Inwieweit kann universitäres mathematisches Fachwissen helfen, auf Schüler(fehl)vorstellungen zu reagieren?

Andreas Eberl – Stefan Krauss – Matthias Mossburger – Thomas Rauch – Patrick Weber

„Warum ist die Eins keine Primzahl?“, „Was ist Null durch Null?“, „Was ist Null hoch Null?“ oder „Warum ist Minus mal Minus gleich Plus?“ sind typische Schülerfragen, die auf arithmetische bzw. algebraische Verständnisschwierigkeiten hindeuten. Es ist zunächst nicht naheliegend, dass gerade hier die vom „Schülerdenken“ sehr entfernt scheinende universitäre Fachmathematik weiterhelfen kann. Ziel dieses Artikels ist es, ausgehend von einigen solchen Schülervorstellungen bzw. -fragen den *didaktischen* Nutzen hochschulmathematischen Hintergrundwissens zu beleuchten und zu illustrieren, dass universitäres Wissen nach dem Studium nicht etwa „vergessen“ werden sollte, sondern bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Mathematikunterricht durchaus hilfreich sein kann. Mit dem Beitrag soll vorab auch auf eine geplante Buchpublikation hingewiesen werden, in der zahlreiche weitere vergleichbare Beispiele diskutiert werden (Krauss & Lindl, in Vorb.).

1 Einleitung

Immer wieder ist von angehenden Mathematiklehrkräften zu hören, dass das an der Universität vermittelte akademische mathematische Fachwissen für den Lehrberuf wenig hilfreich sei. Bisweilen wird nicht nur in der ersten oder zweiten Ausbildungsphase, sondern auch von erfahrenen Lehrer/inne/n angezweifelt, dass eine hochschulmathematische Fachausbildung in der zu absolvierenden Breite und Tiefe notwendig ist, um Mathematik an der Schule erfolgreich unterrichten zu können. Schließlich scheinen – zumindest bei oberflächlicher Betrachtung – Schul- und universitäre Mathematik nur wenige Überschneidungen zu haben.

Diese insbesondere bei Eintritt in den Schuldienst oftmals empfundene Diskrepanz zwischen Hochschul- und Schulmathematik wurde bereits von Felix Klein (1908) beschrieben und von ihm als *zweite Diskontinuität* in der Lehrkräfteausbildung bezeichnet (als *erste Diskontinuität* wird von ihm der Übergang von der Schulmathematik zur „anspruchsvolleren“ universitären Mathematik zu Beginn des Studiums bezeichnet). Oft wird zwar zugestanden, dass die Hochschulmathematik notwendig sei, um bei zukünftigen Lehrkräften ein adäquates Mathematikbild zu erzeugen oder um typische mathematische Denkweisen zu vermitteln. Aber kann die universitäre Mathematik tatsächlich auch direkt in *unterrichtlichen* Problemsituationen, wie z.B. bei fehlerhaften oder unzureichenden Schülervorstellungen, genutzt werden?

Im Folgenden werden mögliche Fragen von Schüler/inne/n Ausgangspunkte von vier kurzen Abschnitten sein, in denen wir exemplarisch zeigen, dass die universitäre Mathematik durchaus auch in Bezug auf Schülervorstellungen und -schwierigkeiten zu Rate gezogen werden kann. Dabei sollte gleichzeitig deutlich werden, dass entsprechende Kenntnisse aus der Hochschulmathematik auch dazu beitragen können, Mathematiklehrkräften zusätzliche fachliche Sicherheit im Unterrichtsgeschehen zu geben.

Für den vorliegenden Beitrag haben wir als inhaltliche Klammer die Arithmetik gewählt, da diese – auf den ersten Blick – besonders weit von universitärer Axiomatik entfernt zu sein scheint. Neben den folgenden Beispielen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen (rund um die Leitidee 1 der Bildungsstandards) werden in Krauss & Lindl (in Vorb.) etwa 20 weitere Beispiele auch aus der Algebra bis hin zur Schul-Analysis erläutert.

2 Warum soll die 1 keine Primzahl sein?

Ein Schüler überlegt: „Eine Primzahl kann man nur durch 1 und sich selbst teilen. Dann muss doch die 1 auch eine Primzahl sein.“

Man müsste ihm Recht geben, wenn in seinem Schulheft lediglich Folgendes stünde: „Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die man nur durch 1 und durch sich selbst teilen kann.“ Wahrscheinlich steht aber in seinem Schulheft noch ein weiterer Satz wie z.B.: „Die 1 ist jedoch keine Primzahl.“ Weist man auf diesen Nachsatz hin, so provoziert das vielleicht die Frage: „Und warum soll ausgerechnet die 1 keine Primzahl sein?“

Der Schüler nennt eine Gemeinsamkeit der 1 mit den Primzahlen. Ansonsten gibt es aber große Unterschiede. Zum Beispiel:

- Bei Multiplikation mit 1 erhält man die ursprüngliche Zahl, nicht jedoch bei der Multiplikation mit einer Primzahl.
- Anders als die Primzahlen teilt die 1 alle natürlichen Zahlen.

Sind diese Eigenschaften nebensächlich oder wesentlich? Gibt es noch weitere Gründe, warum die 1 keine Primzahl sein soll? Hier hilft ein Blick in die Universität:

Die erste der soeben genannten Eigenschaften spielt eine so wichtige Rolle, dass sie sogar bei den Körperaxiomen auftaucht: Die „Eins“ ist das neutrale Element der Multiplikation. Auch bei anderen Strukturen wie etwa Gruppen und Ringen sind neutrale

Elemente von zentraler Bedeutung. Das Thema „Teilbarkeit" (die zweite eben genannte Eigenschaft) spielt an der Universität ebenfalls eine wichtige Rolle, sonst würde man in manchen Algebrabüchern nicht dutzendmal den Begriff „Teiler" finden (vgl. z.B. BOSCH, 2013). Der Begriff „Teiler" wird für jeden Ring definiert, nicht nur für den Ring $\mathbb{Z}$. Die zweite der oben genannten Eigenschaften ist der Kern eines allgemeinen Begriffs: Die „Einheiten" eines Rings sind genau die Elemente, die alle anderen Elemente teilen. In $\mathbb{Z}$ sind 1 und −1 die Einheiten.
Der eigentliche Grund dafür, dass die Zahl 1 keine Primzahl sein soll, ist jedoch: Die Aussage, dass jede natürliche Zahl größer gleich 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt, wird als Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie (KUNZ, 1994, S. 40) oder auch als Fundamentalsatz der Arithmetik bezeichnet. Wäre die 1 eine Primzahl, dann wäre der Hauptsatz in dieser Formulierung falsch, denn $2 \cdot 3 = 1^5 \cdot 2 \cdot 3$ und jede natürliche Zahl hätte sogar unendlich viele Primfaktorzerlegungen. Man könnte ihn zwar umständlicher formulieren, damit er mit der „Primzahl 1" richtig wird, aber dabei müsste man wieder einen Unterschied zwischen der 1 und den tatsächlichen Primzahlen machen. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist schon an und für sich eines der erstaunlichsten Phänomene der Arithmetik und es wäre sehr schade, wenn dieses Phänomen durch eine ungeschickte Definition der Primzahlen verloren ginge. Zudem könnte man nicht mehr von *der* Primfaktorzerlegung einer Zahl sprechen, wenn man die 1 zu den Primzahlen nehmen würde, sondern lediglich von *einer möglichen* Primfaktorzerlegung.
Es gibt übrigens noch weitere algebraische Aussagen aus der Hochschulmathematik, die umständlicher formuliert werden müssten, wenn man die 1 zu den Primzahlen zählen würde. Zum Beispiel: Für jede Primzahl p gibt es einen Körper mit p Elementen.
Möchte ein/e Schüler/in also wissen, warum die 1 keine Primzahl sein soll, könnte eine Lehrkraft so antworten: „Die 1 unterscheidet sich ganz wesentlich von den Primzahlen. Nur bei Multiplikation mit 1 erhält man stets wieder die ursprüngliche Zahl. Für Primzahlen stimmt das nicht. Und die 1 teilt alle natürlichen Zahlen. Die Primzahlen tun das nicht. Entscheidend ist aber: Wäre die 1 eine Primzahl, so gäbe es für jede natürliche Zahl unendlich viele Primfaktorzerlegungen."

3 Warum darf man auch die Null nicht durch Null dividieren?

Schüler/innen können in der Regel einsehen, dass z.B. $\frac{12}{0}$ nicht erlaubt ist (zumindest kann man das als Lehrkraft recht einfach begründen).

Eine Schülerin möchte nun aber wissen, was $\frac{0}{0}$ ist. Sie argumentiert:
„Es gilt ja $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$ und $\frac{1}{1} = 1$, also ist auch $\frac{0}{0} = 1$."

Die Schülerin verwendet eine sogenannte *Permanenzreihe*, die suggeriert, wie es weitergeht. Solche Reihen kennt sie vielleicht schon aus anderen Zusammenhängen (vgl. hierzu auch die Abschnitte 4 und 5). Interessanterweise könnte man jedoch auch so argumentieren:

$\frac{0}{3} = 0$, $\frac{0}{2} = 0$, $\frac{0}{1} = 0$, also ist auch $\frac{0}{0} = 0$.

Oder so: $\frac{7 \cdot 3}{3} = 7$, $\frac{7 \cdot 2}{2} = 7$, $\frac{7 \cdot 1}{1} = 7$, also ist auch $\frac{0}{0} = \frac{7 \cdot 0}{0} = 7$.

Dies sind drei verschiedene Permanenzreihen, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen!

Jetzt hat man zwar das Argument der Schülerin entkräftet, aber noch nicht bewiesen, dass $\frac{0}{0}$ nicht definiert werden kann. Man befindet sich hier in einer ähnlichen Situation wie bei 0^0 in Abschnitt 4: Sowohl für $0^0 = 0$ als auch für $0^0 = 1$ gibt es plausible Gründe. Bei 0^0 entscheidet man sich für $0^0 = 1$, bei $\frac{0}{0}$ dafür, dass es undefiniert bleibt – warum eigentlich?
Betrachten wir einen häufig genannten Grund, bei dem man sich auf eine bestimmte Bedeutung des Dividierens beruft. $12 : 3 = 4$ bedeutet: 3 passt 4-mal in 12, das heißt $4 \cdot 3 = 12$. Der Quotient 12:0 hat keine entsprechende Bedeutung. Denn es gibt keine Zahl x mit $x \cdot 0 = 12$. Bei 0:0 ist das entsprechende Argument aber nicht mehr so überzeugend, weil es eben Zahlen x mit $x \cdot 0 = 0$ gibt. Immerhin könnte man noch betonen, dass ein solches x nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Art zu argumentieren (nicht nur in Hinblick auf Eindeutigkeit) steht aber im Widerspruch dazu, wie man bei anderen Themen verfährt:

- Die Gleichung $x^2 = 2$ hat zwei Lösungen. Diese Mehrdeutigkeit verhindert nicht, dass man $\sqrt{2}$ definiert, indem man sich für eine der beiden Lösungen entscheidet. Warum sollte man sich nicht für eine der Lösungen von $x \cdot 0 = 0$ entscheiden dürfen, um $0 : 0$ zu definieren?
- In der Grundschule gibt es den genauen Wert des Quotienten $12 : 7$ nicht (abgesehen von 1 Rest 5). Denn es existiert keine natürliche Zahl x mit $x \cdot 7 = 12$. Nachdem man $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}$ erweitert hat, gibt es so eine (rationale) Zahl. Vielleicht kann man ja $\mathbb{Q}$ so geschickt erweitern, dass $12 : 0$ und $0 : 0$ sinnvoll werden. Aber wie soll man in der Unterstufe erklären, dass so etwas nicht geht?
- Auf ursprünglichen Bedeutungen beharrt man in anderen Situationen nicht: 2^n wird zunächst für $n \in \mathbb{N}$ definiert und hat dabei die Bedeutung eines Produkts aus n Faktoren. Diese Bedeutung muss man für $n \in \mathbb{Q}$ fallen lassen. Vielleicht muss man auch bei $12 : 0$ einfach nur die ursprüngliche Bedeutung fallen lassen?

Ein erster Blick in die Hochschulmathematik scheint zunächst nicht weiter zu helfen: In der Algebra werden auf einem Körper nur zwei Verknüpfungen betrachtet: Addition und Multiplikation. Die Division spielt eher eine Nebenrolle und wird auf die Multiplikation durch $a : b := a \cdot b^{-1}$ für $b \neq 0$ zurückgeführt. Diese Definition kann man nicht auf $a : 0 := a \cdot 0^{-1}$ ausdehnen, weil 0^{-1} nicht existiert, jedenfalls nicht in einem Körper: Für alle Elemente x eines Körpers ist $0 \cdot x \neq 1$, denn $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, also $0 \cdot x = 0 \neq 1$. Aber kann man $a : 0$ evtl. anders definieren? Bei 0^0 ist das so: $a^b := e^{b \cdot \ln(a)}$ ist nur für $a > 0$ möglich und im Fall $a = b = 0$ setzt man $0^0 := 1$ (vgl. Abschnitt 4).
Vielleicht sollte man die Frage der Schülerin erst präzisieren, bevor man nach Antworten sucht. Sie will wissen, ob der Bruch $\frac{0}{0}$ eine bestimmte Zahl wie 0 oder 1 darstellt und wenn ja, welche. Es geht hier also auch um den Unterschied zwischen Bruch

und Bruchzahl, der in der Unterstufe bei der Erweiterung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ thematisiert wird. Schulbücher, die sich vor allem an Schüler/innen wenden, müssen die zugrunde liegende Theorie in didaktisch reduzierter Form behandeln. Unter solchen Reduktionen leidet oft die begriffliche Genauigkeit. Daher sollte man einen Blick in Hochschulbücher werfen, wenn man sich als Lehrkraft wenigstens selbst größtmögliche Klarheit verschaffen möchte. Dabei lassen sich auch Ideen finden, wie man $\frac{0}{0}$ in der Unterstufe fundiert behandeln kann.

Eine genaue Erklärung des Übergangs von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ findet man, wenn man sich mit Quotientenringen oder mit Quotientenkörpern beschäftigt. $\mathbb{Q}$ ist ein spezieller Quotientenring von $\mathbb{Z}$. Man kann sogar zu jedem Ring R mit einer Nennermenge $\mathbb{N} \subseteq R$ (wobei $1 \in \mathbb{N}$ und $a \cdot b \in \mathbb{N}$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gelten soll, vgl. z.B. KUNZ, 1994) einen Quotientenring konstruieren. Bleiben wir beim Ring $\mathbb{Z}$. Man wählt eine Menge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ von zugelassenen Nennern. In der Schule ist $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, an der Universität betrachtet man auch andere $\mathbb{N}$. Die Paare $(z;n)$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in N$ nennt man Brüche. In der Schule schreibt man $\frac{z}{n}$ statt $(z;n)$; das hat den Nachteil, dass man für Brüche und Bruchzahlen die gleiche Notation benutzt, was eine begriffliche Unterscheidung erschwert. Durch $(a;b) \sim (c;d) :\Leftrightarrow ad = bc$ wird auf der Menge aller Brüche eine Äquivalenzrelation definiert (in Schul-Notation: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$) und eine Bruchzahl $\frac{z}{n}$ ist die Menge aller Brüche $(a;b)$, die zu $(z;n)$ äquivalent sind.
Bemerkenswert ist nun Folgendes: An der Universität ist $0 \in \mathbb{N}$ erlaubt! Es gibt also Quotientenringe, die $\frac{0}{0}$ enthalten! Das hat aber eine drastische Konsequenz: Wenn die Null in der Nennermenge N enthalten ist, dann sind alle Brüche zueinander äquivalent. Denn nach Definition ist $(a;b) \sim (0;0) \Leftrightarrow a \cdot 0 = b \cdot 0$. Diese Gleichung ist stets erfüllt, also sind alle Brüche zum Bruch $(0;0)$ äquivalent. Der Quotientenring enthält damit nur ein einziges Element und ist zum Nullring $\{0\}$ isomorph. Für Interessierte sei darauf verwiesen, dass Quotientenringe auch als Lokalisierungen bezeichnet werden. Über Lokalisierungen kann man z.B. in BOSCH (2013) nachlesen.

Als „letzte Rettung" von $\frac{0}{0}$ für das gewohnte Rechnen in $\mathbb{Q}$ könnte man eventuell sagen: $\frac{0}{0}$ ist einfach nur ein Symbol, eine weitere Schreibweise für die Zahl 1 und mit $\frac{0}{0}$ wird nichts weiter getan, außer dass es eben die Zahl 1 ist. Genau das macht man bei 0^0: Es ist nur ein weiteres Symbol für 1, mit dem man aber nicht wie sonst nach Potenzgesetzen rechnet (also nicht $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$). Doch während $0^0 := 1$ einen praktischen Nutzen hat (siehe Abschnitt 4), ist uns bei $\frac{0}{0} := 1$ kein Nutzen bekannt.
Mit den obigen Überlegungen haben wir eine Idee gewonnen, die sich didaktisch reduzieren lässt: Wenn man 0 im Nenner zulässt, hat das fatale Auswirkungen auf die Brüche: Sie sind alle zueinander äquivalent! Die Äquivalenz zweier Brüche bzw. die Gleichheit der zugehörigen Bruchzahlen wird in der Schule zum Beispiel in Form einer Anweisung festgelegt: Erweitere oder kürze die beiden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und vergleiche anschließend die Zähler! Kurz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$ (es gibt manchmal auch geschicktere gemeinsame Nenner). Das entspricht genau der oben definierten Äquivalenz zweier Brüche. Die Schülerin vom Anfang dieses Abschnitts vermutet $\frac{0}{0} = \frac{1}{1}$. Man könnte sie zum Beispiel daran erinnern, wie sie entscheidet, ob $\frac{3}{7} = \frac{5}{11}$ gilt bzw. welcher der beiden Brüche die größere Zahl darstellt: $\frac{3}{7}$ wird mit 11 erweitert, $\frac{5}{11}$ mit 7, aber $3 \cdot 11 = 33 \neq 35 = 5 \cdot 7$. Wenn sie bei $\frac{0}{0} = \frac{1}{1}$ genauso verfährt, kommt sie zur richtigen Gleichung $0 = 0$ und findet ihre Vermutung bestätigt. Doch leider folgt dann zum Beispiel auch $\frac{0}{0} = \frac{7}{1}$, also insgesamt $1 = 7$! Wenn also der Bruch $\frac{0}{0}$ eine Zahl wie etwa 1 darstellen würde, dann wäre $1 = 7$ und es hätten sogar alle Brüche den gleichen Wert.

4 Was soll 0^0 sein?

Ein Schüler überlegt: „0^0 muss gleich Null sein! Nulliger geht doch nicht – von Nichts kommt nichts!"
Dieser Schülergedanke ist naheliegend. Betrachtet man das Problem aber etwas genauer, scheinen sogar zwei Lösungen plausibel: Einerseits ist $x^0 = 1$ für alle $x > 0$, andererseits ist $0^y = 0$ für alle $y > 0$. Was nun soll also 0^0 sein? Es ist nicht möglich, beide Gleichungen für den Fall $x = y = 0$ widerspruchsfrei „plausibel" fortzusetzen. Denn die erste Gleichung spricht für $0^0 = 1$, die zweite Gleichung für $0^0 = 0$. Man hört deswegen des Öfteren und auch in manchen Schulbüchern hält sich hartnäckig (das Gerücht), dass 0^0 nicht definiert werden kann. Dies wird gelegentlich damit begründet, dass die beiden Permanenzreihen in folgender Tabelle schließlich zu unterschiedlichen Ergebnissen führen würden (mehr zu Permanenzreihen und dass sich damit keine Aussagen beweisen lassen, siehe Abschnitt 5).

Welche der Permanenzreihen in Tabelle 1 „stimmt" nun?

$3^0 = 1$	$0^3 = 0$
$2^0 = 1$	$0^2 = 0$
$1^0 = 1$	$0^1 = 0$
$0^0 = 1$	$0^0 = 0$

Tab. 1. Zwei Permanenzreihen zu 0^0

Der scheinbare Widerspruch zwischen 0 und 1 löst sich aber auf, wenn man ihn mit Mitteln der Hochschule betrachtet, und zwar mit Hilfe einer Funktion f in zwei Variablen: Der Funktionsterm $f(x,y) := x^y$ sei zunächst für alle $(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \setminus \{(0,0)\}$ definiert. Unsere Frage lautet nun, wie die Funktion f an der Stelle $(0,0)$ fortgesetzt werden soll. Der soeben geschilderte Konflikt besteht dann lediglich (noch) darin, dass die gesuchte Fortsetzung nicht stetig sein kann:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ existiert nicht, weil } \lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \neq 0 = \lim_{y\to 0} f(0,y).$$

Jetzt sieht es so aus, als hätte man bei der Festlegung von 0^0 die freie Wahl zwischen 0 und 1. Aber vielleicht schießt man, salopp gesprochen, bei der einen Festlegung „mehr Tore" als bei der anderen. Bis hierhin steht es 1:1 unentschieden zwischen $0^0 = 1$ und $0^0 = 0$, weil wir uns bisher der Stelle $(0,0)$ einerseits nur mit Punkten $(x,0)$ auf der x-Achse und andererseits nur mit Punkten $(0,y)$ auf der y-Achse genähert haben. Wenn wir uns $(0,0)$ aber auf der Winkelhalbierenden $y = x$ des 1. Quadranten nähern, also mit Punkten (x,x), dann entsteht

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \cdot \ln x} = 1.$$

Jetzt steht es also bereits 2:1 für $0^0 = 1$.

Allgemeiner gilt sogar für *alle* Geraden $y = mx$ mit $m > 0$:

$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = 1$.

Damit steht es sozusagen „$\infty : 1$“ für $0^0 = 1$. Dieses Argument könnte man bereits in der Mittelstufe mit dem Taschenrechner andeuten, sobald Potenzen mit rationalen Exponenten zur Verfügung stehen. Zum Beispiel ist $0{,}001^{0{,}001} \approx 0{,}993$.

Bei der Festlegung eines Wertes für 0^0 wird man sich außerdem auch an praktischen Gründen orientieren. In TRETTER (2013, 8) und auch an vielen anderen Stellen wird 0^0 als 1 definiert. Nur dann gilt zum Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$$

auch für $x = 0$. Denn dann ist $a_0 x^0 = a_0 \cdot 0^0 = a_0$.

Auch bei der berühmten Potenzreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gilt im Übrigen $e^0 = 1$ nur dann, wenn $0^0 = 1$.

Weiterhin ermöglicht die Festlegung $0^0 := 1$ eine sehr elegante induktive Definition von x^n für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe z. B. FORSTER, 2016, 22):

$$x^0 := 1\,,\ x^{n+1} := x^n \cdot x.$$

Am Ende steht es also „ $(\infty + 3) : 1$ “ für $0^0 = 1$.

Je nach Jahrgangsstufe lassen sich im Unterricht also verschiedene Beispiele und Argumente bringen, warum die Festlegung $0^0 := 0$ zwar möglich, aber in vielen mathematischen Situationen die Definition $0^0 := 1$ sinnvoller und hilfreicher ist. Selbst jüngere Schüler könnten hier schon einige ausgewählte Grenzwertprozesse mit einem Taschenrechner durchspielen.

5 Warum ist „Minus mal Minus gleich Plus“?

Da Schüler/innen oft Probleme haben, sich die Multiplikation zweier negativer Zahlen vorzustellen, machen sich Lehrkräfte bei der Unterrichtsvorbereitung Gedanken folgender Art: „Mit Multiplikationstabellen (also Permanenzreihen) kann man plausibel machen, dass es sinnvoll ist, $(-1) \cdot (-1)$ gleich $+1$ zu setzen, z. B.:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1) &= -3 \\ 2 \cdot (-1) &= -2 \\ 1 \cdot (-1) &= -1 \\ 0 \cdot (-1) &= 0 \\ (-1) \cdot (-1) &= +1 \end{aligned}$$

Das ist natürlich kein Beweis, bei $\frac{0}{0}$ oder 0^0 kann das ja auch schiefgehen (vgl. Abschnitte 3 und 4). Wie kann man das also fachgerecht begründen?“

Hinter der Aussage „Minus mal Minus gleich Plus“ steckt keine willkürliche Definition (nach dem Motto „das ist halt so“) und auch keine Spezialität der reellen Zahlen. Es gibt einen handfesten fachwissenschaftlichen Grund, warum $(-1) \cdot (-1)$ gleich 1 ist. Man beachte, dass die folgende Erklärung auch in sehr allgemeinen Situationen, zum Beispiel in allen „Ringen mit Eins“, tragfähig ist:

$$0 = 0 \cdot (-1) = \big(1 + (-1)\big) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)\,,$$

also muss $(-1) \cdot (-1) = 1$ sein, wie die beidseitige Addition von 1 ergibt. Dabei wird u. a. die Gültigkeit des Distributivgesetzes vorausgesetzt. Diese Argumentation funktioniert in allen Ringen R, wenn $1 \in R$ das neutrale Element bezüglich der Multiplikation bezeichnet, $0 \in R$ das neutrale Element bezüglich der Addition und -1 das Inverse von 1 bezüglich der Addition (mehr über das Rechnen in Ringen kann man z. B. in KARPFINGER & MEYBERG, 2017, nachlesen).

Obige Begründung kann man im Unterricht auch mit Verweis auf ein Permanenzprinzip geben: Bei der Zahlenbereichserweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen sollen möglichst viele der bereits bekannten Rechengesetze weiterhin gelten, zum Beispiel das Distributivgesetz. Die obige Rechnung, die den wesentlichen Grund für „Minus mal Minus gleich Plus“ liefert, ist dann auch für Schüler verständlich.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu dem in den Abschnitten 2 bis 5 thematisierten Begriff der Permanenzreihe, über deren Zweischneidigkeit sich Lehrkräfte bewusst sein sollten: Einerseits lassen sich mit Permanenzreihen keine Aussagen beweisen, denn z. B. ist 0^0 definierbar (vgl. Abschnitt 4), „obwohl“ es verschiedene Permanenzreihen mit unterschiedlichen Ergebnissen gibt. Eine *plausible* Fortsetzung einer Reihe muss noch lange keine *gültige* Fortsetzung sein. Andererseits können Permanenzreihen für *anderweitig bereits bewiesene Aussagen* natürlich durchaus (gültige!) Strukturen und Muster verdeutlichen und so zur Sinnstiftung und Wissensvernetzung von Schüler/innen beitragen.

6 Abschließende Bemerkungen

Im vorliegenden Artikel wurde eine kleine Auswahl typischer Schülerfragen vorgestellt, denen oft unzureichende oder fehlerhafte Vorstellungen zugrunde liegen und zu deren Beantwortung ein – mehr oder weniger – umfassender Blick in die Hochschulmathematik hilfreich sein kann.

Die vorgestellten Beispiele sind Bestandteile einer geplanten Buchpublikation (KRAUSS & LINDL, in Vorb.), für die die Autoren des vorliegenden Beitrags derzeit ein entsprechendes wesentlich umfangreicheres Kapitel mit zahlreichen weiteren Beispielen, vor allem aus den Bereichen Arithmetik, Algebra und Analysis, verfassen. Die Frage, ob Hochschulmathematik gelegentlich sogar bei Schülerfragen helfen kann, wird dort also mit „ja“ beantwortet. Solche Zusammenhänge zwischen universitärer Mathematik und Schülervorstellungen können für fachliche Sicherheit im Unterricht sorgen oder eine fundierte Einordnung von bzw. Reaktion auf typische Schülerschwierigkeiten erlauben.

In letzter Konsequenz kann eine solche „didaktische“ Nutzung universitärer Mathematik auch zur Reduzierung der *zweiten Diskontinuität* nach FELIX KLEIN (1908) beitragen. Die vorgestellten Beispiele können zudem bereits die Sinnstiftung im Mathematik-Lehramtsstudium unterstützen, weshalb sie natürlich auch zur Überwindung der *ersten Diskontinuität* genutzt werden können.

Literatur

BOSCH, S. (2013). *Algebra*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

FORSTER, O. (2016). *Analysis 1*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

KARPFINGER, L. & MEYBERG, K. (2017). *Algebra: Gruppen, Ringe, Körper*. Berlin: Springer Spektrum.

KLEIN, F. (1908/2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*. Berlin: Springer.

KRAUSS, S. & LINDL, A. (in Vorb.). Professionswissen von Mathematiklehrkräften. Empirische Befunde und Implikationen für die Praxis. Berlin: Springer.

KUNZ, E. (1994). *Algebra*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

TRETTER, C. (2013). *Analysis I*. Birkhäuser Basel: Springer.

ANDREAS EBERL ist Akademischer Oberrat am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße 31, 93053 Regensburg, andreas.eberl@ur.de.

STEFAN KRAUSS ist Lehrstuhlinhaber für Didaktik der Mathematik an der Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße 31, 93053 Regensburg, stefan.krauss@mathematik.uni-regensburg.de.

MATTHIAS MOßBURGER ist Seminarlehrer für Mathematik am Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut, Jürgen-Schumann-Straße 20, 84034 Landshut, mossburger.hlg@gmx.de.

THOMAS RAUCH ist Seminarlehrer für Mathematik am Ludwigsgymnasium Straubing, Max-Planck-Str. 25, 94315 Straubing, rauch@ludwigsgymnasium.de.

PATRICK WEBER hat in Didaktik der Mathematik an der Universität Regensburg promoviert und ist derzeit Referendar am Erasmus-Grasser-Gymnasium München, 81377 München, patrick.weber@mathematik.uni-regensburg.de.