Optimale Formen und Muster

Prof. Dr. Tim Laux
Hausdorff Zentrum für Mathematik & Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
tim.laux@hcm.uni-bonn.de

1. September 2022

Ist die Natur eine Mathematikerin?

Warum sind Seifenblasen rund? Wie sehen Bienenwaben aus? Und warum? Diesen Fragen wollen wir auf den Grund gehen. Um diese Phänomene zu verstehen, möchten wir die zugrundeliegende mathematische Struktur verstehen.

Abbildung 1: Eine Honigbiene auf Bienenwaben. Quelle: wikipedia.org

1 Optimale Parkettierung

In der ersten Vorlesung wollen wir der Frage nachgehen, warum Bienenwaben sechseckige Muster bilden wie sie in Abbildung 1 zu sehen sind.

Bei der Konstruktion der Bienenwaben bauen Bienen einzelne (fast runde!) Zylinder aus Wachs, in denen sie Nahrung lagern und ihre Brut großziehen. Dabei wollen sie mglichst wenig Wachs pro Volumen benutzen. Dazu erhitzen sie die Zylindrischen Rohlinge, welche dann in eine optimale Form fließen: Zylinder mit sechseckiger Grundseite.

Um dieses Problem exakt zu formulieren, benötigen wir zunächst eine Definition. Ab hier arbeiten wir nur mit einem Querschnitt, d.h. in zwei statt in drei Dimensionen.

Definition 1 (Parkettierung) *Eine* Kachel *ist eine beschränkte abgeschlossene Menge in der Ebene.*

Eine Parkettierung der Ebene ist eine abzählbare Menge von Kacheln $K_1, K_2, \ldots$, die die Ebene überdecken und sodass sich zwei verschiedene Elemente nicht (bzw. nur entlang ihres Randes) überschneiden.

Um die Definition zu verstehen, schauen wir uns zunächst zwei Beispiele an.

Beispiel 1 (Viereckssparkettierung) *Die Kästchen auf kariertem Papier sind eine Parkettierung. Aber es gibt noch unendlich viele weitere Möglichkeiten...*

Beispiel 2 (Dreiecksparkettierung) *Wir können die Ebene mit gleichseitigen Dreiecken parkettieren.*

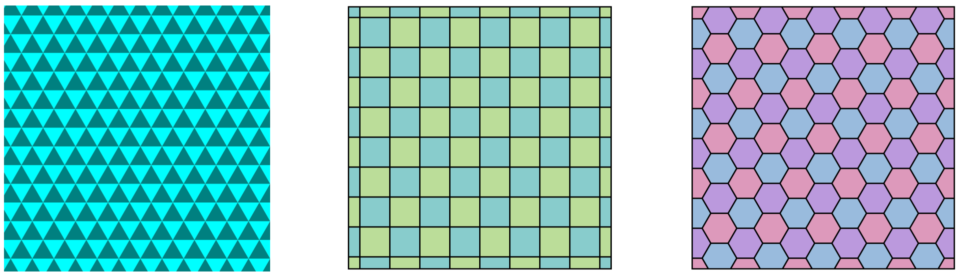

Abbildung 2: Parkettierungen aus regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechsecken. Quelle: wikipedia.org

Was passiert mit regelmäßigen Fünf- und Sechsecken? (Ein *regelmäßigen* Polygon ist ein ebenes Polygon, das sowohl gleichseitig als auch gleichwinklig ist.)

Aufgabe 1 *Gibt es eine Parkettierung aus kongruenten regelmäßigen Fünfecken? Finde eine Parkettierung aus kongruenten (nicht-regelmäßigen) Fünfecken.*

Aufgabe 2 *Finde eine Parkettierung aus kongruenten regelmäßigen Sechsecken.*

Aufgabe 3 (Archimedische Parkettierungen) *Was, wenn wir Dreiecke und Quadrate mischen? Kannst du eine Parkettierung finden, die diese beiden Formen benutzt? Unterhaltet euch in der Klasse nachdem ihr eine Lösung gefunden habt. Vielleicht haben die anderen noch ein weiteres Beispiel gefunden!*

Natürlich müssen Parkettierungen nicht aus Polygonen bestehen. Abbildung 3 zeigt ein Beispiel von Parkettierungen aus der Kunst. (M. C. Escher war fasziniert von diesem Problem und hat viele Bilder dazu entworfen.)

Die mathematische Formulierung des optimalen Partkettierungsproblems, welches die Form der Bienenwaben bestimmt lautet wie folgt:

Abbildung 3: M. C. Escher's Reptilien. Quelle: wikipedia.org

Problemstellung 1 *Finde eine Parkettierung der Ebene, deren Kacheln alle gleichen Flächeninhalt haben, und welche die Gesamtlänge der Kachelgrenzen minimiert.*

Vermutung 1 (Marcus Terentius Varro, 36 v.Chr.?) *Die Lösung des Problems ist die Parkettierung aus regelmäßigen Sechsecken.*

Zwar hat es über 2000 Jahre gedauert, aber nun wissen wir, dass Varro recht hatte:

Satz 1 (Thomas C. Hales, 2001) *Die Parkettierung aus regelmäßigen Sechsecken löst das optimale Parkettierungsproblem.*

Diesen Satz werden wir nicht in der Vorlesung beweisen. Der Beweis kann nicht sehr leicht sein, denn insbesondere muss Hales alle möglichen Parkettierungen (wie z.B. Abbildung 3, aber auch solche, die völlig unregelmäßig sind) ausschließen. Statt uns am Beweis zu versuchen, werden wir in der Übungsstunde einige notwendige Bedingungen überprüfen und so ein Gefühl für das Problem bekommen. In der nächsten Vorlesung werden wir genauer auf einen Beweis einer einfacheren Aussage eingehen.

Um zwei Parkettierungen mit jeweils nur einer Kachelform zu vergleichen, müssen wir nur den Umfang einer einzelnen Kachel berechnen. Das werden wir für die Beispiele in Abbildung 2 tun.

Aufgabe 4 *Berechne den Umfang eines regelmäßigen Drei-, Vier-, und Sechsecks mit Flächeninhalt* 1*. Was schließt du daraus?*

Die Parkettierung aus regelmäßigen Sechsecken hat eine besondere Eigenschaft: *an jeder Ecken kommen genau drei Linien zusammen; und die Linien bilden drei gleichgroße Winkel der Größe* 120°. Das ist ein besonderer Fall eines Steiner-Baumes. Als Übungsaufgabe schauen wir uns den einfachsten Steiner-Baum an.

Aufgabe 5 *Zeige, dass die kürzeste Verbindung zwischen drei Punkten A, B, C entweder* (i) *durch einen der drei Punkte führt oder* (ii) *aus drei geraden Linien besteht, die sich an einem vierten Punkt P unter gleichen Winkeln treffen.*

Falls ihr noch Zeit habt, könnt ihr versuchen kompliziertere Steiner Bäume zu finden.

2 Das isoperimetrische Problem

Zur ersten Frage: Warum sind Seifenblasen rund?

Abbildung 4: Eine Seifenblase. Quelle: wikipedia.org

Einerseits kann die Luft, die in der Seifenblase eingeschlossen ist nicht entweichen und ist (fast) nicht komprimierbar. Andererseits möchte die Seifenhaut wegen Oberflächenspannung möglichst wenig Oberfläche besitzen.

Das heißt, Seifenblasen wollen bei gegebenem eingeschlossenen Volumen ihre Oberfläche minimieren. Die Kugel scheint dieses mathematische Problem zu lösen. In der ersten Vorlesung wollen wir diese Fragestellung genauer beleuchten. Dazu beschränken wir uns aber auf eine leichtere Aufgabe, nämlich die zweidimensionale Version dieses Problems.

Problemstellung 2 *Unter allen ebenen geschlossenen Kurven mit gegebener eingeschloßener Fäche, finde die kürzeste.*

Eine äquivalente Formulierung ist die folgende.

Problemstellung 3 (Isoperimetrisches Problem) *Unter allen ebenen geschlossenen Kurven mit gleicher Länge, finde diejenige, die die größte Fläche umschließt.*

Die Lösung des Problems ist der Kreis:

Satz 2 (Isoperimetrisches Problem I) *Der Kreis ist die kürzeste geschlossenen ebene Kurve mit festgelegter umschlossener Fläche.*

In der zweiten Vorlesung werden wir diesen Satz auf zwei Arten beweisen.

Die äquivalente Formulierung des Satzes in Analogie zu Problem 3 ist die folgende.

Satz 3 (Isoperimetrisches Problem II) *Unter allen geschlossenen Kurven gegebener Länge in der Ebene umschließt der Kreis die größte Fläche.*

Aufgabe 6 (Skalierung) *Zeige, dass die beiden Sätze äquivalent sind.*

Eine direkte Folgerung aus Satz 3 ist die folgende Ungleichung.

Satz 4 (Isoperimetrische Ungleichung) *Für jede beschränkte Menge K in der Ebene gilt die folgende Ungleichung zwischen ihrem Umfang $U(K)$ und Flächeninhalt $F(K)$:*

$$U(K) \geq 2\sqrt{\pi}\sqrt{F(K)}. \tag{1}$$

Aufgabe 7 *Leite Satz 4 aus Satz 3 her.*

Man kann die Ungleichung (1) auch äquivalent schreiben als

$$\frac{U(K)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{F(K)}} - 1 \geq 0.$$

Mit modernen Methoden kann die Ungleichung wie folgt verbessert werden.

Satz 5 (Quantitative isoperimetrische Ungleichung, Fusco–Maggi–Pratelli, 2008) *Es gibt eine Zahl $c > 0$, sodass für jede beschränkte Menge K in der Ebene gilt*

$$\frac{U(K)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{F(K)}} - 1 \geq c(\lambda(K))^2, \tag{2}$$

wobei $\lambda(K)$ die Fraenkel-Asymmetrie von K bezeichnet:

$$\lambda(K) = \min_x \frac{d(K, B_r(x))}{r^2}. \tag{3}$$

Hierbei misst $d(K, B) = F(K\Delta B)$ den Abstand der beiden Mengen K und B, nämlich den Flächeninhalt der Differenz der beiden Mengen K und B.

Die obigen Sätze lassen sich auf beliebig viele Raumdimensionen verallgemeinern.

Aufgabe 8 *Zeige, dass unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang L, das Quadrat mit Seitenlänge $\frac{L}{4}$ den Flächeninhalt maximiert.*

Aufgabe 9 *Zeige, dass unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang L, das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge $\frac{L}{3}$ den Flächeninhalt maximiert.*

Aufgabe 10 (Das Heron Problem) *Seien A und B Punkte auf derselben Seite einer Geraden g und M ein beliebiger Punkt auf g. Die Summe $|\overline{AM}|+|\overline{MB}|$ wird minimal wenn M so gewählt ist, dass $\angle(A, g) = \angle(B, g)$.*