. 48–49, 1950. Cited on page: 34

- [47] J.F. Nash. Non-cooperative games, *The Annals of Mathematics*, 54(2), S. 286–295, 1951. Cited on page: 34
- [48] A.L.T. Paterson. *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, Band 29, AMS, 1988. Cited on page: A.20
- [49] R. Penrose. Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane, *Math. Intelligencer* 2(1), S. 32–37, 1979/80. Cited on page: 121
- [50] A. Ranicki. The Classification of Surfaces and the Jordan Curve Theorem, <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/jordan/index.htm> Cited on page: 45
- [51] W. Rautenberg. *Einführung in die mathematische Logik*, dritte Auflage, Vieweg+Teubner, 2008. Cited on page: 13, 15
- [52] A.F. Ritter. *Lecture on Penrose Tilings*, Oxford Masterclass in Geometry, Vorlesungsskript, 2014. Cited on page: 121
- [53] V. Runde. *Amenability*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Band 1774, Springer, 2002. Cited on page: A.18, A.20
- [54] J. Rychtář. *Entangled Game – Logic Puzzle*, <https://play.google.com/store/apps/details?id=cz.rychtar.android.entangledgame&hl=en> Cited on page: 50
- [55] D. Schattschneider, W. Walker. *M.C. Escher Kaleidozyklen*, Taschen Verlag, Nachdruck, 1994. Cited on page: 118
- [56] R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010. Cited on page: 14, A.10
- [57] K. Volkert. *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*, Klassische Texte der Wissenschaft, Springer Spektrum, 2015. Cited on page: 7, A.3
- [58] W. Walter. *Analysis II*, vierte Auflage, Springer, 1995. Cited on page: 81, 88
- [59] The Xena project, <https://xenaproject.wordpress.com/> Cited on page: 16
- [60] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Band 152, Springer, 1995. Cited on page: 116





# Symbols

---

## Symbols

$\sqsubset$  liegt auf  
(Mini-Geometrie), 11  
 $\perp$  ist orthogonal zu, 84

## A

$A(V)$  Mini-Geometrie des  
Vektorraums  $V$ , 12  
 $\operatorname{arccosh}$  Umkehrfunktion  
von  $\cosh$ , 145  
 $\operatorname{Aut}_{\text{MG}}$  Symmetriegruppe  
einer Mini-Geometrie,  
29

## C

$\operatorname{Cay}(G, S)$  Cayley-Graph von  $G$   
bezüglich  $S$ , 54  
 $\cosh$  Kosinus Hyperbolicus,  
145

## D

$d_1$  Taxi-Metrik, 52

$d_2$  euklidische Metrik, 52  
 $d_\infty$  Maximumsmetrik, 52  
 $D\gamma$  Ableitung von  $\gamma$ , 87  
 $d_H$  hyperbolische Metrik,  
134  
 $\dot{\gamma}$  Geschwindigkeit  
von  $\gamma$ , 87

## G

$g_H$  hyperbolische  
riemannsche Metrik  
auf  $H$ , 130  
 $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$  allgemeine lineare  
Gruppe, 71  
 $g_S$  runde riemannsche  
Metrik auf  $S^2$ , 164

## H

$H$  obere Halbebene, 130  
 $\mathbb{H}^2$  hyperbolische Ebene,  
130

## I

$\text{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) = \{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \mid f(0) = 0\}$ , 71

$\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  riemannsche Isometrie-Gruppe von  $\mathbb{H}^2$ , 136

$\text{Isom}(X, d)$  Isometrie-Gruppe von  $(X, d)$ , 56

**K**

$K_{3,3}$  Graph  $K_{3,3}$ , 49

$\kappa_\gamma(t)$  Krümmung von  $\gamma$  in  $t$ , 93

$K(M)$  Menge der aus  $M$  konstruierbaren Punkte, 67

$K_n$  vollständiger Graph, 41

**M**

Mor Morphismen einer Kategorie, A.10

$\mu(P)$  Flächeninhalt eines Polygons, 102

**N**

$N_X(A)$  Menge der Nachbarn von  $A$  im Graphen  $X$ , 36

**O**

Ob Objekte einer Kategorie, A.10

$O(n)$  orthogonale Gruppe, 108

**P**

$P^2(K)$  projektive Ebene über  $K$ , 12

**R**

$R(n, n)$  Ramsey-Zahl zu  $n$ , 31

**S**

$S^2$  Sphäre, 12

$S^2$  zweidimensionale Einheitssphäre, 164

Set Kategorie der Mengen, A.11

$\text{SL}(n, \mathbb{R})$  spezielle lineare Gruppe, 71

$S_n$  symmetrische Gruppe auf  $\{1, \dots, n\}$ , 29

$\text{SO}(n)$  orthogonale Gruppe, 108

**T**

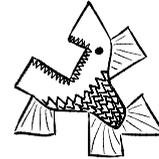
Top Kategorie der topologischen Räume, A.12

$T_x M$  Tangentialraum von  $M$  in  $x$ , 127

$T_z f$  Ableitung von  $f$  im Punkt  $z \in H$ , 131

**X**

$X_{\mathbb{R}}$  geometrische Realisierung von  $X$ , 39



# Index

---

## A

Ableitung, 87  
    hyperbolische Ebene, 131  
affin linear, 27  
affine Gerade, 12  
Algorithmus von Dijkstra, 54  
Alle meine Entchen, 116  
allgemeine lineare Gruppe, 71  
Alpha-Max-Beta-Min, B.12  
Amenabilität, A.20  
Anschauung  
    Graph, 12  
    Krümmung, 95  
    Mini-Geometrie, 10  
    Spiegelung, 107  
    Winkel, 98  
Anti-Dreieck, 9  
aperiodische Pflasterung, 119, 121  
Äquivalenz von Kurven, 90  
Auswahlaxiom, 14  
Automorphismengruppe, A.12  
Axiom  
    Parallelenaxiom, 14  
Axiomatische Geometrie, 6

## Axiome

Auswahlaxiom, 14  
Euklid, 6  
Hilbert, 7, 111, A.3  
Mini-Geometrie, 8  
Parallelenaxiom, 6, 7, 14, A.4

## B

Ball, 65  
    Graph, 65  
Banach-Tarski-Paradoxon, A.18  
Banachraum, 86  
    Differenzierbarkeit, 87  
Baum  
    paradox, A.19  
Beweis, A.8  
Beweisassistent, 15, A.7  
Bierseidel, 7  
Blorx, B.1  
Bogenlänge, 90, 91  
Breitenkreis, 166  
Bundeswettbewerb Mathematik, B.8  
BWM, *siehe* Bundeswettbewerb Mathematik

**C**

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 82  
 Cayley-Transformation, 159  
 Cayleygraph, 54  
 Commander Blorx, B.31  
 Curry-Howard-Isomorphismus, A.8

**D**

Deflation, 121, B.23  
 der rote Faden, A.2  
 Differential, 127  
 differenzierbar, 87  
 Dijkstra, 54  
 DNA-Sequenz, 54  
 Dreieck, 9, B.29  
   Flächeninhalt, 101, 154  
   Kongruenzsätze, 110, 157  
   Sinussatz, 101  
   Winkelsumme, 99, 154, 157, 158  
 Dreiecksungleichung, 52, 80  
 Dreifuß, B.6  
 dualer Graph, 47  
 Dünnheit hyperbolischer Dreiecke, 161

**E**

Ebene  
   Hilbert, 7  
   hyperbolische, 130  
   projektive, 12  
 Ecke, 102  
 Eckpunkt  
   eines geodätischen Dreiecks, 60  
 einbettbar, 41, B.8  
 Einbettbarkeit  
   in  $\mathbb{R}^3$ , B.10  
 eindeutig geodätischer Raum, 60  
 Einheitsnormalenvektor, 95  
 endliche Mini-Geometrie, 11  
 Energie, B.16  
 Erde  
   Großkreis, 13

euclidea, 70  
 Euklid, 6  
   Gerade, 6  
   Punkt, 6  
 euklidische Ebene  
   aperiodische Pflasterung, 121  
   nicht hyperbolisch, 157  
   Pflasterung, 119, 120, B.23  
 euklidische Geometrie, 79  
 euklidische Isometriegruppe, 71, 107, 109, 110  
 euklidische Metrik, 52  
 euklidische Norm, 80  
 euklidische Strecke, 58  
 euklidischer Raum  
   Flächeninhalt, 101  
   Geodäte, 58  
   geodätische Gerade, 59  
   Kongruenz, 110  
   Kongruenzsätze, 110  
   Metrik, 52  
   reguläres Polygon, 112, 114, 115  
   Strecke, 58  
   Symmetrie, 105, 107, 109, 110  
   Winkelsumme, 99  
 euklidischer Vektorraum, 82  
 Euler-Charakteristik, 47, 168  
 eulerscher Polyedersatz, 39, 43, 44  
 Extremalprinzip, 73, B.14

**F**

Facette, 43  
 Faden  
   roter, A.2  
 Fano-Ebene, B.4  
   Nicht-Einbettbarkeit, 78  
 Färbung, 47  
 Färbung, B.8  
 Fehlschluss, 69  
 Flächeninhalt, 101, 102  
   hyperbolisch, 162  
   hyperbolische Ebene, 153  
   Sphäre, 164  
 Formalisierung, 15

Mini-Geometrie, 17  
 Fünffarbensatz, 48  
 Funktionalanalysis, 81

**G**

Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 15  
 Gödelscher Vollständigkeitssatz, 13  
 Galoistheorie, 70  
 Gauß-Bonnet, 168  
   Satz, 167  
   Satz von, 154  
 Gebiet, *siehe* Facette  
 Geodäte, 57, 60, B.10  
   euklidisch, 58  
   hyperbolisch, 144, B.25  
   hyperbolische Ebene, 135, 136, 146  
   Krümmung, 93  
   Länge, 62  
   riemannsche, 57, 94  
   Sphäre, 165, 166  
 geodätische Gerade, 57, 59  
 geodätischer Raum, 60  
 geodätischer Strahl, 57  
 geodätisches Dreieck, 60  
   Eckpunkt, 60  
   hyperbolisch, B.27  
   hyperbolische Ebene, 152  
   Sphäre, 167  
   Winkelsumme, 99, 154, 157, 158, 167  
 geographische Koordinaten, B.29  
 Geometrie  
   axiomatisch, 6  
   euklidisch, 79  
   hyperbolische, 125  
   metrischer Räume, 51  
   riemannsche, 125  
   Was ist das?, 1  
 Geometrische Gruppentheorie, 54  
 geometrische Realisierung, 39, 40  
 geometrische Realisierung, 39  
   Funktorialität, 40  
   zusammenhängend, 44

Gerade  
   affin, 12  
   Euklid, 6  
   Hilbert, 7  
   Mini-Geometrie, 8  
   Schulbuch, B.4  
 Gezwitscher, B.27  
 glatte Mannigfaltigkeit, 127  
 globale negative Krümmung, 163  
 Godzilla, 33  
 goldenes Schnittchen, B.14  
 Grad, 45  
 Graph, 12, B.4  
   Anschauung, 12  
   Ball, 65  
   Cayleygraph, 54  
   dual, 47  
   einbettbar, 41, B.8  
   geometrische Realisierung, 39, 40  
   Grad, 45  
   Heiratssatz, 36  
   Kante, 12  
   Knoten, 12  
   Kontaktgraph, 55  
   Kreis, 43  
   Matching, 36  
   Metrik, 53  
   Mini-Geometrie, 12  
   Morphismus, 27  
   Nachbarn, 36  
   perfektes Matching, 36  
   planar, 41  
   Sphäre, 65  
   vollständig, 41  
   Weg, 43  
   zusammenhängend, 43, 44  
 graphentheoretische Heiratsbedingung, 36  
 graphentheoretischer Heiratssatz, 36  
 Großkreis, 12, 165  
   Erde, 13  
 Gruppe  
   allgemeine lineare, 71  
   als Kategorie, A.11

- amenabel, A.20
  - Cayleygraph, 54
  - Isometriegruppe, 56
  - orthogonale, 108, 109
  - spezielle lineare, 71
  - spezielle orthogonale, 108, 109
  - Wortmetrik, 54
- H**
- Halbebene
    - obere, 130
  - Halbebenen-Modell, 130
  - Halbebenenmodell
    - Winkeltreue, 148
  - Halbkreis
    - verallgemeinerter, 145, 146
  - Halbtöne, 115
  - Hales-Jewett-Theorem, 31
  - Haus des Nikolaus, B.10
  - Hausdorff-Paradoxon, A.19
  - Heirat, 35
  - Heiratsbedingung, 35
    - graphentheoretische, 36
  - Heiratssatz, 35
  - Hilbert, 7, A.3
    - Ebene, 7
    - Gerade, 7
    - Punkt, 7
  - Hilbertraum, 86
  - homöomorph, A.12
  - homogener Raum, 143
  - Homogenität, 80
  - hyperbolische Ebene, 130
    - Ableitung, 131
    - als homogener Raum, 143
    - Dreiecke sind dünn, 161
    - Flächeninhalt, 153
    - Flächenwachstum, B.29
    - Geodäte, 144, 146, B.25
    - geodätisches Dreieck, 152, B.27
    - gereimt, B.25
    - glatte Mannigfaltigkeit, 130
    - Halbebenen-Modell, 130
    - Isometrie, 137, 139, 142, 150, 154
    - Isometriegruppe, 136, 137, 150, 151
    - Konstruktion, 130
    - Kurven, B.23
    - Länge, 131, 132, 133, 134
    - Möbiustransformation, 137, 138, 139, 142, 143, 145
    - Metrik, 131, 132, 133, 134, 145, B.25
      - nicht euklidisch, 157
      - Parallelenaxiom, 147, 152
      - Poincaré-Scheibenmodell, 159
      - reguläre Dreiecke, 157
      - reguläre Pflasterung, 158, 159, 160
      - riemannsche Isometrie, 136, 137
      - riemannsche Metrik, 130
      - Symmetrie, 136
      - Topologie, 134
      - verallgemeinerter Halbkreis, 145, 146
      - vertikale Geodäte, 135, 136
      - Wachstum des Flächeninhalts, 162
      - Winkel, 148, 149
    - hyperbolische Geodäten, B.25
    - hyperbolische Geometrie, 125, 130
    - hyperbolische Länge, 131, 132, 134
      - triviale Abschätzung, 132
      - vertikale Abschätzung, 133
    - hyperbolische Metrik, B.25
      - Länge, 134
    - hyperbolische Spiegelung, B.25
    - hyperbolischer Flächeninhalt, 153
    - hyperbolischer Winkel, 148, 149
    - hyperbolisches Dreieck, 152
    - hyperbolisches geodätisches Dreieck
      - regulär, 157
    - hyperbolisches geodätisches Dreieck
      - ist dünn, 161
      - Kongruenzsatz WWW, 157
      - Satz von Gauß-Bonnet, 154
      - Winkelsumme, 154, 157, 158

**I**

Identitätsmorphismus, A.10  
 induzierte Metrik, 80  
 induzierte Norm, 82  
 Inflation, 121, B.23  
 Inversion, 115, 116  
 Inversion am Kreis, B.27  
 Isomer, B.6  
 Isometrie, 56, 107, B.10  
   flächentreu, 154  
   Geodäte, 57  
   hyperbolische Ebene, 154  
   Länge, 62  
   orientierungserhaltend, 151  
   riemannsche, 136, 137  
   Spiegelung, 106, B.20  
   winkeltreu, 150  
   Winkeltreue, 105  
 Isometriegruppe, 56, 71, B.20  
   euklidischer Raum, 107, 109,  
   110  
   hyperbolische Ebene, 150, 151  
   Quadrat, B.18  
   riemannsche, 136  
   Sphäre, 166  
 isometrische Einbettung, 56  
 Isomorphismus, 27, A.12  
   Mini-Geometrie, B.6  
   von Mini-Geometrien, 26, 27,  
   28

**J**

Jordanscher Kurvensatz, 44

**K**

Kaleidoskop, 115, B.23  
 Kante, 12, 102  
 Kartographie, 167  
 Kategorie, A.10  
   Automorphismengruppe, A.12  
   Beispiele, A.11  
   der Mengen, A.11  
   der topologischen Räume, A.12  
   der Vektorräume, A.11

Gruppe, A.11  
 Isomorphismus, A.12  
 leer, A.11  
 Morphismus, A.10  
 Objekt, A.10  
 King Kong, 33  
 Klasse, A.10  
 Knoten, 12  
   benachbart, 36  
   Grad, 45  
 Koch-Kurve, 63  
 Kollisionsabfrage, B.12  
 kongruent, 73  
 Kongruenz, 73, 110  
 Kongruenzsatz, 112  
   euklidische Dreiecke, 110, B.20  
   hyperbolische Dreiecke, 157  
   Taxi, B.14  
 Konstruierbarkeit, 67, B.12  
   Galoistheorie, 70  
   goldenes Schnittchen, B.14  
   Origami, B.14  
   reguläres Fünfeck, B.23  
   Unmöglichkeit, 70  
 Konstruktionsproblem, 68  
 Kontaktgraph, 55, 66  
 Kontinuumshypothese, 14  
 Kosinus  
   Hyperbolicus, 145  
 Kosinussatz, 106  
 Krümmung, B.18  
 Kreis, 65  
    $\text{\LaTeX}$ , B.14  
   Graph, 43  
   Krümmung, 94, 96  
 Krümmung, 92, 94  
   Anschauung, 95  
   Geodäte, 93  
   Kreis, 94, 96  
   Kurve, 92, 93, B.16  
   signiert, 95, 96  
 Kurve, 86  
   Äquivalenz, 90  
   Bogenlänge, 91  
   differenzierbar, 87

- Einheitsnormalenvektor, 95
  - Energie, B.16
  - Geodäte, 93
  - hyperbolische Länge, 131, 132, 133, 134
  - Koch-Kurve, 63
  - Krümmung, 92, 93, 94, B.18
  - Länge, 61, 88, 91, B.14
  - nicht rektifizierbar, 63
  - Parametrisierung, 90, 91
  - regulär, 91
  - rektifizierbar, 61
  - signierte Krümmung, 95, 96
  - Torsion, 96
  - Winkel, 98
- L**
- L-Tromino, B.8
  - Länge von Kurven
    - Sphäre, 164
  - Längenkreis, 166
  - Landkarte, 47
    - dualer Graph, 47
    - Färbung, B.8
  - Länge, 61, 62, 91, 131, B.14
    - hyperbolische Ebene, 131, 132, 133, 134
    - von Geodäten, 62
  - Länge, 88, 91
  - Lean, 15, A.7, B.6
    - Beweis, 19
    - Mini-Geometrie, 17
  - Lean, B.16
  - leere Kategorie, A.11
  - Lehrplan, B.16
  - liegt auf
    - Mini-Geometrie, 8
  - Lineal, 67
  - Literatur, vii
- M**
- Mannigfaltigkeit, 127
    - glatte, 127
    - riemannsche, 128
  - riemannsche Metrik, 128
    - topologische, 127
  - Matching, 36
  - Mathematik-Wettbewerbe, B.8
  - Matrixgruppe, 71, 108
  - Maximumsmetrik, 52
  - Methan, B.18
  - Metrik, 52
    - Dreiecksungleichung, 52
    - euklidische, 52
    - Graph, 53
    - hyperbolische Ebene, 131, 132, 134, 145, B.25
    - induziert von einer Norm, 80
    - Maximums-, 52
    - riemannsche, 128
    - Sphäre, 164
    - Taxi-, 52
    - Wortmetrik, 54
  - metrische Geometrie, 51
  - metrischer Raum, 52
    - Ball, 65
    - Geodäte, 57
    - geodätisch, 60
    - Kreis, 65
    - Mini-Geometrie?, 60
    - Sphäre, 65
    - Winkel, 98
  - Mindestabstand, B.12
  - Mini-Geometrie, 5, 8
    - Anschauung, 10
    - Anti-Dreieck, 9
    - aus metrischen Räumen?, 60
    - Dreieck, 9
    - Dreifuß, B.6
    - endlich, 11
    - endliches Modell, B.1
    - Formalisierung, 17
    - Gerade, 8
    - Graph, 12
    - Identitätsmorphimus, 26
    - isomorph, 26
    - Isomorphismus, 26, 27, 28, B.6
    - Lean, 17
    - liegt auf, 8

- Mini-Ramsey, 9
- Modell, 11, 17, 21
- Morphismus, 26
  - parallel, 8
  - Parallelenaxiom, 14, 23
  - projektive Ebene, 12
  - Punkt, 8
  - Schnittpunkt, 8
  - Sphäre, 12
  - Symmetrie, B.6
  - Symmetriegruppe, 29
  - Unabhängigkeit, 14, B.4
  - Vektorraum, 12
  - Viereck, B.1
- Mini-Ramsey, 9
- Mittelpunkt einer Strecke, 68
- Möbiustransformation, 137, 138, 139, 142, 143, B.27
  - Halbkreise, 145
  - Isometrie, 139
  - Stabilisator, 142
- Modell
  - endliches, B.1
  - für Mini-Geometrie, 11
  - Mini-Geometrie, 21
- Modus Ponens, A.8
- Molekül, B.20
- Momentenkurve, B.10
- Morphismus, A.10
  - von Graphen, 27
  - von Mini-Geometrien, 26
- N**
- Nash-Gleichgewicht, 34
- Nicht-Planarität, 49
- Norm, 80
  - induziert von einem Skalarprodukt, 82
  - induzierte Metrik, 80
- normierter Raum, 80
- O**
- obere Halbebene, 130
- Objekt, A.10
- OpenSCAD, B.23
- orientierungserhaltend, 151
- Origami, B.14
- orthogonal, 84
- orthogonale Gruppe, 108, 109
- orthogonales Komplement, 84
- Orthogonalität, B.16
- P**
- paradox, A.18
- paradoxe Zerlegung, A.18
- Paradoxon
  - Banach-Tarski, A.19
  - Hausdorff, A.19
- Parallelenaxiom, A.4
- parallel, 8
- Parallelenaxiom, 6, 7, 14, 152
  - hyperbolische Ebene, 147
  - Mini-Geometrie, 14, 23
  - Unabhängigkeit, 23
- Parametrisierung, 90
- Parametrisierung nach Bogenlänge, 91
- Penrose-Pflasterung, 121
  - aperiodisch, 121
  - Deflation, 121
  - Inflation, 121
- Penrose-Protokachel, 121
- perfektes Matching, 36
- periodische Pflasterung, 119, 120
- Pflastergun
  - periodisch, 120
- Pflasterung, 119, B.23
  - aperiodisch, 119, 121
  - Penrose, 121
  - periodisch, 119
  - Protokachel, 119
  - regulär, 120, 167
  - reguläre, 120
- planar, 41
- planare Einbettung
  - Facette, 43
- platonische Körper, 116, 117
  - Graph, 118
  - Herstellung, 118

Poincaré-Scheibenmodell, 159  
 Polarisierung, 82, B.16  
 Polyeder, 116  
   regulär, 116, 117  
 Polygon, 102  
   Ecke, 102  
   Flächeninhalt, 102  
   Inneres, 102  
   Kante, 102  
   reguläres, 112, 114, 115  
 positive Definitheit, 82  
 projektive Ebene, 12  
 Protokachel, 119  
   Penrose, 121  
 Punkt  
   Euklid, 6  
   Hilbert, 7  
   Mini-Geometrie, 8

**Q**

Quadrat, B.18  
 Quadratur des Kreises, 70  
 Quinx, B.10

**R**

Ramsey-Satz, 31  
 Ramsey-Zahl, 30, 31  
 Ramseyzahl, 9  
 reguläre Kurve, 91  
 reguläre Pflasterung, 120  
   hyperbolisch, 158, 159, 160  
   Sphäre, 167  
 regulärer Polyeder, 116, 117  
 reguläres Dreieck, 157  
   Sphäre, 167  
 reguläres hyperbolisches Dreieck,  
   B.27  
 reguläres Polygon, 112, 114, B.23  
   Symmetrie, 114, 115  
 rektifizierbar, 61, 63  
 riemannsche Geodäte, 94  
 riemannsche Geometrie, 125  
 riemannsche Isometrie, 136  
   ist eine Isometrie, 137

riemannsche Isometrie, 136  
 riemannsche Metrik, 128  
   Sphäre, 164  
 Rubik's Cube, 54

**S**

## Satz

Cayley, 56  
 euklidische Kongruenzsätze, 110  
 eulerscher Polyedersatz, 39, 43,  
   44  
 Fünffarbensatz, 48  
 Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 15  
 Gödelscher Vollständigkeitssatz,  
   13  
 Gauß-Bonnet, 154, 167  
 graphentheoretischer Heirats-  
   satz, 36  
 Heiratssatz, 35, 36  
 jordanischer Kurvensatz, 44  
 Kongruenzsätze, 110, B.20  
 Konstruierbarkeit und Galois-  
   theorie, 70  
 Kosinussatz, 106  
 Mini-Ramsey, 9  
 Sechsfarbensatz, 48, B.10  
 Sinussatz, 101  
 Starrheit euklidischer Isome-  
   trien, 71  
 Strahlensatz, 75  
 Vierfarbensatz, 48  
 von Cayley, 56  
 von Gauß-Bonnet, 168  
 von Hales-Jewett, 31  
 von Pick, 103  
 von Ramsey, 31  
 von Sylvester-Gallai, 74  
 Winkelsumme in euklidischen  
   Dreiecken, 99  
 Schnittpunkt, 8  
 Schubfachprinzip, 9, B.12  
 Schulbuch  
   Gerade, B.4  
   Kongruenz, 110

- Kongruenzsätze, 111
  - Symmetrie, 110
  - Winkel, 98
  - Winkelsumme, 101
  - Schule von Athen, B.1
  - Sechsfarbensatz, 48, B.10
  - SET, 31, B.8
  - signierte Krümmung, 95, 96
  - Sinussatz, 101
  - Skalarprodukt, 80, 82
    - induzierte Norm, 82
    - Polarisierung, 82
    - Spiegelung, 106
    - Standard, 82
  - spezielle lineare Gruppe, 71
  - spezielle orthogonale Gruppe, 108, 109
  - Sphäre, 65, 164
    - Geodäten, 165, 166
    - geodätisches Dreieck, 167
    - Geometrie, 164
    - Graph, 65
    - Großkreis, 12, 165
    - Isometriegruppe, 166
    - Länge, 164
    - Metrik, 164
    - Mini-Geometrie, 12
    - reguläre Pflasterung, 167
    - reguläres geodätisches Dreieck, 167
    - riemannsche Metrik, 164
    - Symmetrie, 166
    - Tangentialraum, 164
    - Winkel, 164
  - sphärische Geometrie, *siehe* Sphäre
  - sphärisches Dreieck, 167
  - sphärisches Satz von Gauß-Bonnet, 167
  - Spiegelung, 106, 110, 115, B.20
    - Anschauung, 107
    - hyperbolische Ebene, B.25
  - Spiel
    - euclidea, 70
    - gas/sewer/electric, 49
    - Godzilla vs. King Kong, 33
    - L-Tromino, B.8
    - Nash-Gleichgewicht, 34
    - perfektes Matching, B.8
    - SET, 31, B.8
    - Symmetrie, 33, B.8
    - three utilities, 49
    - Tic-Tac-Toe, 31
  - Spielkartenauswahl, 38
  - SSS, 110
  - SsW, 110, B.20
  - Standardskalarprodukt, 82
  - Starrheit, 71
    - Skalarprodukt, 105
  - stetig differenzierbar, 87
  - Strahlensatz, 75
  - Strecke
    - Mittelpunkt, 68
  - SWS, 110
  - Sylvester-Gallai
    - Satz von, 74
  - Symmetrie, 26, 71, 105, B.20
    - hyperbolische Ebene, 136
    - Kaleidoskop, 115
    - Mini-Geometrie, 26, B.6
    - Molekül, B.20
    - Musik, 115
    - reguläres Polygon, 114, 115
    - Sphäre, 166
    - Virus, B.20
  - Symmetriegruppe
    - Mini-Geometrie, 29
  - symmetrische Gruppe, 29
- T**
- Tangentialbündel, 127
  - Tangentialraum, 127
  - Taxi-Kongruenzsätze, B.14
  - Taxi-Metrik, 52
  - Teilfolge, 53
  - Tic-Tac-Toe, 31
  - topologische Mannigfaltigkeit, 127
  - Torsion, 96
  - Torus, B.10
  - Transitivität, 142, 143
  - Transposition, 115, 116

Tromino, B.8

## U

Unabhängigkeit, 7, 13  
     Auswahlaxiom, 14  
     Kontinuumshypothese, 14  
     Mini-Geometrie, 14, 23, B.4  
     Parallelenaxiom, 14, 23, 152  
 Ungleichung  
     Cauchy-Schwarz, 82  
 Unvollständigkeit, 15

## V

VectR, A.11  
 Vektorraum  
     euklidisch, 82  
     Mini-Geometrie, 12  
     normiert, 80  
 verallgemeinerter Halbkreis, 145,  
     146  
     Möbiustransformation, 145  
 Verifikation, 15  
 vertikale Geodäte, 135, 136  
 Viereck  
     Mini-Geometrie, B.1  
 Vierfarbensatz, 48  
 Villa des Nikolaus, B.10  
 Virus, B.20  
 vollständiger Graph, 41

## W

Weg  
     Graph, 43  
 Wettbewerbe, B.8  
 Winkel, 65, 96, 97, B.18  
     Anschauung, 98  
     hyperbolische Ebene, 148, 149  
     metrisch, 98  
     Sphäre, 164  
     zwischen Kurven, 98  
 Winkelsumme, 99, 154, 157, 158  
     Sphäre, 167  
 Winkeltreue, 105, 148  
 Wortmetrik, 54

WSW, 110, B.20  
 WWW, 157

## Z

Zauberwürfel, 54  
 Zirkel, 67  
 zusammenhängend  
     Graph, 43  
 zweimal differenzierbar, 87  
 zweimal stetig differenzierbar, 87

**Finger weg!** Gaaaaa! ... Das war der lila Knopf. Jetzt kann alles mögliche passieren! Aber fürs Drucken kann das durchaus nützlich sein ...