A Anhang: Grundlagen der Fehlerrechnung

A.1 Grundsätzliches

Um den Wert einer Meßgröße (z.B. Länge, Temperatur u.s.w.) zu bestimmen, führt man mehrere Messungen durch. Die beobachteten Meßwerte weichen im allgemeinen voneinander und damit auch von dem unbekannten wahren Wert der Meßgröße ab. Ziel ist es, aus den Meßwerten mit geeigneten mathematischen Beziehungen den besten Schätzwert für den wahren Wert der Meßgröße zu ermitteln. Dieser Schätzwert wird auch Meßergebnis genannt. Außerdem soll ein Maß für die Unsicherheit dieser Schätzung angegeben werden.

Bei jeder Messung treten systematische und zufällige (statistische) Abweichungen der Meßwerte vom wahren Wert der Meßgröße auf, die üblicherweise systematische und zufällige (statistische) Fehler genannt werden. Eine gründliche Fehlerbetrachtung gehört zu jeder sorgfältigen Messung. Das Abschätzen der systematischen Fehler bedarf einer eingehenden Analyse der Meßmethode, der Versuchsanordnung, der verwendeten Geräte usw. Zur Ermittlung der zufälligen (oder statistischen) Fehler dient die sogenannte *Fehlerrechnung*.

A.2 Fehlerrechnung

Den besten Schätzwert (bei einer Normal- bzw. Poisson-Verteilung der Meßwerte, siehe z.B. Literaturliste I/11) stellt das arithmetische Mittel, kurz Mittelwert genannt, dar. Es berechnet sich folgendermaßen aus N Meßwerten x_i einer Meßreihe, z. B. einer Länge x:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{A.1}$$

Das einfachste Maß für die Meßabweichungen ist die folgende Größe:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}|. \tag{A.2}$$

(Frage: Warum sind die Betragsstriche nötig?) Die Größe Δx_1 heißt *mittlerer (absoluter) Fehler* des Mittelwertes.

Zum Unterschied hierzu nennt man die dimensionslose Größe γ

$$\gamma = \left| \frac{\Delta x_1}{\bar{x}} \right| \tag{A.3}$$

den relativen mittleren Fehler. Man gibt γ normalerweise in % an. Als Ergebnis der Messung schreibt man:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_1 \quad (\text{optional zusätzlich: } (\cong \gamma\%)) .$$

Eine andere Möglichkeit die Streuung der Meßwerte um den Mittelwert zu charakterisieren, ist die Angabe der (empirischen) Standardabweichung Δx_2, die als mittlere quadratische Abweichung der Einzelmessungen berechnet wird

$$\Delta x_2 = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2} . \tag{A.4}$$

Die Streuung der Mittelwerte, die man aus mehreren Meßreihen gewonnen hat, ist geringer als die der einzelnen Meßwerte. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich zu

$$\Delta x_3 = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2} . \tag{A.5}$$

Für Fehlerbalken in Diagrammen ist diese Größe jedoch nicht sinnvoll, da im Diagramm jeder Meßpunkt einzeln betrachtet werden muß. In diesem Praktikum reicht oft die einfache Berechnung von Δx_1 aus.

Beispiel: Bestimmung des Durchmessers eines Stabes

Einzelmessungen: 1,24 cm, 1,26 cm, 1,23 cm, 1,25 cm, 1,23 cm.

Dann ist: $\bar{x} = 1,242\,\text{cm}$; $\Delta x_1 = 0,0104\,\text{cm}$; $\Delta x_2 = 0,013\,\text{cm}$; $\Delta x_3 = 0,0058\,\text{cm}$.

Wie gibt man nun das Resultat wirklich an? Sollen 4 Stellen hinter dem Komma angegeben werden? Nein! Es gibt eine einfache Regel:

Fehler auf eine Ziffer aufrunden und für x nur noch die Stelle angeben, in der sich der Fehler bemerkbar macht!

Das Ergebnis der Längenmessung des Stabes lautet dann mit Δx_1:

$$x = (1,24 \pm 0,01)\,\text{cm} \quad (\cong 0,8\%).$$

Die Angabe von Δx_2 bzw. Δx_3 ist nur sinnvoll, falls eine genügend große Zahl von Messungen durchgeführt wurde.
Man muß beachten, daß bisher die *systematischen Fehler* (z.B. Genauigkeit des Maßstabes) noch nicht berücksichtigt sind. Diese sind zum statistischen Fehler zu *addieren*.
Die Durchführung der Fehlerrechnung soll den Experimentator dazu befähigen, die Zuverläs-sigkeit seiner Messungen richtig zu beurteilen, d. h. ihn sowohl vor einer Überschätzung wie auch vor einer Unterschätzung der Meßgenauigkeit zu bewahren. Die richtige Einschätzung von Meßergebnissen ist einer der wichtigsten Punkte wissenschaftlichen Arbeitens und eines der Ziele des A1-Praktikums.

A.3 Fehlerfortpflanzung (Funktion einer Variablen)

Die interessierende Größe ist häufig nicht die Größe x selbst, sondern eine Funktion $f(x)$ hiervon. (Beispiel: Volumen $V(r)$ einer Kugel mit Radius r). Wie groß ist dann der Fehler Δf der Funktion $f(x)$, wenn der Fehler Δx von x bekannt ist?

Eine naheliegende, aber umständliche, in manchen Fällen sogar falsche[1], Methode ist es, Δf direkt zu berechnen,

$$\Delta f_- = f(\overline{x}) - f(\overline{x} - \Delta x),$$

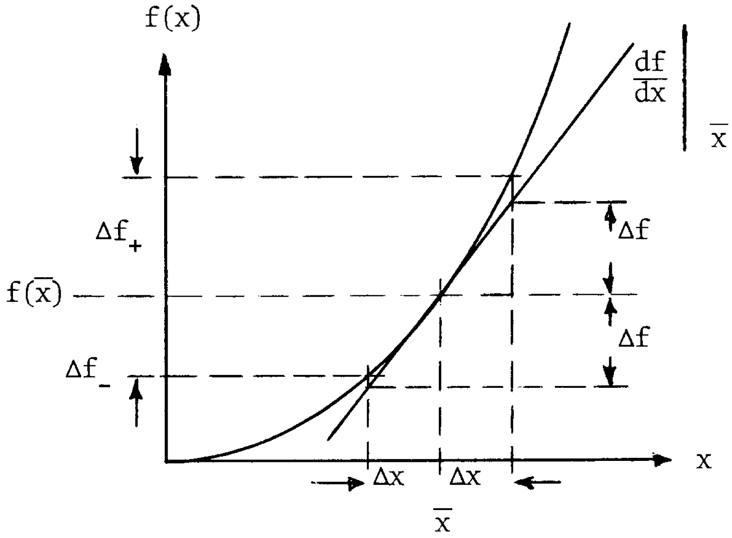
$$\Delta f_+ = f(\overline{x} + \Delta x) - f(\overline{x}). \tag{A.6}$$

Für ausreichend kleine Fehler Δx und stetige Funktionen $f(x)$ benutzt man vorteilhaft die Näherung $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$ und definiert

$$\Delta f = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=\overline{x}} \cdot \Delta x \tag{A.7}$$

als den Fehler der indirekt ermittelten Größe $f(\overline{x})$.

[1]Falsch bzw. sinnlos kann die obige Angabe werden, wenn die betrachtete Funktion nicht monoton ist, d.h. der maximale Fehler im Intervall $2\Delta x$ nicht an den Grenzen des Intervalls auftritt.



Spezialfall: Wenn die Funktion $f(x)$ proportional zu einer Potenz der Meßgröße x ist, wenn sie also die Form $f(x) = \alpha \cdot x^m$ hat, so wird die Fehlerrechnung besonders einfach, wenn man den *relativen* Fehler betrachtet

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \left|\frac{1}{\alpha x^m} m \cdot \alpha \cdot x^{m-1} \Delta x\right| = \left|m \frac{\Delta x}{x}\right| \tag{A.8}$$

d. h. der relative Fehler der m-ten Potenz ist |m|-mal so groß wie der relative Fehler der Meßgröße selbst. **Beispiel: Kugelvolumen:**

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r}$$

A.4 Fehlerfortpflanzung (Funktion mehrerer Variabler)

Die vorher erwähnten Verfahren können sinngemäß auch dann angewendet werden, wenn mehrere Meßgrößen x, y, z ... in die Funktion $f(x, y, z...)$ eingehen.

Beispiel: Dichte einer zylinderförmigen Probe:

$$\rho = m/(\pi r^2 h)$$

Meßgrößen: Masse $\overline{m} \pm \Delta m$, Radius $\overline{r} \pm \Delta r$, Höhe $\overline{h} \pm \Delta h$.

Hierzu betrachtet man der Reihe nach jeweils nur eine Meßgröße als Variable und ersetzt die übrigen durch ihren (als Konstante aufgefaßten) Mittelwert[2]. Man berechnet dann den von dieser Größe herrührenden absoluten Fehler Δf_1; entsprechend Δf_2 usw. und addiert schließlich alle Fehler auf. Dies ergibt den (maximal möglichen) Gesamtfehler:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3 \ldots \\ &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| + \ldots \end{aligned} \tag{A.9}$$

Bei Verwendung der Standardabweichungen Δx_s, Δy_s und Δz_s, die hier mit dem Index S gekennzeichnet werden sollen, erhält man die Standardabweichung von f:

$$\Delta f_s = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 \Delta x_s^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \Delta y_s^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 \Delta z_s^2}. \tag{A.10}$$

Beispiel: Dichte der Zylinderprobe Der Fehler ergibt sich aus

$$\Delta\rho = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right| = \frac{1}{\pi r^2 h}\Delta m \\ \Delta\rho_2 &= \left|\frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r\right| = \frac{2m}{\pi r^3 h}\Delta r \\ \Delta\rho_2 &= \left|\frac{\partial\rho}{\partial h}\Delta h\right| = \frac{m}{\pi r^2 h^2}\Delta h \end{aligned}$$

Man erhält insbesondere zwei sehr wichtige Regeln, die keine weitere Näherung darstellen, sondern aus obigem abgeleitet werden können:

Regel 1: Der *absolute Fehler* **einer Summe oder einer Differenz von Größen ist die Summe der einzelnen absoluten Fehler.**

Regel 2: Der *relative Fehler* **eines Produktes oder eines Quotienten von Größen ist die Summe der einzelnen relativen Fehler, wobei die jeweiligen Potenzen im Sinne des „Spezialfalles "Gleichung 8 zu berücksichtigen sind.**

zu 1: Verifizieren Sie dies aus Gl. (9) mit $f = x \pm y$! Beispiel: Zeitmessung mit der Stoppuhr: die Unsicherheit beim Ein- und Ausschalten beträgt jeweils 0,1 s. Die Zeitdifferenz $t = t_{aus} - t_{ein}$ hat daher einen Fehler von 0,2 s. (Wie könnte man anschaulich begründen, daß man auch bei einer Differenz die Fehler addieren muß?)

[2] Die so gebildeten Ableitungen heißen "partielle Ableitungenünd werden durch die Symbole $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$ ausgedrückt.

zu 2: Führen Sie den Beweis mit $f = x \cdot y$ und $f = x/y$! Beispiel: Dichte der Zylinderprobe. Verifizieren Sie mit obigen Ergebnissen, daß gilt $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$.

Durch schrittweises Anwenden dieser Regeln können die meisten Probleme der Fehlerrechnung im Praktikum gelöst werden. Dieser letzte Satz hat es wirklich in sich. Wer bei der Fehlerrechnung vorher nachdenkt, kann sehr viel Zeit sparen.

Übungsbeispiel: Fläche eines Kreisringes

Innerer bzw. äußerer Radius: $\overline{r_1} \pm \Delta r_1$ bzw. $\overline{r_2} \pm \Delta r_2$

Die Fläche setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: $F = F_2 - F_1, \quad F_2 = \pi r_2^2, \quad F_1 = \pi r_1^2$.

Anwendung von Regel 2 mit „Spezialfall “:

$$\frac{\Delta F_1}{F_1} = 2\frac{\Delta r_1}{r_1} \Longrightarrow \Delta F_1 = 2F_1\frac{\Delta r_1}{r_1},$$

$$\frac{\Delta F_2}{F_2} = 2\frac{\Delta r_2}{r_2} \Longrightarrow \Delta F_2 = 2F_2\frac{\Delta r_2}{r_2}.$$

Anwendung von Regel 1:

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = 2F_1\frac{\Delta r_1}{r_1} + 2F_2\frac{\Delta r_2}{r_2}.$$

Direkte Rechnung nach Gl.(9): $\Delta F = 2\pi r_1 \Delta r_1 + 2\pi r_2 \Delta r_2$.

Übungsaufgabe:

Ein kurzes Stück Draht wurde vermessen, es ergab sich für seine Länge l = $(51,0 \pm 0,5)$ mm und für den Durchmesser d = $(0,33 \pm 0,01)$mm.

Wie groß ist der relative und der absolute Fehler des Volumens ($V = 4,3620228 \cdot 10^{-3}$ cm^3)? Bis zu welcher Stelle ist die Angabe von V sinnvoll?

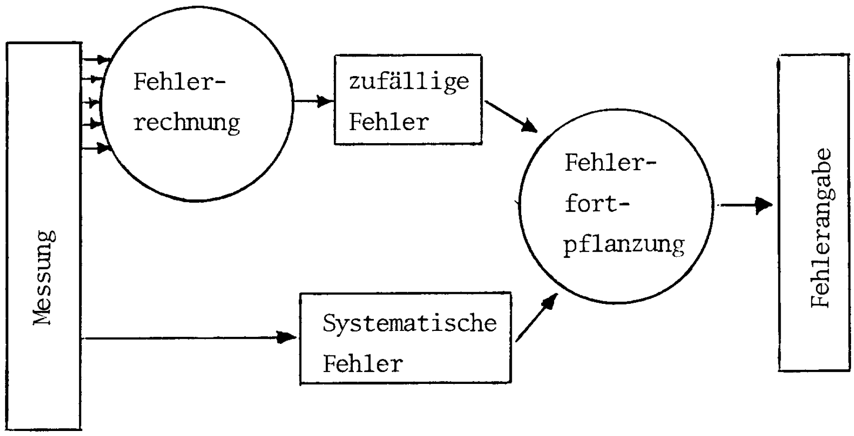
A.5 Weitere grundsätzliche Überlegungen

Fehlerangaben gehören ebenso zum Ergebnis wie die Angabe der Einheit des Messwerts!

Wenn Sie z.B. für die Erdbeschleunigung statt des wahren Wertes $9,809\,\mathrm{ms}^{-2}$ den Wert $9,872\,\mathrm{ms}^{-2}$ ermitteln, so können Sie die Übereinstimmung zunächst weder als gut noch als schlecht bezeichnen.

Es ist auch nicht klar, ob die vierstellige Zahlenangabe vernünftig ist, denn der Meßwert kann ja nur bis zu derjenigen Stelle zuverlässig ermittelt werden, in der der Fehler erscheint. Falls der Fehler hier z.B. 2% beträgt, also $0,2\,\mathrm{ms}^{-2}$, dann wäre allein die Angabe $(9,9 \pm 0,2)\,\mathrm{ms}^{-2}$ sinnvoll und die Übereinstimmung mit dem wahren Wert sehr gut (nämlich innerhalb der Fehlergrenze). Falls Sie jedoch aufgrund einer sorgfältigen Fehleranalyse sicher sind, daß zufällige und systematische Fehler

kleiner als $0{,}001\,\mathrm{ms}^{-2}$ sind, so würde bereits der Wert $9{,}812\,\mathrm{ms}^{-2}$ eine signifikante Abweichung bedeuten und Sie könnten eventuell ein Erzlager neu entdeckt haben.
Rechnen Sie andererseits bei der Fehlerermittlung nie genauer als notwendig. Runden Sie auf, verwenden Sie Näherungen und vermeiden Sie umständliches und mühsames Rechnen mit zu hoher Stellenzahl, denn der Fehler soll im Endergebnis sowieso nur einstellig angegeben werden.
Bedenken Sie stets, daß nur die zufälligen Fehler berechnet werden können. Systematische Fehler sind zusätzlich zu betrachten. Sie unterliegen den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung ebenso wie die zufälligen Fehler.



B Graphische Darstellung und Auswertung

B.1 Lineare Gesetze

Man führt Messungen durch, wenn man die Richtigkeit einer Theorie oder Hypothese überprüfen oder Naturkonstanten bestimmen will.
Leider hat jede physikalische Messung die Schwäche der Ungenauigkeit (s.oben). Kann man überhaupt mit ungenauen Messungen mathematische Zusammenhänge, die durch Funktionen beschrieben werden, überprüfen?
Die Überprüfung ist sehr leicht, wenn der theoretische Zusammenhang zwischen Meßgrößen linear ist, wie z.B. bei der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (siehe auch Abb. 1, S. 39):

$$x = x_0 + v \cdot t$$

Um die Gültigkeit eines solchen Gesetzes zu überprüfen, und/oder die „Parameter “x_0 und v zu bestimmen, werden Wertepaare (x_i, t_i) gemessen und in einem (x,t) - Koordinatensystem aufgetragen. An jede Achse gehören Meßzahlen, Bezeichnungen der Größen und ihre Einheit. Die Einheit wird entweder in eckigen Klammern hinter die Meßzahlen geschrieben oder die Bezeichnung wird durch die Einheit dividiert.
Die Fehler der einzelnen Meßgrößen werden durch „Fehlerbalken“dargestellt. Bei Gültigkeit des Gesetzes liegen dann die Meßpunkte mehr oder weniger genau auf einer Geraden, die man zunächst nach Augenmaß[1] einzeichnet. Die Konstanten v und x_0 bestimmt man i.a. aus der Geradensteigung (Einheiten beachten!) bzw. den Achsenabschnitten, und nicht aus den Meßpunkten selbst. Durch das Einzeichnen der Gerade wird eine Mittelung der Meßwerte vorgenommen, so daß die dadurch bestimmten Werte genauer sind.
Den Fehler dieser Größen bestimmt man aus der Grafik folgendermaßen: durch die Meßpunkte (die ja wegen der oben erwähnten Ungenauigkeit Δx der Orts- und Δt der Zeitmessung keine "Punkteßind, sondern horizontale und vertikale „Fehlerbalken “haben, die auch in die Zeichnung gehören), kann man unterschiedliche Geraden legen. Aus den beiden noch akzeptierbaren extremen Geraden[2] folgen

[1] Das Auge ist ein sehr präzises Instrument, solange nicht der subjektive Wunsch die Oberhand bekommt.
[2] Hierzu müssen Sie ein physikalisches „Gespür “entwickeln. Übertreibungen sind ebenso Fehl am Platz wie beschönigte Ergebnisse. Ein nicht gemessener Nullpunkt ist dabei ohne Bedeutung.

die Grenzen, zwischen denen das Ergebnis liegen muß. Systematische Abweichungen der Meßpunkte von der Geraden deuten darauf hin, daß entweder das zugrundegelegte Gesetz nicht gültig ist oder daß ein systematischer Fehler der Meßmethode vorliegt.

Übungsaufgabe:
Bestimmen Sie aus Abb. 1 die Werte von v und x_0 mit Fehlerangaben.

B.2 Nichtlineare Gesetze

Nichtlineare Gesetze versucht man durch geeignete Hilfsgrößen auf lineare zurückzuführen, da diese leichter zu überprüfen und auszuwerten sind.

Beispiel: gleichförmig beschleunigte Bewegung $y = \frac{a}{2}t^2$ (Abb. 2). Zwischen y und der Hilfsgröße $T = t^2$ besteht eine lineare Beziehung (Abb. 3). Man hat damit gewissermaßen das Koordinatensystem durch eine Dehnung der x-Achse so verzerrt, daß dabei die Parabel zu einer Geraden gebogen wurde. Bestimmen Sie a aus Abb. 3.

B.3 Logarithmische Darstellung

Logarithmenpapiere sind spezielle Formen von verzerrten Koordinatensystemen. Die Netzteilung ist dabei logarithmisch, d.h. es ist am Rande zwar der Wert z angeschrieben, die tatsächlich aufgetragene Strecke entspricht jedoch dem Wert $y = \log z$. Auf diese Weise erspart man sich die Berechnung von $\log z$: man trägt formal den Meßpunkt beim Zahlenwert ein, hat damit aber in Wirklichkeit $\log z$ aufgetragen, s. Abb. 4.
Jede Zehnerpotenz beansprucht die gleiche Strecke. Der Anfang der Zehnerpotenzen kann beliebig gewählt werden.
Bei einfach-log. Papier ist nur eine, bei doppelt-log. Papier sind beide Koordinatenachsen logarithmisch geteilt.

B.4 Verwendung der Logarithmenpapiere

Doppelt-log. Papier (Abb. 4)

Potenzgesetze der Form $y = a \cdot x^n$ werden durch Logarithmieren lineare Beziehungen zwischen den Hilfsgrößen $z = \log y$ und $w = \log x$:

$$\begin{aligned} \log y &= \log a + n \log x, \\ z &= \log a + nw. \end{aligned}$$

Wie man der Formel ansieht, kann dann aus der Geradensteigung ein unbekannter Exponent n bestimmt werden. Wo ist die Konstante a im doppeltlogarithmischen Papier zu finden?

Bemerkung: Obiges ist nur möglich, wenn unbenannte Größen verwendet werden[3]. Daher müssen alle Meßgrößen auf einen Normwert bezogen werden. Man wählt ihn natürlich möglichst geschickt.

Übungsaufgabe: Bestimmen Sie aus Abb. 4 Vorfaktor a und Exponent n. Wie lautet die Funktion $T(m)$? Wie sieht die Funktion im linearen Maßstab aus?

Einfach-log. Papier (Abb.5)

Das einfach-log. Papier dient zur Auswertung von Exponentialfunktionen

$$y = y_0 e^{bx}.$$

Durch Logarithmieren erhält man im natürlichen Logarithmus

$$\ln y = \ln y_0 + bx.$$

Zwischen x und der Hilfsgröße $z = \ln y$ besteht wieder eine lineare Beziehung:

$$z = \ln y_0 + bx.$$

Bei Verwendung des dekadischen Logarithmus ergibt sich:

$$\log y = \log y_0 + \log e \cdot bx, \text{ mit } \log e = 0,434.$$

Beispiel: Amplitude einer gedämpften Schwingung (Abb. 5)

[3]... oder gibt es den Logarithmus von Meter?

Der exponentielle Zusammenhang lautet hier

$$y = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Zur Bestimmung der Abklingdauer τ betrachten wir den speziellen Wert $t^* = \tau$. Die Funktion $y(t^*)$ hat an dieser Stelle den Wert

$$y^* = y_0 \cdot e^{-1} \cong 0,37 y_0.$$

Daraus ergibt sich ein Rezept zur experimentellen Bestimmung einer unbekannten Zeitkonstanten: man suche den Wert t, für den die Funktion $y(t)$ auf den Bruchteil $y = 0,37y_0$ ihres Anfangswertes abgesunken ist; der dort abgelesene Wert t^* ist gleich der gesuchten Zeitkonstanten.
Man kann die Abklingdauer τ auch unter Verwendung der Beziehung

$$z = \log y_0 - \frac{\log e}{\tau} t$$

mit $z = \log y$ bestimmen. Dazu wird die Geradensteigung $S = -\log e/\tau$ verwendet (siehe Abb. 5).

Übungsaufgabe
Bestimmen Sie aus Abb. 5 die Zeitkonstante. Wie würden die Funktionen $y = 2y_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ und $y = y_0 \exp(-t/2\tau)$ aussehen (mm-Papier und log.-Papier)?

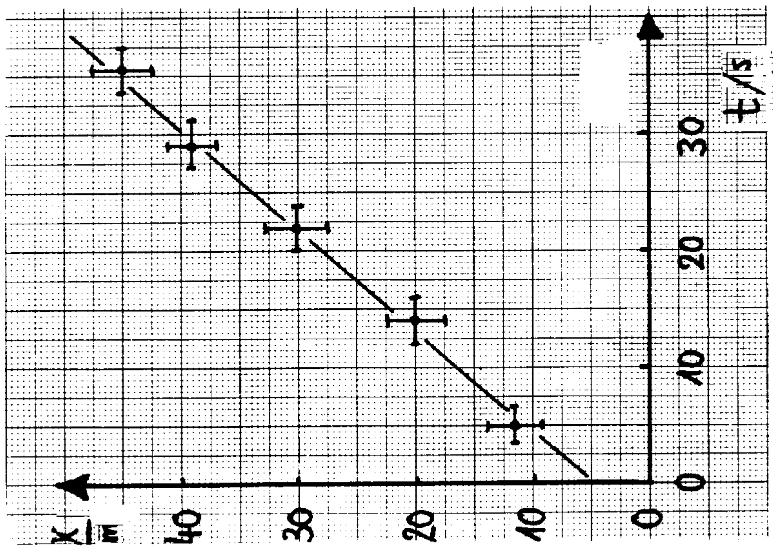


Abb.1
Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

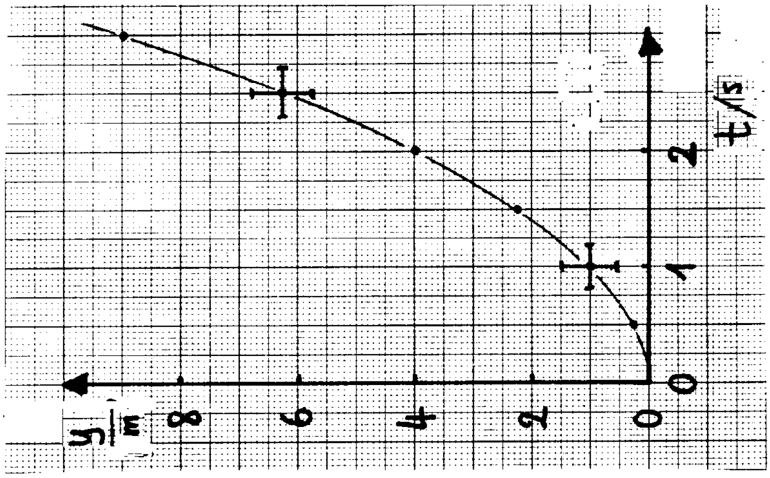


Abb.2
Gleichförmig beschleunigte Bewegung:
y-t-Darstellung

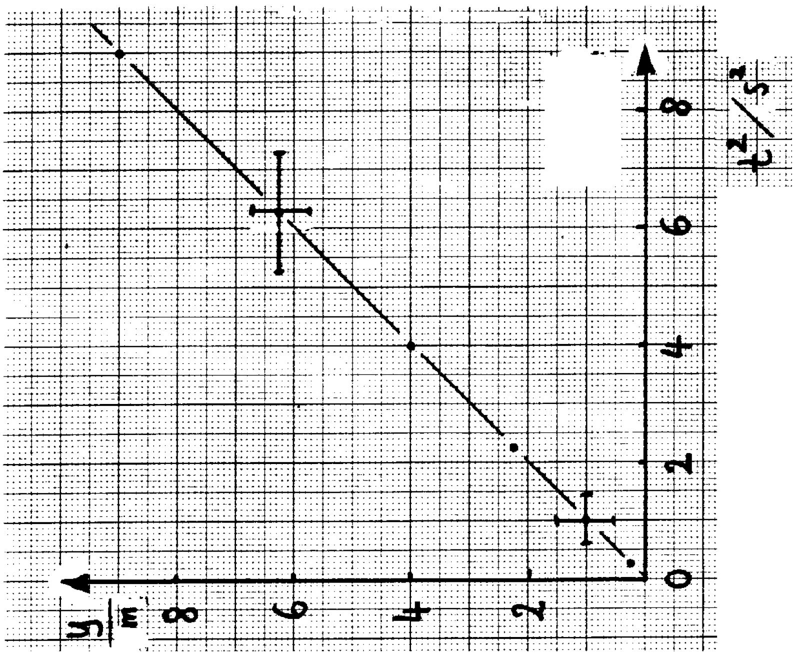


Abb.3
Gleichförmig beschleunigte Bewegung:
y-t^2-Darstellung

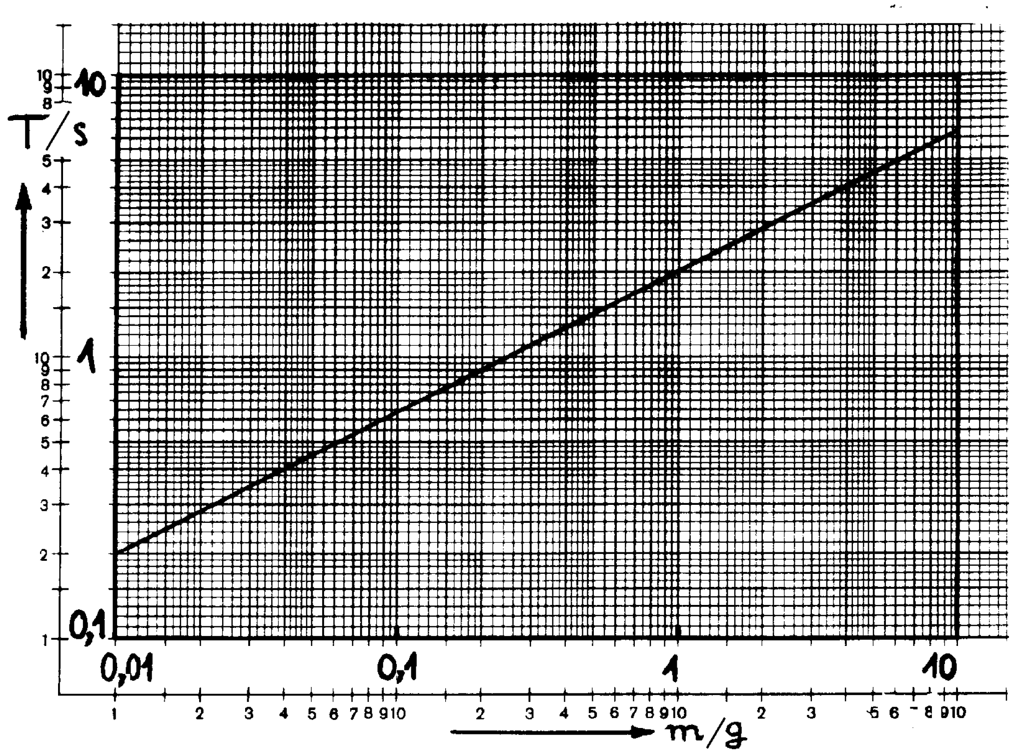


Abb.4
Doppelt-log.
Papier

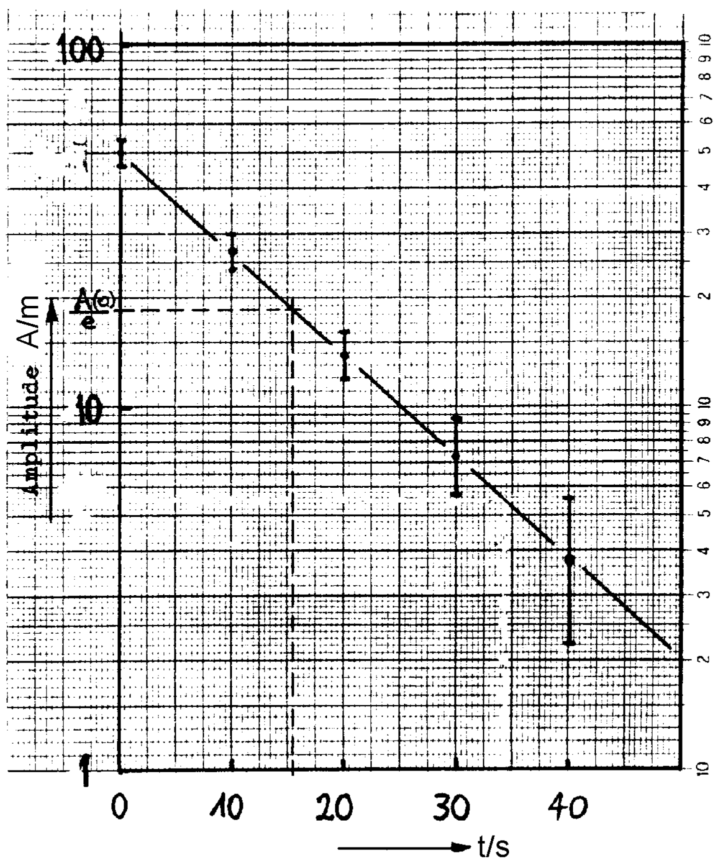


Abb.5
Einfach-log.
Papier
(gedämpfte
Schwingung)

B.5 Zur Ausführung der Zeichnungen

Abb. 6 zeigt das gleiche Weg-Zeitdiagramm wie Abb. 1.

! So sollten Ihre Diagramme nicht aussehen !

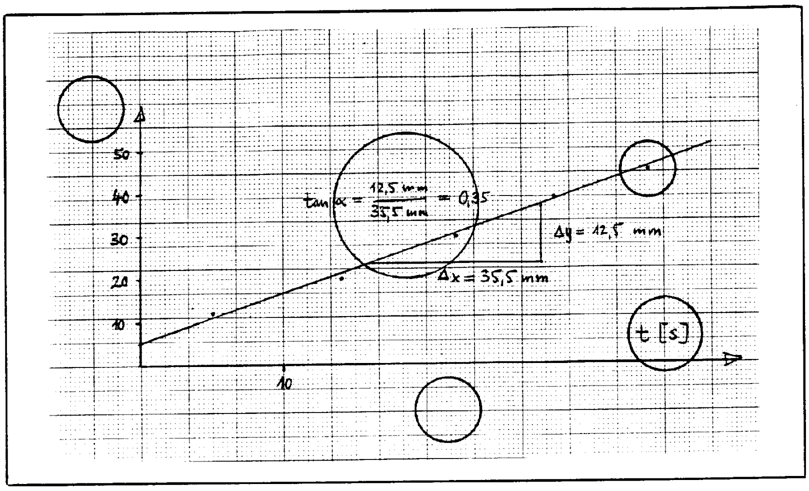


Abb.6

Beanstandungen:

- Die Zeichnung ist zu klein, das Format ist ungünstig. Jede Grafik soll möglichst das volle Blatt ausfüllen und mit großen Ziffern beschriftet werden. Das Ergebnis soll sofort ins Auge fallen.
- Die Beschriftung ist zu klein und undeutlich. An der Ordinate (y-Achse) fehlt die Bezeichnung und die Einheit der dargestellten Größe vollständig. Ebenso sollte die Bezeichnung unterhalb bzw. links der Achsen erfolgen.
- Die Meßpunkte sind viel zu schwach eingezeichnet.
- Es fehlen die Fehlerbalken.
- Der Maßstab der Abszisse ist unbequem, der Maßstab der Ordinate ist unsinnig. Eine schnelle und genaue Dezimalunterteilung ist daher sehr schwierig (man versuche z.B. den Meßpunkt (18,5 s ; 27,5 m) hier und zum Vergleich auch in Abb. 1 einzutragen!).
- An der Abszisse fehlen weitere Skaleneinteilungen, daher ist die Zuordnung der Meßwerte nicht eindeutig.
- Das Dreieck zur Bestimmung der Steigung ist zu klein gewählt (Ablesefehler!). Außerdem ist es unsinnig, das Verhältnis von Δy [mm] zu Δx [mm] anzugeben. Die Angabe des Winkels α aus $\tan\alpha$ ist vollkommen unwichtig. Wichtig ist allein der Quotient $\Delta s/\Delta t$, wobei die Wegdifferenz

Δs und die Zeitdifferenz Δt in den jeweiligen Einheiten angegeben (hier also in m und s) und am einfachsten direkt an den Koordinatenskalen abgelesen werden. Für Δt eine Strecke wählen, die leicht abzulesen ist und durch die man leicht dividieren kann (hier z.B. 20 oder 40 s). Die abgelesenen Werte werden eingetragen.

- Rechnungen gehören nicht in ein Diagramm! Die Werte für das Steigungsdreieck selbst sollen jedoch eingetragen werden!

Beachten Sie also: ein Diagramm dient zur klaren und übersichtlichen Darstellung von Ergebnissen. Es muß daher alle zum Verständnis notwendigen Informationen in einer leicht erfaßbaren Form enthalten, z.B. einen Titel, der aussagt, was das Diagramm darstellt. Meßdaten sollten bequem und präzise daraus zu entnehmen sein.

C Das Versuchsprotokoll

Zur wissenschaftlichen Arbeitsmethode, die ja im Praktikum gelernt werden soll, gehört, daß der Ablauf des Experiments in einem Laborbuch protokolliert wird, so daß man später den Versuchsablauf rekonstruieren und unter gleichen Bedingungen wiederholen kann.

In den Praktika gehört dazu auch noch die schriftliche Beantwortung der gestellten Vorbereitungsaufgaben.
Das Versuchsprotokoll muß also enthalten:

- Überschrift, Name und Datumsangabe
- Aufgabenstellung
- benötigte Gesetze
- kurze Aufzählung der verwendeten Geräte (und evtl. deren Kennziffer, damit man den Versuch mit demselben Gerät wiederholen kann), evtl. Skizze
- zu messende Größen
- Versuchsskizze
- alle Daten, die beim Experiment eine Rolle spielen, wobei auch der geschätzte Fehler von Bedeutung ist
- eine übersichtliche Darstellung (Tabellenform ist praktisch) der Meßdaten (Ablesegenauigkeit angeben)
- eine geeignete graphische Darstellung der Meßergebnisse (auch wenn sie nicht immer explizit gefordert wird!)
- die Auswertung
- die Fehlerrechnung
- das Ergebnis in klarer und übersichtlicher Form: mit absolutem Fehler (einstellig!), mit der richtigen Stellenzahl und mit den richtigen Einheiten.

- eine Zusammenfassung und kritische Beurteilung der Ergebnisse (z.B. Angabe der erhaltenen Werte mit Fehler. Übereinstimmung mit Theorie. Vergleich von zwei auf verschiedene Weise erhaltenen Resultaten. Gründe der Abweichungen.)

Das folgende Beispiel eines Meßprotokolls soll den Einstieg ins Praktikum erleichtern.

Beispiel für ein Protokoll

Versuch Nr. 5, Meier, Huber, Gruppe 5, 2.12.1990

Messung der Federkonstante einer Schraubenfeder

Aufgaben zur Vorbereitung

...

...

...

Versuchsdurchführung

Aufgabe:

1.1 Man bestimme die Federkonstante einer Schraubenfeder durch statische Messung und überprüfe, ob der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung linear ist (Hookesches Gesetz) und ob der vom Hersteller angegebene Wert $C = (15,0 \pm 0,5)\,\mathrm{Nm}^{-1}$ richtig ist.

1.2 ...

Benötigte Gesetze und Daten

$F = mg = C(x - x_0) \Longrightarrow C = \frac{mg}{x - x_0}$

C : Federkonstante

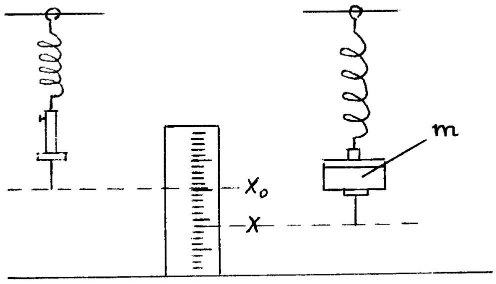
m : aufgesetzte Masse

x_0 : Auslenkung ohne Masse m

x : Auslenkung bei Belastung durch m

g : Erdbeschleunigung

Versuchsskizze:



Verwendete Geräte: Schraubenfeder Nr. 3 mit Gewichtshalterung, Stativmaterial, Spiegelskala (Millimeterteilung), Massesatz, Waage

Zu messende Größen: m x_0 x_i

Benötigte Daten:

Erdbeschleunigung für Regensburg $g = (9,8088 \pm 0,0001)\,\mathrm{ms}^{-2}$

Meßwerte

zu 1.1.:

Ablesefehler von x: $\Delta x = \pm 3\,\mathrm{mm}$

Ablesefehler der Waage: $\Delta m = \pm 3\,\mathrm{g}$

$x_0 = 0,143\,\mathrm{m}$

Tabelle 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m/g	10,1	20,2	30,3	39,9	50,0	60,2	69,8	79,9	90,0	100,0
x_i/mm	150	155	162	170	175	183	190	195	203	211
$(x_i - x_o)$/mm	7	12	19	27	32	40	47	52	60	68
$a_i = \frac{m}{x_i - x_o} / \frac{kg}{m}$	1,443	1,683	1,595	1,477	1,563	1,505	1,485	1,537	1,500	1,479
$\lvert a_i - \bar{a} \rvert^2$	0,007	0,024	0,005	0,003	0,001	0,001	0,002	0,0001	0,001	0,002

zu 1.2

...

...

Graphische Darstellung: siehe Diagramm auf S.85

Auswertung:

1) Graphisch aus dem Anstieg der Geraden:

$$\overline{C} = \frac{\Delta m}{\Delta x} \cdot g = \frac{0,075\,\mathrm{kg}}{0,050\,\mathrm{m}} \cdot 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 14,7\,\mathrm{N/m}$$

2) Numerisch aus Zeile 5 der Tabelle:

$$\overline{a} = \overline{\left(\frac{m}{x - x_0}\right)} = 1,527\,\text{kg/m} \Longrightarrow \overline{\text{C}} = 15,0\,\text{N/m}$$

Fehlerrechnung:

Graphisch: Der Fehler folgt einmal anschaulich und in grober Abschätzung aus den mit den Meßpunkten zu vereinbarenden extremen Geradensteigungen, die in der graphischen Auswertung gestrichelt eingezeichnet sind.
Man erhält : $C_{max} = 16,0\,\text{N/m}$, $C_{min} = 13,4\,\text{N/m}$, $C_{max} - \overline{C} = \overline{C} - C_{min} = 1,3$,
$C = (15 \pm 1)\,\text{N/m}$.
Rechnerisch: (s. Zeile 6 der Tabelle)

$$\Delta a = \left(\frac{1}{N-1}\sum_i (a_i - \overline{a})^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{0,046}{9}}\,\text{kg/m} = 0,07\,\text{kg/m}$$

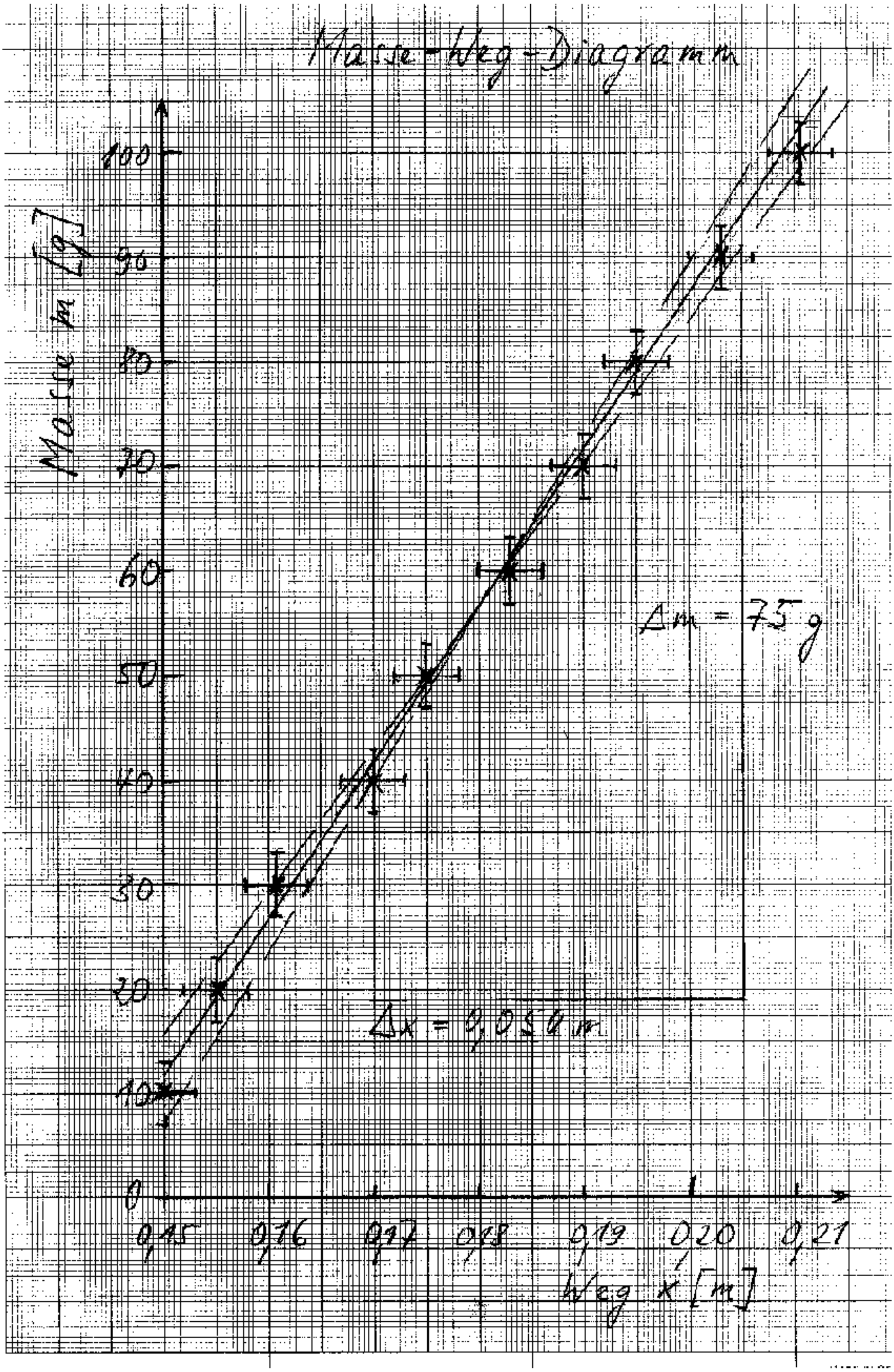
$$\Delta C = \Delta a \cdot g = 0,07 \cdot 9,8 \cong 0,7\,\text{N/m}$$

$$C = (15,0 \pm 0,7)\,\text{N/m}.$$

Der Fehler in g wurde vernachlässigt, da er klein gegenüber den anderen Fehlern ist.

Zusammenfassung

Für die Federkonstante ergibt sich ein Wert von $C = (15,0 \pm 0,7)\,\text{N/m}(\cong 4,6\%)$. Damit liegen die Herstellerangaben im Rahmen der Meßergebnisse. Im gemessenen Bereich ist das Hookesche Gesetz innerhalb der Fehlergrenzen erfüllt, da der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung linear ist.


Masse-Weg-Diagramm
Masse m [g]
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0,15
0,16
0,17
0,18
0,19
0,20
0,21
Weg x [m]
Δm = 75 g
Δx = 0,050 m