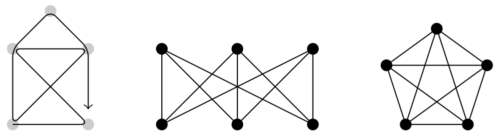
Seminar zur Graphentheorie

Prof. Dr. A. Bartels/Dr. C. Löh Januar 2010

Graphen sind elementare mathematische Strukturen, die vielfach in Erscheinung treten – sowohl in der Modellierung (z.B. Netzwerke aller Art, Spielbäume, ...) als auch in der theoretischen Mathematik (z.B. Cayleygraphen, ...).



In diesem Seminar werden wir die Grundbegriffe der Graphentheorie einführen und einige klassische Probleme der Graphentheorie – und deren elegante Lösungen – behandeln:

- *Eulersche Graphen.* Welche Graphen lassen sich in einem Zug zeichnen?
- *Einbettungsprobleme.* Welche Graphen lassen sich ohne Überkreuzungen in der Ebene zeichnen?
- *Färbungsprobleme.* Wieviele Farben sind nötig um eine Landkarte zu färben?
- *Matchings.* Unter welchen Voraussetzungen können eine Menge von Männern und eine Menge Frauen geeignet verheiratet werden?

Zum Abschluss werden wir uns mit den Bezügen zur geometrischen Gruppentheorie (Cayleygraphen) beschäftigen und als Anwendung den Satz von Whyte über den Zusammenhang zwischen Quasiiometrie und Bilipschitzäquivalenz gewisser Gruppen beweisen.

Themen

Im wesentlichen werden wir das Buch *Combinatorics and Graph Theory* [7] von J.M. Harris, J.L. Hirst und M.J. Mossinghoff und das Standardwerk *Graph Theory* [5] von R. Diestel als Grundlage für dieses Seminar verwenden.

Caveat. In der Graphentheorie gibt es viele im Detail verschiedene Konventionen und Notationen; Sie sollten also in allen Quellen genau nachlesen, welche Konventionen verwendet werden, und versuchen, die Konventionen im Seminar konsistent zu halten.

Vorträge, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, erfordern bei der Vorbereitung etwas mehr Hintergrundwissen in den entsprechenden Gebieten.

Vortrag 1 (Grundlagen der Graphentheorie; 12.04.2010; Benedict Römer)**.** Grundbegriffe der Graphentheorie (Graphen, Knoten, Kanten, Isomorphie von Graphen, (induzierte) Untergraphen, Wege/Kreise, Zusammenhang(skomponenten)); Beispielgraphen (K_n, $K_{m,n}$); klassische Fragestellungen, die mit Hilfe der Graphentheorie modelliert werden können (z.B. Färbungsprobleme, kürzeste

Wege, allgemeine Optimierungsprobleme, das Haus vom Nikolaus, Einbettungsprobleme, …); die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eines Graphen ist gerade
Literatur: Alle Bücher über Graphentheorie, z.B. [7], [5]

Vortrag 2 (Bäume; 19.04.2010; Julian Smith/Jonathan Veit)**.** Bäume/Wälder; Beispiel von Situtationen, die sich natürlich durch Bäume modellieren lassen (z.B. Spielbäume); aufspannende Bäume; Charakterisierung von Bäumen durch die Anzahl der Kanten; Wurzelbäume; Höhe von Wurzelbäumen; Abschätzung der Höhe von Binärbäumen („informationstheoretische Schranke“)
Literatur: [7, Kapitel 1.3.1–1.3.3], [5, Kapitel 1.5]

Vortrag 3 (Eulersche Graphen; 26.04.2010; Henrike Löpmeier)**.** Motivation: das Königsberger Brückenproblem; (geschlossene) Euler-Touren; Eulersche Graphen; Charakterisierung Eulerscher Graphen durch Knotengrade; der Algorithmus von Hierholzer; (evtl. hamiltonsche Wege und Kreise, hamiltonsche Graphen)
Literatur: [7, Kapitel 1.4.1, 1.4.2 (Theorem 1.20, Korollar 1.21) (Kapitel 1.4.3)], [5, Kapitel 1.8 (Kapitel 10)]

Vortrag 4 (Planare Graphen – Eulersche Polyederformel; 03.05.2010; Angela Spalluto)**.** Planare Einbettungen; planare Graphen; der Jordansche Kurvensatz (ohne Beweis); die Eulersche Formel für planare Graphen (inklusive Beweis); die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar
Literatur: [7, Kapitel 1.5.1, 1.5.2 (Theorem 1.35)], [5, Kapitel 4.1, 4.2]

Vortrag 5 (Reguläre Polyeder; 10.05.2010; Berit Bühner)**.** (Konvexe) Polyeder; Kantengraph eines Polyeders; Klassifikation der regulären (dreidimensionalen) Polyeder über die Eulersche Polyederformel; Beschreibung aller regulären (dreidimensionalen) Polyeder
Literatur: [7, Kapitel 1.5.3], [14]

Vortrag 6 (Planare Graphen – Der Satz von Kuratowski; 17.05.2010; Ronja Kürten)**.** (Topologische) Minoren von Graphen; der Satz von Kuratowski; Beweis(skizze) des Satzes von Kuratowski
Literatur: [5, Kapitel 4.4], [7, Kapitel 1.5.4]

Vortrag 7 (Färbungsprobleme und der Fünffarbensatz; 31.05.2010; Jan Vehring)**.** Motivation: Färbungen von Landkarten; der Vierfarbensatz (ohne Beweis); chromatische Zahl von Graphen; Graphen aus Landkarten; der Fünffarbensatz (mit Beweis); evtl. chromatische Polynome
Literatur: [7, Kapitel 1.6.1, (1.6.2), 1.6.3, (1.6.4)], [5, Kapitel 5.1]

Vortrag 8 (Ramsey-Zahlen; 07.06.2010; Irina Klassen)**.** Ramsey-Zahlen; Beispielberechnungen (z.B. $R(1,\ \cdot\ )$, $R(2,\ \cdot\ )$, $R(3,3)$, $R(3,4)$); Satz von Ramsey mit Beweis(skizze); Anwendung: konvexe Polygone und Punktmengen und der Satz von Erdős und Szekeres
Literatur: [7, Kapitel 1.8, Kapitel 2.10.2 (Theorem 2.28, 2.29)], [5, Kapitel 9.1]

Vortrag 9 (Matchings und Heiratssätze; 14.06.2010; Franziska Zumpe)**.** Motivation: das Heiratsproblem; (Perfekte) Matchings; Satz von König; Heiratssatz (für endliche Graphen) und (evtl. mehrere) Beweise des Heiratssatzes
Literatur: [7, Kapitel 1.7.1–1.7.4], [5, Kapitel 2.1, (2.2)]

Vortrag 10 (Matchings und Heiratssätze für unendliche Graphen*; 21.06.2010; Eva Kubitz)**.** Wiederholung des Lemmas von Zorn und einfache Beispielanwendungen; Heiratssatz von Hall für unendliche Graphen inklusive Beweis
Literatur: [8, Kapitel 2.II.5]

Vortrag 11 (Cayleygraphen; 28.06.2010; Brygida Piegza)**.** Wiederholung von Gruppen und Erzeugendensystemen; Cayleygraph einer Gruppe bezüglich eines Erzeugendensystems; Beispiele für Cayleygraphen (zyklische Gruppen, $\mathbf{Z}^n$, die symmetrische Gruppe S_3 (jeweils bezüglich geeigneter Erzeugendensysteme)); die freie Gruppe in zwei Erzeugern und der zugehörige Cayleygraph; metrische Struktur auf Cayleygraphen
Literatur: [6, Kapitel IV], [4, S. 8], [2, Kapitel 27]

Vortrag 12 (Quasiisometrie von Gruppen; 05.07.2010; Niko Santalidis)**.** Quasiisometrien und Bilipschitzäquivalenzen von metrischen Räumen; Quasiisometrien und Bilipschitzäquivalenzen von endlich erzeugten Gruppen; die Wachstumsfunktion als Quasiisometrieinvariante (Beispiel: endlich erzeugte freie abelsche Gruppen); evtl. Gruppenoperationen und das Švarc-Milnor-Lemma
Literatur: [4, Kapitel I.8], [6, Kapitel IV]

Vortrag 13 (Amenable Gruppen*; 12.07.2010; Jonas Köhler)**.** Definition amenabler (endlich erzeugter) Gruppen über Følner-Mengen; (Quasiisometrieinvarianz von Amenabilität); Beispiele amenabler Gruppen; die freie Gruppe in zwei Erzeugern als Beispiel einer Gruppe, die nicht amenabel ist
Literatur: [10], [13, Kapitel 10], [12]

Vortrag 14 (Der Satz von Whyte*; 19.07.2010; Clara Löh)**.** Der Satz von Whyte über Bilipschitzäquivalenz nicht-amenabler endlich erzeugter Gruppen; Beweis(skizze) dieses Satzes über den Satz von Schröder-Bernstein und den Heiratssatz für unendliche Graphen
Literatur: Die Literaturlage ist hier leider nicht so gut; der Originalartikel von Whyte [12] ist, obwohl dort ein allgemeineres Resultat bewiesen wird, ein erster Anhaltspunkt; zusätzlich stellen wir handschriftliche Notizen zu diesem Thema bereit.

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

– Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.

– Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).

– Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.

– Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.

– Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag bei uns vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.

– Für Studenten aus den Bachelor-Studiengängen wird der Vortrag benotet; für alle anderen Teilnehmer wird der Schein nicht benotet.

Es besteht die Möglichkeit, im Rahmen dieses Seminars eine Bachelor-Arbeit zu schreiben. Teilen Sie uns möglichst bald (spätestens bis Ende Februar 2010) mit, falls Sie daran interessiert sind, Ihre Bachelor-Arbeit über dieses Seminar zu schreiben.

Hinweise zur Vorbereitung

– Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.

– Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.

– Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.

– Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.

– Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.

– Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

– Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

  http://books.google.com
  http://www.ams.org/mathscinet
  http://wwwmath.uni-muenster.de/Organisation/Bibliothek/buecher
  http://www.springerlink.com

– Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.

– Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkosistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.

– Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [9]; wir stellen für das Handout eine LaTeX-Vorlage zur Verfügung:
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/clara.loeh/graphs_ss10/handout.tex

– Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

– Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.

– Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.

– Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.

– Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

– Sprechen Sie laut und deutlich.

– Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

– Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?

– Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

[1] J.M. Aldous, R.J. Wilson, S. Best. *Graphs and Applications: An Introductory Approach*, dritte Auflage, Springer, 2000.

Dieses Buch enthält viele schöne Beispielanwendungen der Graphentheorie, aber nicht viele Beweise. Es ist daher gut als Ergänzung zu Diestels Buch [5] geeignet.

[2] M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.

[3] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.

[4] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1999.

[5] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.

Das Standardwerk der Graphentheorie; enthält leider nicht so viele Anwendungsbeispiele.

[6] P. de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago University Press, 2000.

[7] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

Der graphentheoretische Teil dieses Buches bietet eine ausgewogene Mischung aus Theorie und Beispielen; das Buch ist sehr unterhaltsam geschrieben.

[8] K. Jacobs, *Einführung in die Kombinatorik*, de Gruyter, 1983.

[9] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

Eines der Standardwerke zur Benutzung von LaTeX; weitere Unterstützung finden Sie unter http://www.ctan.org/starter.html

[10] Alan L.T. Paterson. *Amenatbility*, volume 29 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, 1988.

Dieses Buch behandelt Amenabilität in einem viel allgemeineren Kontext als wir das benötigen; wir werden nur *diskrete* amenable Gruppen behandeln.

[11] T. Tantau. *The* Ti*k*Z *and* PGF *Packages*,
http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf

Dokumentation des Ti*k*Z-Pakets für LaTeX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in LaTeX zu erstellen.

[12] K. Whyte. Amenability, bi-Lipschitz equivalence, and the von Neumann conjecture, *Duke Math. J.* 99, No. 1, S. 93–112, 1999.

[13] D. Witte Morris. *Introduction to Arithmetic Groups*, vorläufiges Buch, online verfügbar unter arXiv:math/0106063v3, 2001–2008.

[14] G. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Band 152, Springer, 1995.