



UNIVERSITÄT REGensburg

Naturwissenschaftliche Fakultät II - **Physik**

Anleitung zum Anfängerpraktikum **B**

Versuch „gp“: Gekoppelte Pendel

4. Auflage 2025

**Dr. Stephan Giglberger**

**Marten Scheuck**

**David Cyba**

# Inhaltsverzeichnis

|   |          |
|---|----------|
| <b><i>gp</i> Gekoppelte Pendel</b>                                | <b>3</b> |
| <i>gp.1</i> Lernziele . . . . .                                   | 3        |
| <i>gp.2</i> Vorbereitung . . . . .                                | 3        |
| <i>gp.2.1</i> Literatur . . . . .                                 | 4        |
| <i>gp.2.2</i> Grundlegendes . . . . .                             | 5        |
| <i>gp.2.3</i> Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel . . . . . | 6        |
| <i>gp.2.4</i> Schwingungsduern . . . . .                          | 10       |
| <i>gp.2.5</i> Kopplungsgrad . . . . .                             | 11       |
| <i>gp.3</i> Fragen und Aufgaben zur Vorbereitung . . . . .        | 11       |
| <i>gp.4</i> Durchführung . . . . .                                | 12       |

# **gp Gekoppelte Pendel**

## **gp.1 Lernziele**

Die Oszillation zweier identischer, gekoppelter Pendel ist charakterisiert durch die Oszillationsperiode und die Schwebungsdauer. Die Schwebungsdauer ist das Intervall zwischen zwei Zeitpunkten, in denen ein Pendel mit seiner minimalen Amplitude schwingt.

Beide Werte können aus den natürlichen Oszillationsperioden für das gekoppelte Pendel berechnet werden, wenn die Oszillationen in bzw. aus der Phase sind.

In diesem Versuch sollen Sie

- sich mit dem Verhalten zweier gekoppelter Pendel vertraut machen und die Bewegungsgleichungen dieser verstehen
- den theoretischen Hintergrund von Schwebungen erlernen und mit experimentellen Daten vergleichen
- die Fähigkeit entwickeln aus rauschbehafteten oder datenarmen Messreihen physikalische Parameter zu bestimmen

## **gp.2 Vorbereitung**

Folgende Begriffe sollten vor Beginn des Experiments bekannt sein, zum Selbststudium wird auf die aufgelistete Literatur verwiesen:

- Schwebung
- Richtmoment
- Drehmoment

## **gp.2.1 Literatur**

### **Fachliteratur**

Folgende Literatur soll Ihnen bei der Vorbereitung auf diesen Versuch helfen:

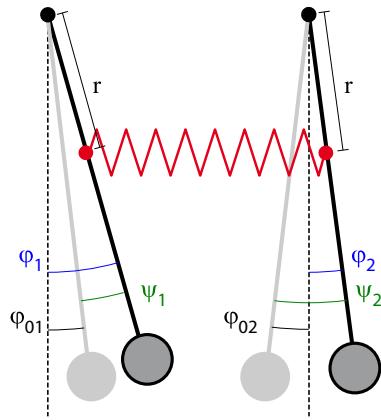
- Gobrecht, Heinrich: *Bergmann-Schaefer - Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band I: Mechanik, Akustik, Wärme. Walter de Gruyter, Berlin, 9. Auflage, 1974.
- Westphal, Wilhelm H.: *Physikalisches Praktikum*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 13. Auflage, 1974.
- Eichler, Hans J., Heinz-Detlef Kronfeldt und Jürgen Sahm: *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 2001.

### **Internetquellen**

- LibreTexts Physics: Coupled Oscillators
- LEIFIphysik: Schwebung

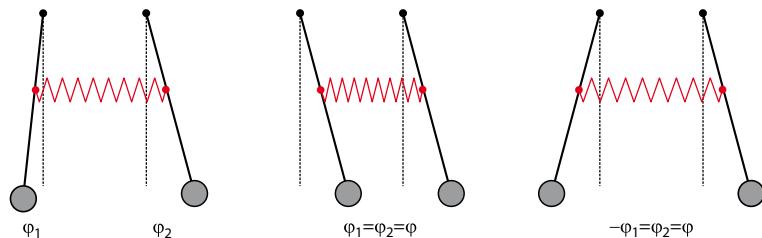
### gp.2.2 Grundlegendes

Bei gekoppelten Pendeln wird die Oszillationsenergie von einem Pendel auf das andere übertragen. Wenn beide Pendel identisch sind und die Oszillation des einen Pendels beginnt, wenn das andere gerade in Ruhe ist, wird durch die gekoppelte Schwingung die Energie mit der Zeit vollständig auf das andere Pendel übertragen, so dass anschließend das erste Pendel gerade zur Ruhe kommt, wenn das andere mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei solchen Ereignissen bzw. die Zeit zwischen zwei Fällen minimaler (oder maximaler) Auslenkung nennt man Schwebungsdauer  $T_S$ .



**Abbildung gp.1:** Gekoppelte Pendelschwingungen: die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bezeichnen den Winkel der Ruhelage gegenüber der Lotrechten,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind die Auslenkwinkel aus der Ruhelage.

Die Oszillation zweier identischer, gekoppelter, idealer Pendel kann betrachtet werden als Superposition zweier natürlicher Oszillationen. Diese „natürlichen“ Oszillationen werden beobachtet, wenn beide Pendel vollkommen in Phase oder vollkommen außer Phase sind. Im ersten Fall schwingen beide Pendel mit einer Frequenz, als gäbe es überhaupt keine Kopplung. Im zweiten Fall hat der Kopplungseffekt sein Maximum und die inhärente Frequenz ist größer. Sämtliche anderen Frequenzen zwischen diesen beiden Extremfällen können als Superposition dieser beiden „natürlichen Oszillationen“ beschrieben werden.



**Abbildung gp.2:** Gekoppelte Pendelschwingungen. Links: allgemeiner Fall mit unterschiedlichen, maximalen Auslenkwinkeln  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Mitte: Oszillation in Phase mit  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Rechts: Oszillation außer Phase mit  $-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ .

### gp.2.3 Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel

#### Pendelschwingung

Ein drehbar gelagerter Körper, auf den eine zum Auslenkwinkel  $\varphi$  proportional, rücktreibende Kraft wirkt, führt harmonische Schwingungen aus. Unter Vernachlässigung der Reibung lässt sich folgende Bewegungsgleichung aufstellen:

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \cdot \varphi(t) = 0, \quad (gp.1)$$

wobei mit  $\omega_0$  die Eigenkreisfrequenz bezeichnet wird. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$\varphi(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + b \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (gp.2)$$

mit

- $\omega_0$  : Eigenkreisfrequenz
- $a = \varphi(0)$  : anfängliche Winkelauslenkung
- $b \cdot \omega_0 = \dot{\varphi}(0)$  anfängliche Winkelgeschwindigkeit

#### Gekoppelte Schwingung

Zur einfacheren Betrachtung soll an dieser Stelle ausschließlich auf die (Feder-)Kopplung zweier mechanischer Pendel eingegangen werden. Weiter sei angenommen, die Schwingungsdauern der beiden Pendel sei gleich. Für die Schwingungen ergeben sich folgende Möglichkeiten:

##### 1. Gleichsinnige Schwingung („in Phase“)

Werden beide Pendel um gleiche Auslenkwinkel  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$  ausgelenkt, so schwingen sie parallel nebeneinander. Unter Vernachlässigung der Trägheit der Feder übt sie keine Drehmomente auf die Pendel aus, beide Pendel schwingen mit der selben Frequenz  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{gl}$ .

##### 2. Gegensinnige Schwingung („gegenphasig“)

Werden beide Pendel um gleiche Auslenkwinkel  $\psi_1(0) = -\psi_2(0)$  in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, so verformt sich die Kopplungsfeder und übt Drehmomente auf die Pendel aus. Die zusätzlichen Drehmomente sind abhängig von der Auslenkung der Pendel („je weiter die Pendel nach außen schwingen, desto stärker werden sie von der Feder zurückgezogen“). Eine derartige symmetrische Schwingung verläuft mit der Eigenfrequenz  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{geg}$

##### 3. Kopplungsschwingung

Ein ausgelenktes Pendel  $\psi_1(0) \neq 0$  „zieht“ über die Feder an dem zweiten Pendel, das ursprünglich in Ruhe war  $\psi_2(0) = 0$ , und regt es so zur Schwingung mit wachsender Amplitude

an. Gleichzeitig verliert das erste Pendel seine Amplitude, bis die gesamte Energie auf das zweite übertragen wurde und das erste zur Ruhe kommt. Dann kehrt sich der gesamte Prozess um und beginnt von Neuem - diesmal in entgegengesetzter Richtung.

Für den letztgenannten, allgemeinen Fall der Kopplungsschwingung (auch *Schwebungsschwingung* genannt), definieren wir

$\omega_+$  Kreisfrequenz, mit der beide Pendel schwingen (die Amplitude ändert sich laufend!).

Es gilt:  $\omega_+ \approx \omega_{gl} \approx \omega_{geg}$ .

$\omega_-$  Kreisfrequenz, mit der sich die Amplitude der Schwingung ändert (Schwebung).

Ausgehend von einem symmetrischen Aufbau, d.h. gleiche Pendellänge, gleiches Trägheitsmoment  $\Theta$ , gleiche Winkelrichtgröße  $\tilde{D}$  („Rückstellmoment“, Verhältnis von Drehmoment zum Drehwinkel), und unter der Annahme einer linearen Kopplung (HOOKEsches Gesetz mit Federkonstante  $D$ ) gilt für das Drehmoment  $M_1$  des ersten Pendel

$$\begin{aligned} M_1 &= -\tilde{D} \cdot \varphi_1 + D \cdot (r\varphi_2 - r\varphi_1) \cdot r + M_0 \\ &= -\tilde{D} \cdot \varphi_1 + Dr^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + M_0. \end{aligned} \quad (gp.3)$$

Der erste Term beschreibt das rücktreibende Drehmoment, der zweite das zusätzliche Drehmoment aufgrund der Kopplung,  $M_0$  schließlich ergibt sich aus der Vorspannung der Feder. Entsprechend gilt für das zweite Pendel

$$M_2 = -\tilde{D} \cdot \varphi_2 + Dr^2 (\varphi_2 - \varphi_1) - M_0. \quad (gp.4)$$

Wir wollen im Folgenden relative Winkeländerungen (also Änderungen gegenüber der Ruhelage des Pendels) betrachten, entsprechend definieren wir

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= \varphi_1 - \varphi_{01} \\ \psi_2 &:= \varphi_2 - \varphi_{02} \end{aligned} \quad (gp.5)$$

Da wir einen symmetrischen Aufbau vorausgesetzt haben, gilt

$$\varphi_0 := \varphi_{01} = -\varphi_{02}, \quad (gp.6)$$

weshalb Gl. gp.5 auch geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_0 \\ \psi_2 &= \varphi_2 + \varphi_0 \end{aligned} \quad (gp.7)$$

In der Ruhelage existieren keine Drehmomente:

$$0 = -\tilde{D} \cdot \varphi_{01} + Dr^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + M_0 \quad (gp.8)$$

$$0 = -\tilde{D} \cdot \varphi_{02} - Dr^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}) - M_0. \quad (gp.9)$$

Aus der Differenz (gp.8) - (gp.9) ergibt sich

$$M_0 = (2Dr^2 + \tilde{D}) \cdot \varphi_0 \quad (gp.10)$$

Somit kommt man zu

$$M_1 = -\tilde{D} \cdot \varphi_1 + Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \quad (gp.11)$$

$$= -\tilde{D} \cdot (\psi_1 + \varphi_0) + Dr^2(\psi_2 - \psi_1 - 2\varphi_0) + (2Dr^2 + \tilde{D}) \cdot \varphi_0$$

$$= -\tilde{D} \cdot \psi_1 + Dr^2(\psi_2 - \psi_1)$$

und entsprechend

$$M_2 = -\tilde{D} \cdot \psi_2 - Dr^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (gp.12)$$

Der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung ist gegeben durch

$$M_1 = \Theta \cdot \ddot{\varphi}_1(t) = \Theta \cdot \ddot{\psi}(t) \quad (gp.13)$$

$$M_2 = \Theta \cdot \ddot{\varphi}_2(t) = \Theta \cdot \ddot{\psi}(t) \quad (gp.14)$$

woraus schließlich folgt:

$$\ddot{\psi}_1(t) = -\frac{\tilde{D}}{\Theta} \cdot \psi_1 + \frac{Dr^2}{\Theta} (\psi_2(t) - \psi_1(t)) \quad (gp.15)$$

$$\ddot{\psi}_2(t) = -\frac{\tilde{D}}{\Theta} \cdot \psi_2 - \frac{Dr^2}{\Theta} (\psi_2(t) - \psi_1(t)). \quad (gp.16)$$

Mit der Abkürzung

$$\omega_{gl}^2 = \frac{\tilde{D}}{\Theta} \quad (gp.17)$$

$$k^2 = \frac{Dr^2}{\Theta} \quad (gp.18)$$

erhält man nun ein System gekoppelter Differentialgleichungen für  $\psi_1(t)$  und  $\psi_2(t)$ , deren Lösung die Pendelbewegung beschreibt:

$$\ddot{\psi}_1(t) + \omega_{gl}^2 \cdot \psi_1 = +k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (gp.19)$$

$$\ddot{\psi}_2(t) + \omega_{gl}^2 \cdot \psi_2 = -k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (gp.20)$$

Aus der Summe und der Differenz der Gln. (gp.19) und (gp.20) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_2 + \psi_1) + \omega_{gl}^2(\psi_2 + \psi_1) = 0 \quad (gp.21)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_2 - \psi_1) + \omega_{gl}^2(\psi_2 - \psi_1) = -2k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (gp.22)$$

Durch Substitution

$$m := \psi_1 + \psi_2 \quad (gp.23)$$

$$n := \psi_1 - \psi_2 \quad (gp.24)$$

wird Gl. (gp.21) und (gp.22) umgeschrieben in

$$\ddot{m} + \omega_{gl}^2 \cdot m = 0 \quad (gp.25)$$

$$\ddot{n} + \underbrace{(\omega_{gl}^2 + 2k^2)}_{\omega_{geg}^2} \cdot n = 0. \quad (gp.26)$$

Die Lösung hiervon stellen harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_{gl}$  bzw.  $\omega_{geg}$  dar:

$$m(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_{gl} t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{gl} t) \quad (gp.27)$$

$$n(t) = a_3 \cdot \sin(\omega_{geg} t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg} t). \quad (gp.28)$$

Die Rücktransformation  $\psi_1(t) = \frac{m+n}{2}$  und  $\psi_2(t) = \frac{m-n}{2}$  führt dann zu

$$\psi_1(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl} t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{gl} t)] + [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg} t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg} t)]}{2} \quad (gp.29)$$

$$\psi_2(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl} t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{gl} t)] - [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg} t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg} t)]}{2} \quad (gp.30)$$

bzw. mit  $\varphi_1(t) = \psi_1(t) + \varphi_0$  und  $\varphi_2(t) = \psi_2(t) - \varphi_0$ :

$$\varphi_1(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl} t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{gl} t)] + [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg} t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg} t)]}{2} + \varphi_0 \quad (gp.31)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl} t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{gl} t)] - [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg} t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg} t)]}{2} - \varphi_0 \quad (gp.32)$$

Der allgemeine Fall der gekoppelten Schwingung ist also eine Überlagerung von zwei Fundamentalschwingungen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_{gl}$  und  $\omega_{geg}$ .  $\omega_{gl}$  ist die Frequenz der ungekoppelten (bzw. gekoppelten, aber gleichsinnig schwingenden) Pendel,  $\omega_{geg}$  ist die Frequenz der gegenphasig schwingenden Pendel.

#### gp.2.4 Schwingungsdauern

Die Kreisfrequenzen der harmonischen Pendelbewegungen

$$\begin{aligned}\omega_{gl} &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_{geg} &= \sqrt{\frac{g+2k}{L}}\end{aligned} \quad (gp.33)$$

mit der Pendellänge  $L$  und der Ortskonstanten  $g$  können verwendet werden, um die natürlichen Oszillationsperioden  $T_{gl}$  und  $T_{geg}$  zu bestimmen:

$$\begin{aligned}T_{gl} &= \frac{2\pi}{\omega_{gl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ T_{geg} &= \frac{2\pi}{\omega_{geg}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g+2k}}\end{aligned} \quad (gp.34)$$

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}\omega_- &= \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} \\ \omega_+ &= \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2}\end{aligned} \quad (gp.35)$$

ergibt sich die mittlere Periode  $T_m$  einer gekoppelten Schwingung

$$\frac{2\pi}{T_m} = \omega_+ = \frac{\pi}{T_{gl}} + \frac{\pi}{T_{geg}} \quad (gp.36)$$

und daher

$$T_m = 2 \cdot \frac{T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{geg} + T_{gl}} \quad (gp.37)$$

Die Schwebungsdauer  $T_S$  ergibt sich entsprechend mit

$$\frac{2\pi}{T_S} = \omega_- = \frac{\pi}{T_{geg}} - \frac{\pi}{T_{gl}} \quad (gp.38)$$

zu

$$T_S = 2 \cdot \frac{T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \quad (gp.39)$$

### gp.2.5 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad  $K$  ist ein Maß für die Stärke der Kopplung und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K &:= \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \\ &= \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \\ &= \frac{Dr^2}{\tilde{D} + Dr^2} \end{aligned} \quad (gp.40)$$

## gp.3 Fragen und Aufgaben zur Vorbereitung

1. Ist die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{geg}$  bei gegenphasiger Schwingung kleiner, gleich oder größer als bei gleichsinniger Schwingung  $\omega_{gl}$
2. Welche Bedeutung haben gekoppelte Schwingungen in der Molekülphysik?
3. Wie kann man Schwebungen zum Stimmen von Musikinstrumenten verwenden? Warum eignet sich diese Methode insbesonders bei tiefen Frequenzen? Wie kann man mit Schwebungen sehr hohe Frequenzen messen?
4. Wie kann mittels eines sog. FRAHMSchen Schlingertanks die Schlingerbewegung eines großen Schiffs verringert werden (Schiffs-Stabilisator)?

## gp.4 Durchführung

Bauen Sie den Versuchsaufbau gemäß der Skizze in Abb. gp.2 auf. Achten Sie insbesonders auf die Nadellager der beiden Pendel: die Nadeln sind sehr spitz, daher empfindlich; darüber hinaus könnten Sie sich bei unsachgemäßem Umgang an den Spitzen verletzen.

Die Kopplungsfeder wird vorerst **noch nicht** verwendet.

Verbinden Sie die Winkelsensoren mit dem Messverstärker (Verstärkungsfaktor 10). Schließen Sie den Ausgang des Messverstärkers an das Oszilloskop und an das USB-Multimeter an. Über das USB-Multimeter können Sie die Daten mit einer Auflösung von 2 Hz in eine Datei schreiben.

**Achtung: der Dezimalpunkt des Datensatzes muss ggfs. zur korrekten Auswertung in ein Dezimalkomma ersetzt werden.**

1. Justieren Sie bei absolutem Stillstand der Pendel den Offset der Winkelsensoren auf 0,0V.
2. Lenken Sie nun eines der Pendel leicht aus und beobachten Sie die Schwingung. Nehmen Sie über die Winkelsensoren und den Messverstärker einen Datensatz auf. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer  $T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}$ . Wiederholen Sie den Messvorgang für das zweite Pendel und stellen Sie sicher, dass im Rahmen der Messgenauigkeit  $T_{01} = T_{02}$  gilt.
3. Verbinden Sie nun die Pendel über die Kopplungsfeder miteinander. Notieren Sie sich die Position der Befestigungsstelle.
4. Zeichnen Sie die Schwingung auf, wenn beide Pendel in Phase sind und bestimmen Sie daraus die Periodendauer  $T_{gl}$ .
5. Zeichnen Sie die Schwingung auf, wenn beide Pendel gegenphasig sind und bestimmen Sie daraus die Periodendauer  $T_{geg}$ .
6. Lenken Sie nun ein Pendel aus der Ruhelage aus und erzeugen so gekoppelte Schwingungen. Zeichen Sie die gekoppelten Schwingungen auf und bestimmen Sie daraus die Oszillationsperiode  $T_m$  und die Schwebungsdauer  $T_S$ .
7. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit denen, die Sie für die natürlichen Perioden  $T_{gl}$  und  $T_{geg}$  zuvor berechnet haben. Berücksichtigen Sie eine kurze Fehlerbetrachtung.
8. Bestimmen Sie den Kopplungsgrad, indem Sie ein Pendel um eine bestimmte Strecke aus der Ruhelage auslenken und die Auslenkung des anderen Pendels messen. Wiederholen Sie diese Messung für die verschiedenen Kopplungsgrade bzw. Aufhängungen.

**Zur Auswertung:**

Die Auflösung der aufgenommenen Daten ist absichtlich im Vergleich zur Periodendauer der Pendel sehr gering gewählt. Nicht jede physikalische Größe, an der Sie im Laufe Ihrer Karriere interessiert sind, wird Ihnen innerhalb Ihrer Messungen auf dem Silbertablett serviert. In der Physik kommt es daher sehr häufig darauf an, auch aus solchen „schlechten“ oder rauschbehafteten Datenlagen Erkenntnisse zu ziehen. So werden Sie im Laufe der Zeit neue Werkzeuge kennenlernen und Erfahrungen sammeln, mit denen die Auswertung dieser Daten leichter wird.

Es gibt hierbei nicht nur eine richtige Methode zur Auswertung. Greifen Sie daher auf alle Ihnen bekannten Mittel zurück (z.B. Python, QtiPlot, Funktionengenerator, etc.), um mit geeigneter Fehlerbetrachtung die gesuchten Größen zu ermitteln.