UNIVERSITÄT REGENSBURG

Naturwissenschaftliche Fakultät II - **Physik**

Physikalisches Praktikum für Lehramt Chemie an Gymnasien

Versuch *gp* - Gekoppelte Pendel

Auflage 10/2025

Gekoppelte Pendel

Die Oszillation zweier identischer, gekoppelter Pendel ist charakterisiert durch die Oszillationsperiode und die Schwebungsdauer. Die Schwebungsdauer ist das Intervall zwischen zwei Zeitpunkten, in denen ein Pendel mit seiner minimalen Amplitude schwingt.
Beide Werte können aus den natürlichen Oszillationsperioden für das gekoppelte Pendel berechnet werden, wenn die Oszillationen in bzw. aus der Phase sind.

0.1 Vorbereitung

Folgende Begriffe sollten vor Beginn des Experiments bekannt sein, zum Selbststudium wird auf die aufgelistete Literatur verwiesen:

- Schwebung
- Richtmoment
- Drehmoment

0.1.1 Literaturangaben

Folgende Literatur soll Ihnen bei der Vorbereitung auf diesen Versuch helfen:

- Gobrecht, Heinrich: *B*ergmann-Schaefer - Lehrbuch der Experimentalphysik, Band I: Mechanik, Akustik, Warme. Walter de Gruyter, Berlin, 9. Auflage, 1974.
- Westphal, Wilhelm H.: *P*hysikalisches Praktikum. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 13. Auflage, 1974.
- Eichler, Hans J., Heinz-Detlef Kronfeldt und Jurgen Sahm: *D*as Neue Physikalische Grundpraktikum. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 2001.

0.2 Grundlegendes

Bei gekoppelten Pendeln wird die Oszillationsenergie von einem Pendel auf das andere übertragen. Wenn beide Pendel identisch sind und die Oszillation des einen Pendels beginnt, wenn das andere gerade in Ruhe ist, wird durch die gekoppelte Schwingung die

Energie mit der Zeit vollständig auf das andere Pendel übertragen, so dass anschließend das erste Pendel gerade zur Ruhe kommt, wenn das andere mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei solchen Ereignissen bzw. die Zeit zwischen zwei Fällen minimaler (oder maximaler) Auslenkung nennt man Schwebungsdauer T_S.

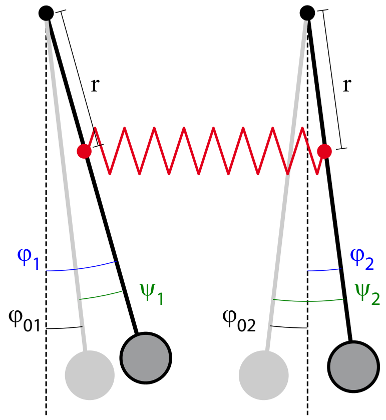

Abbildung 1: Gekoppelte Pendelschwingungen: die Winkel φ_{01} und φ_{02} bezeichnen den Winkel der Ruhelage gegenüber der Lotrechten, ψ_1 und ψ_2 sind die Auslenkwinkel aus der Ruhelage.

Die Oszillation zweier identischer, gekoppelter, idealer Pendel kann betrachtet werden als Superposition zweier natürlicher Oszillationen. Diese „natürlichen“ Oszillationen werden beobachtet, wenn beide Pendel vollkommen in Phase oder vollkommen außer Phase sind. Im ersten Fall schwingen beide Pendel mit einer Frequenz, als gäbe es überhaupt keine Kopplung. Im zweiten Fall hat der Kopplungseffekt sein Maximum und die inhärente Frequenz ist größer. Sämtliche anderen Frequenzen zwischen diesen beiden Extremfällen können als Superposition dieser beiden „natürlichen Oszillationen“ beschrieben werden.

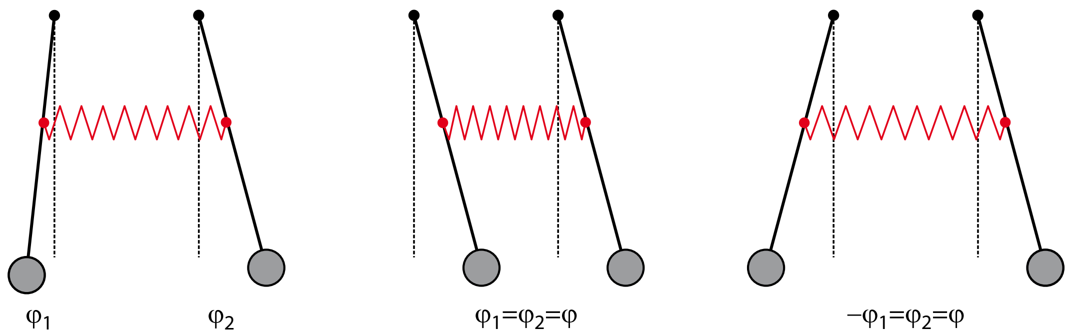

Abbildung 2: Gekoppelte Pendelschwingungen. Links: allgemeiner Fall mit unterschiedlichen, maximalen Auslenkwinkeln $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Mitte: Oszillation in Phase mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Rechts: Oszillation außer Phase mit $-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

0.2.1 Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel

Pendelschwingung

Ein drehbar gelagerter Körper, auf den eine zum Auslenkwinkel φ proportional, rücktreibende Kraft wirkt, führt harmonische Schwingungen aus. Unter Vernachlässigung der Reibung lässt sich folgende Bewegungsgleichung aufstellen:

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \cdot \varphi(t) = 0, \tag{1}$$

wobei mit ω_0 die Eigenkreisfrequenz bezeichnet wird. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$\varphi(t) = a \cdot \cos(\omega_o t) + b \cdot \sin(\omega_o t) \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_0 \quad &: \quad \text{Eigenkreisfrequenz} \\ a \quad &= \quad \varphi(0) : \text{anfängliche Winkelauslenkung} \\ b \cdot \omega_o \quad &= \quad \dot{\varphi}(0)\,\text{anfängliche Winkelgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Gekoppelte Schwingung

Zur einfachenen Betrachtung soll an dieser Stelle ausschließlich auf die (Feder-)Kopplung zweier mechanischer Pendel eingegangen werden. Weiter sei angenommen, die Schwingungsdauern der beiden Pendel sei gleich. Für die Schwingungen ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1. Gleichsinnige Schwingung („in Phase“)
   Werden beide Pendel um gleiche Auslenkwinkel $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ ausgelenkt, so schwingen sie parallel nebeneinander. Unter Vernachlässigung der Trägheit der Feder übt sie keine Drehmomente auf die Pendel aus, beide Pendel schwingen mit der selben Frequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{gl}$.

2. Gegensinnige Schwingung („gegenphasig“)
   Werden beide Pendel um gleiche Auslenkwinkel $\psi_1(0) = -\psi_2(0)$ in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, so verformt sich die Kopplungsfeder und übt Drehmomente auf die Pendel aus. Die zusätzlichen Drehmomente sind abhängig von der Auslenkung der Pendel („je weiter die Pendel nach außen schwingen, desto stärker werden sie von der Feder zurückgezogen“). Eine derartige symmetrische Schwingung verläuft mit der Eigenfrequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{geg}$

3. Kopplungsschwingung
   Ein ausgelenktes Pendel $\psi_1(0) \neq 0$ „zieht“ über die Feder an dem zweiten Pendel, das ursprünglich in Ruhe war $\psi_2(0) = 0$, und regt es so zur Schwingung mit wachsender Amplitude an. Gleichzeitig verliert das erste Pendel seine Amplitude, bis die gesamte Energie auf das zweite übertragen wurde und das erste zur Ruhe

kommt. Dann kehrt sich der gesamte Prozess um und beginnt von Neuem - diesmal in entgegengesetzter Richtung.

Für den letztgenannten, allgemeinen Fall der Kopplungsschwingung (auch Schwebungsschwingung genannt), definieren wir

ω_+ Kreisfrequenz, mit der beide Pendel schwingen (die Amplitude ändert sich laufend!). Es gilt: $\omega_+ \approx \omega_{gl} \approx \omega_{geg}$.

ω_- Kreisfrequenz, mit der sich die Amplitude der Schwingung ändert (Schwebung).

Ausgehend von einem symmetrischen Aufbau, d.h. gleiche Pendellänge, gleiches Trägheitsmoment Θ, gleiche Winkelrichtgröße $\tilde{D}$ („Rückstellmoment“, Verhältnis von Drehmoment zum Drehwinkel), und unter der Annahme einer linearen Kopplung (HOOKEsches Gesetz mit Federkonstante D) gilt für das Drehmoment M_1 des ersten Pendel

$$\begin{aligned} M_1 &= -\tilde{D} \cdot \varphi_1 + D \cdot (r\varphi_2 - r\varphi_1) \cdot r + M_0 \\ &= -\tilde{D} \cdot \varphi_1 + Dr^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + M_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Der erste Term beschreibt das rücktreibende Drehmoment, der zweite das zusätzliche Drehmoment aufgrund der Kopplung, M_0 schließlich ergibt sich aus der Vorspannung der Feder. Entsprechend gilt für das zweite Pendel

$$M_2 = -\tilde{D} \cdot \varphi_2 + Dr^2 (\varphi_2 - \varphi_1) - M_0. \tag{4}$$

Wir wollen im Folgenden relative Winkeländerungen (also Änderungen gegenüber der Ruhelage des Pendels) betrachten, entsprechend definieren wir

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= \varphi_1 - \varphi_{01} \\ \psi_2 &:= \varphi_2 - \varphi_{02} \end{aligned} \tag{5}$$

Da wir einen symmetrischen Aufbau vorausgesetzt haben, gilt

$$\varphi_0 := \varphi_{01} = -\varphi_{02}, \tag{6}$$

weshalb Gl. 5 auch geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_0 \\ \psi_2 &= \varphi_2 + \varphi_0 \end{aligned} \tag{7}$$

In der Ruhelage existieren keine Drehmomente:

$$0 = -\tilde{D} \cdot \varphi_{01} + Dr^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + M_0 \tag{8}$$

$$0 = -\tilde{D} \cdot \varphi_{02} - Dr^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}) - M_0. \tag{9}$$

Aus der Differenz (8) - (8) ergibt sich

$$M_0 = \left(2Dr^2 + \tilde{D}\right) \cdot \varphi_0 \tag{10}$$

Somit kommt man zu

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -\tilde{D}\cdot\varphi_1 + Dr^2(\varphi_2-\varphi_1) + M_0 && (11)\\
&= -\tilde{D}\cdot(\psi_1+\varphi_0) + Dr^2(\psi_2-\psi_1-2\varphi_0) + \left(2Dr^2+\tilde{D}\right)\cdot\varphi_0\\
&= -\tilde{D}\cdot\psi_1 + Dr^2(\psi_2-\psi_1)\\
& \text{ und entsprechend}\\
M_2 &= -\tilde{D}\cdot\psi_2 - Dr^2(\psi_2-\psi_1) && (12)
\end{aligned}
$$

Der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \Theta\cdot\ddot{\varphi}_1(t) = \Theta\cdot\ddot{\psi}(t) && (13)\\
M_2 &= \Theta\cdot\ddot{\varphi}_2(t) = \Theta\cdot\ddot{\psi}(t) && (14)
\end{aligned}
$$

woraus schließlich folgt:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\psi}_1(t) &= -\frac{\tilde{D}}{\Theta}\cdot\psi_1 + \frac{Dr^2}{\Theta}\left(\psi_2(t)-\psi_1(t)\right) && (15)\\
\ddot{\psi}_2(t) &= -\frac{\tilde{D}}{\Theta}\cdot\psi_2 - \frac{Dr^2}{\Theta}\left(\psi_2(t)-\psi_1(t)\right). && (16)
\end{aligned}
$$

Mit der Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{g}l}^2 &= \frac{\tilde{D}}{\Theta} && (17)\\
k^2 &= \frac{Dr^2}{\Theta} && (18)
\end{aligned}
$$

erhält man nun ein System gekoppelter Differentialgleichungen für $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$, deren Lösung die Pendelbewegung beschreibt:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\psi}_1(t) + \omega_{\mathrm{g}l}^2\cdot\psi_1 &= +k^2(\psi_2-\psi_1) && (19)\\
\ddot{\psi}_2(t) + \omega_{\mathrm{g}l}^2\cdot\psi_2 &= -k^2(\psi_2-\psi_1) && (20)
\end{aligned}
$$

Aus der Summe und der Differenz der Gln. (19) und (20) folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}(\psi_2+\psi_1) + \omega_{\mathrm{g}l}^2(\psi_2+\psi_1) &= 0 && (21)\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}(\psi_2-\psi_1) + \omega_{\mathrm{g}l}^2(\psi_2-\psi_1) &= -2k^2(\psi_2-\psi_1) && (22)
\end{aligned}
$$

Durch Substitution

$$
\begin{aligned}
m := &= \psi_1+\psi_2 && (23)\\
n := &= \psi_1-\psi_2 && (24)
\end{aligned}
$$

wird Gl. (21) und (21) umgeschrieben in

$$\ddot{m} + \omega_{\mathrm{gl}}^2 \cdot m = 0 \quad (25)$$

$$\ddot{n} + \underbrace{(\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2k^2)}_{\omega_{geg}^2} \cdot n = 0. \quad (26)$$

Die Lösung hiervon stellen harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{gl} bzw. ω_{geg}dar:

$$m(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) \quad (27)$$

$$n(t) = a_3 \cdot \sin(\omega_{geg}\, t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg}\, t). \quad (28)$$

Die Rücktransformation $\psi_1(t) = \frac{m+n}{2}$ und $\psi_2(t) = \frac{m-n}{2}$ führt dann zu

$$\psi_1(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t)] + [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg}\, t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg}\, t)]}{2} \quad (29)$$

$$\psi_2(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t)] - [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg}\, t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg}\, t)]}{2} \quad (30)$$

bzw. mit $\varphi_1(t) = \psi_1(t) + \varphi_0$ und $\varphi_2(t) = \psi_2(t) - \varphi_0$:

$$\varphi_1(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl}\, t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t)] + [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg}\, t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg}\, t)]}{2} + \varphi_0 \quad (31)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{[a_1 \cdot \sin(\omega_{gl}\, t) + a_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t)] - [a_3 \cdot \sin(\omega_{geg}\, t) + a_4 \cdot \cos(\omega_{geg}\, t)]}{2} - \varphi_0 \quad (32)$$

Der allgemeine Fall der gekoppelten Schwingung ist also eine Überlagerung von zwei Fundamentalschwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{gl} und ω_{geg}. ω_{gl} ist die Frequenz der ungekoppelten (bzw. gekoppelten, aber gleichsinnig schwingenden) Pendel, ω_{geg} ist die Frequenz der gegenphasig schwingenden Pendel.

0.2.2 Schwingungsdauern

Die Kreisfrequenzen der harmonischen Pendelbewegungen

$$\omega_{\mathrm{gl}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (33)$$

$$\omega_{geg} = \sqrt{\frac{g+2k}{L}}$$

mit der Pendellänge L und der Ortskonstanten g können verwendet werden, um die natürlichen Oszillationsperioden T_{gl} und T_{geg} zu bestimmen:

$$T_{gl} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{gl}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (34)$$

$$T_{geg} = \frac{2\pi}{\omega_{geg}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \omega_- &= \frac{\omega_{geg} - \omega_{\mathrm{g}l}}{2} \\ \omega_+ &= \frac{\omega_{geg} + \omega_{\mathrm{g}l}}{2} \end{aligned} \tag{35}$$

ergibt sich die mittlere Periode T_m einer gekoppelten Schwingung

$$\frac{2\pi}{T_\mathrm{m}} = \omega_+ = \frac{\pi}{T_{\mathrm{g}l}} + \frac{\pi}{T_{geg}} \tag{36}$$

und daher

$$T_\mathrm{m} = 2 \cdot \frac{T_{\mathrm{g}l} \cdot T_{geg}}{T_{geg} + T_{\mathrm{g}l}} \tag{37}$$

Die Schwebungsdauer T_S ergibt sich entsprechend mit

$$\frac{2\pi}{T_\mathrm{S}} = \omega_- = \frac{\pi}{T_{geg}} - \frac{\pi}{T_{\mathrm{g}l}} \tag{38}$$

zu

$$T_\mathrm{S} = 2 \cdot \frac{T_{\mathrm{g}l} \cdot T_{geg}}{T_{\mathrm{g}l} - T_{geg}} \tag{39}$$

0.2.3 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad K ist ein Maß für die Stärke der Kopplung und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K &:= \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{\mathrm{g}l}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{\mathrm{g}l}^2} \\ &= \frac{T_{\mathrm{g}l}^2 - T_{geg}^2}{T_{\mathrm{g}l}^2 + T_{geg}^2} \\ &= \frac{D\,r^2}{\tilde{D} + D\,r^2} \end{aligned} \tag{40}$$

0.3 Fragen und Aufgaben zur Vorbereitung

1. Ist die Eigenkreisfrequenz ω_{geg} bei gegenphasiger Schwingung kleiner, gleich oder größer als bei gleichsinniger Schwingung ω_{gl}
2. Welche Bedeutung haben gekoppelte Schwingungen in der Molekülphysik?
3. Wie kann man Schwebungen zum Stimmen von Musikinstrumenten verwenden? Warum eignet sich diese Methode insbesonders bei tiefen Frequenzen? Wie kann man mit Schwebungen sehr hohe Frequenzen messen?
4. Wie kann mittels eines sog. FRAHMschen Schlingertanks die Schlingerbewegung eines großen Schiffs verringert werden (Schiffs-Stabilisator)?

0.4 Durchführung

Bauen Sie den Versuchsaufbau gemäß der Skizze in Abb. 2 auf. Achten Sie insbesonders auf die Nadellager der beiden Pendel: die Nadeln sind sehr spitz, daher empfindlich; darüber hinaus könnten Sie sich bei unsachgemäßem Umgang an den Spitzen verletzen. **Die Kopplungsfeder wird vorerst noch nicht verwendet.**

Die Winkelsensoren sind über den Analog-Digital-Wandler (ADC) über USB mit dem Rechner verbunden. Die Daten werden direkt in der Software Coach 7 Lite eingelesen und können dort verarbeitet werden.

1. Justieren Sie bei absolutem Stillstand der Pendel den Offset der Winkelsensoren auf 0,0V.

2. Lenken Sie beide Pendel geichphasig aus und nehmen Sie einen Datensatz auf, um daraus die Schwingungsdauern $T_L = \frac{2\pi}{\omega_L}$ bzw. $T_R = \frac{2\pi}{\omega_R}$ zu bestimmen. Gilt $T_L = T_R$ im Rahmen der Messgenauigkeit?

3. Verbinden Sie nun die Pendel über die Kopplungsfeder miteinander. Notieren Sie sich die Position der Befestigungsstelle. Justieren Sie den Offset der Winkelsensoren erneut auf 0,0V.

4. Zeichnen Sie die Schwingung auf, wenn beide Pendel in Phase sind und bestimmen Sie daraus die Periodendauer T_{gl}.

5. Zeichnen Sie die Schwingung auf, wenn beide Pendel gegenphasig sind und bestimmen Sie daraus die Periodendauer T_{geg}.

6. Lenken Sie nun ein Pendel aus der Ruhelage aus und erzeugen so gekoppelte Schwingungen. Zeichen Sie die gekoppelten Schwingungen auf und bestimmen Sie daraus die Oszillationsperiode T_{m} und die Schwebungsdauer T_{S}.

7. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit denen, die Sie für die natürlichen Perioden T_{gl} und T_{geg} zuvor berechnet haben. Berücksichtigen Sie eine kurze Fehlerbetrachtung.

8. Bestimmen Sie den Kopplungsgrad, indem Sie ein Pendel um eine bestimmte Strecke aus der Ruhelage auslenken und die Auslenkung des anderen Pendels messen. Wiederholen Sie diese Messung für die verschiedenen Kopplungsgrade bzw. Aufhängungen.

9. Wiederholen Sie Aufgabe 6 bis 8 für einen andern Kopplungsgrad, indem Sie die Feder an einem anderen Punkt der Pedelstange befestigen.