Modulprüfung „Kapitalmarkttheorie“

Studienschwerpunkt Finanzmarkttheorie

10 Kreditpunkte, Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

SS 2004, 16.8.2004

Prof. Dr. Lutz Arnold

Name:	A	B1	B2	B3	$\sum$
Matr.-Nr.:					

Bearbeiten Sie alle <u>acht</u> Aufgaben A1-A8 <u>und zwei der drei</u> Aufgaben B1-B3! In den Aufgaben **A1-A8** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar. Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen!). In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **20 Punkte** erreichbar. Tragen Sie die Lösungen zu den Aufgaben A1-A8 bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein. In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Skript zur Vorlesung übernommen.

A1: Ponzi-Spiel Betrachten Sie folgendes Ponzi-Spiel: Die Teilnahmegebühr beträgt 100 Euro. Jeder Teilnehmer einer Stufe muss 10 Nachfolger finden. Er erhält dann je 20 Euro Provision pro Nachfolger in der folgenden Stufe. Das Ponzi-Spiel beginnt in Stufe 1 mit einem Teilnehmer und endet mit Stufe 4. Die Provisionen werden ausschließlich aus den Teilnahmegebühren nachfolgender Spielstufen bezahlt. Tragen Sie in die unten stehende Tabelle ein: (a) Die jeweiligen Teilnehmerzahlen der vier Spielstufen, (b) den Gewinn für den Veranstalter pro Spieler und (c) gesamt (jeweils nach Begleichung von Provisionen aus den Teilnahmegebühren) sowie den Gewinn für die Spieler (d) pro Spieler und (e) gesamt.

(a)-(e)

Stufe	Teil-nehmer	Gewinn für Veranstalter pro Spieler	Gewinn für Veranstalter gesamt	Gewinn für Spieler pro Spieler	Gewinn für Spieler gesamt
1					
2					
3					
4					
Summe		/		/	

A2: Geometrische Reihe und ewige Rente (a) Wie lautet die Gleichung für den Barwert einer konstanten Zahlung x von $t = 1$ bis in alle Zukunft bei einem festen Zins r? (b) Setzen Sie $x = 8$ und einen Zins in Höhe von 5% ein. (c) Leiten Sie die Formel für die geometrische Reihe her ($\sum_{t=0}^{\infty} a^t = 1/(1-a)$ für $0 < a < 1$). (d) Formen Sie das Resultat aus Aufgabenteil (b) so um, dass Sie die Formel aus Aufgabenteil (c) anwenden können. (e) Wie hoch ist der Barwert des Zahlungsstroms aus Aufgabenteil (b)?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Erwartungsnutzen Sei $u(x) = \sqrt{x}$, $x_1 = 9$, $x_2 = 81$ und $p_1 = 17/72$. (a) Berechnen Sie $E(x)$. (b) Wie hoch ist $u[E(x)]$? (c) Berechnen Sie $E[u(x)]$. Liegt Risikoaversion vor? (d) Wie ist Risikoaversion allgemein definiert? (e) Welche Eigenschaft von $u(x)$ sichert allgemein Risikoaversion?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Tauschökonomie mit Unsicherheit Betrachten Sie die Tauschökonomie unter Unsicherheit. (a) Wie lauten die Formeln, die die Bedingungen für Pareto-Optimalität angeben (Herleitung nicht notwendig)? (b) Wie lautet die Budgetrestriktion von Konsument i bei Vorliegen von Terminmärkten? (c) Wie lauten dann die Bedingungen für Nutzenmaximierung (Herleitung nicht notwendig)? Woran sieht man, dass das Marktgleichgewicht mit Terminmärkten Pareto-optimal ist? (d) Wie lauten die Budgetbeschränkungen, wenn es keine Terminmärkte gibt, aber Finanzmärkte, auf denen Arrow securities gehandelt werden? (e) Eliminieren Sie x_θ^i aus diesen Budgetrestriktionen. Für welche Preise stimmt die resultierende Budgetrestriktion mit der aus Aufgabenteil (b) überein? Was bedeutet das für die Effizienz des Marktgleichgewichts mit Arrow securities?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Bubbles Definieren Sie die Begriffe (a) White noise und Random walk. (b) Was ist die Gleichgewichtsbedingung in einem Aktienmarkt mit kurzen Zeithorizonten, in denen Zinsen und Dividenden keine Rolle spielen, sowie mit Risikoneutralität und rationalen Erwartungen? (c) Zeigen Sie: Die Annahme, dass Q_t kein Random walk (im weiteren Sinne) ist, führt zu einem Widerspruch. (d) Zeigen Sie: Wenn Q_t ein Gleichgewichtskurs ist und B_t ein Random walk, dann ist auch $Q_t + B_t$ ein Gleichgewichtskurs. (e) Konstruieren Sie eine Bubble B_t, die einem Random walk (im weiteren Sinne) folgt. Beweisen Sie, dass $E_t(B_{t+1} - B_t) = 0$ ist.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A6: Vollkommener Kapitalmarkt Es gebe $N = 200$ Unternehmen. Jeweils die Hälfte verfügt über ein Projekt 1 und Projekt 2. Beide benötigen einen Input von $B = 900$. Projekt 1 liefert $R_1 = 1.052,63$ mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 95\%$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit nichts, Projekt 2 liefert $R_2 = 1.111,11$ mit Wahrscheinlichkeit $p_2 = 90\%$ und ebenfalls mit der Gegenwahrscheinlichkeit nichts. Alle Unternehmen bringen Sicherheiten $S = 200$ ein. Die Kapitalgeber können die Unternehmen unterscheiden (keine „versteckten Eigenschaften“). Die Kapitalangebotsfunktion lautet $S(i) = 3.600.000i$. (a) Wie lauten die erwarteten Gewinne $E(\pi_1^{KN})$ und $E(\pi_2^{KN})$ in Abhängigkeit vom Zinssatz r? (b) Wie lautet die Bedingung dafür, dass die Kapitalgeber jeweils Nullgewinne im Geschäft mit beiden Gruppen von Unternehmen machen (unterstellen Sie vollkommene Diversifkation)? (c) Wie hoch sind die erwarteten Gewinne $E(\pi_1^{KN})$ und $E(\pi_2^{KN})$ in Abhängigkeit von i, wenn die Kapitalgeber mit beiden Gruppen jeweils Nullgewinne machen? (d) Wie lautet $I(i)$? Wie hoch ist i im Gleichgewicht mit $S(i) = I(i)$? (e) Welche Zinssätze ergeben sich damit gemäß Aufgabenteil (b) für die beiden Gruppen?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A7: Kreditrationierung Betrachten Sie das Stiglitz-Weiss-Modell zu adverser Selektion ohne Mikro-Fundierung. Die Ersparnis in Abhängigkeit vom Kreditzins sei

$$S[i(r)] = \begin{cases} 100r - 3; & \text{für } 3\% \leq r \leq 12\% \\ 50r - 5; & \text{für } 12\% < r \leq 40\% \end{cases} .$$

Die Investitionsfunktion laute:

$$I(r) = \begin{cases} 12; & \text{für } r \leq 12\% \\ 5; & \text{für } 12\% < r \leq 40\% \end{cases} .$$

(a) Illustrieren Sie den Kreditmarkt anhand eines Diagramms mit r an der waagerechten Achse und S und I an der senkrechten Achse. (b) Wie hoch sind Kapitalangebot und -nachfrage bei $r = 12\%$? (c) Bei welchem Zins $r > 12\%$ gilt $S = I$? Argumentieren Sie, dass bei $r = 12\%$ Kreditrationierung vorliegt, indem Sie begründen, (d) warum r nicht marginal über 12% hinaus steigt und (e) auch nicht auf das markträumende Niveau aus Aufgabenteil (c). In welchem Umfang liegt gleichgewichtige Kreditrationierung vor?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A8: Costly state verification Betrachten Sie ein Investitionsprojekt mit Input 1 und unsicherem Payoff R (Verteilungsfunktion $H(R)$). Der Kapitalgeber muss γ Einheiten Output aufwenden, um R beobachten zu können (costly state verification). Ein Finanzkontrakt legt Rückzahlungen $x[R, A(R)]$ fest, die von der gemachten Angabe $A(R)$ und vom wirklichen Payoff R abhängen. (a) Definieren Sie die „Default"-Menge D und die „Service"-Menge S. (b) Was lässt sich unmittelbar über $x[R, A(R)]$ in der „Service"-Menge sagen? Warum? (c) Wie lautet damit der Erwartungsnutzen $E(U)$ des Kapitalnehmers? Stellen Sie die Gleichung auf, die besagt, dass die Kapitalgeber eine exogene Verzinsung ρ ihres Kapitals verlangen. Addieren Sie die beiden Gleichungen. (d) Was folgt aus dem Ergebnis zu Aufgabenteil (c) bezüglich von $x[R, A(R)]$ in der „Default"-Menge? Begründen Sie Ihre Antwort. (e) Charakterisieren Sie abschließend, aus welchen R-Werten sich die „Default"-Menge D und die „Service"-Menge S zusammensetzen. Wie lässt sich optimale Finanzkontrakt charakterisieren?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Stock market economy

Betrachten Sie die Stock market economy aus der Vorlesung mit der dort eingeführten Notation. $e^i_{j\theta}$ ist wie folgt definiert:

$$e^i_{j\theta} \equiv \sum_{k=1}^{K} \bar{t}^{ik} y^k_{j\theta}.$$

(a) Das Maximierungsproblem, das Pareto-effiziente Allokationen liefert, ist das gleiche wie in der Tauschökonomie, wenn

$$\sum_{i=1}^{I} (e^i_{j\theta} - x^i_{j\theta}) = 0, \qquad \forall j, \theta$$

ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition in der Aufgabenstellung, dass diese Bedingung erfüllt ist.

(b) Welche Märkte gibt es im ersten Zeitpunkt? Wie lauten die Budgetrestriktionen der Konsumenten i?

(c) Welche Märkte gibt es im zweiten Zeitpunkt? Wie lauten nun die Budgetrestriktionen der Konsumenten i?

(d) Wie hoch ist der Unternehmenswert q^k von Firma k?

(e) Zeigen Sie, dass wie in der Tauschökonomie

$$p_0(e^i_0 - x^i_0) + \sum_{\theta=1}^{\Theta} \sum_{j=1}^{J} (p_\theta p^{spot}_{j\theta})(e^i_{j\theta} - x^i_{j\theta}) = 0$$

gilt.

(f) Was folgt aus Ihren Antworten zu den Aufgabenteilen (a) und (e) für die Effizienzeigenschaften des Marktgleichgewichts in der Stock market economy? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe B2: Moral hazard und Kreditrationierung

N identische Firmen ohne Sicherheiten können jeweils zum Zins r Kapital in Höhe von B bei Banken leihen, um damit (nicht beobachtbar) entweder in Projekt 1 oder in Projekt 2 zu investieren. Projekt j ($j = 1, 2$) bringt mit Wahrscheinlichkeit p_j eine Auszahlung von R_j und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_j$ eine Zahlung von null. Annahmegemäß gilt: $R_2 > R_1$, $p_1 R_1 > p_2 R_2 > B$ sowie $p_1(R_1 - B) > p_2(R_2 - B)$. Das Kapitalangebot der Bankeinleger ist $S = S(i)$ mit $S(0) = 0$ und $S'(i) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $p_1 > p_2$ ist.

(b) Wie hoch ist die Kapitalnachfrage? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wie lauten die erwarteten Gewinne einer Firma, die in Projekt j ($j = 1, 2$) investiert?

(d) Zeigen Sie, dass die Projektwahl einer Firma von der Höhe des Zinssatzes abhängt. Wie lautet der kritische Zinssatz r_1, oberhalb dessen die Firmen riskant investieren?

(e) Berechnen Sie die Rendite auf Kapitalvergabe i in Abhängigkeit von r.

(f) Nun soll ein Marktgleichgewicht mit Kreditrationierung konstruiert werden. Fertigen Sie dazu eine Grafik an, die $i(r)$ wiedergibt, und eine Grafik, die den Kapitalmarkt mit Angebot und Nachfrage wiedergibt. Zeichnen Sie die Funktionen so, dass im Gleichgewicht Kreditrationierung herrscht.
(g) Welche Annahmen an den Verlauf der Funktionen in Aufgabenteil (f) mussten gemacht werden, damit im Gleichgewicht Kreditrationierung herrscht?
(h) Erläutern Sie kurz, inwiefern die Kreditrationierung davon abhängt, dass die Unternehmen „versteckt" Projekt 2 wählen können.

Aufgabe B3: Moral hazard in langfristigen Bank-Kunde-Beziehungen

Unternehmen können „versteckt" zwischen zwei Projekten 1 und 2 mit einem Kapitablbedarf von jeweils B wählen. Projekt 1 liefert (in der Folgeperiode) mit Wahrscheinlichkeit p_1 den Payoff R_1 und mit der Gegenwahrscheinlichkeit nichts. Projekt 2 liefert dem Unternehmen (in der laufenden Periode) sicher einen Vorteil R^f, aber sicher keine rückzahlbaren Payoffs. Es gilt $R^f > p_1(R_1 - B)$. Sicherheiten werden nicht gestellt.
(a) Wie lautet der erwartete Gewinn des Kapitalnehmers bei Realisierung von Projekt 1?
(b) Zeigen Sie, dass bei nur einmaliger Kapitalvergabe Projekt 2 vorgezogen wird. Was bedeutet das für das Funktionieren des Kapitalmarkts bei der Investitionsfinanzierung?
(c) Wie lautet die Nullgewinnbedingung für die Kapitalgeber unter der Prämisse, dass Projekt 1 realisiert wird? Wie lauten dann die erwarteten Gewinne für die Kapitalnehmer aus Projekt 1 in Abhängigkeit von i?
(d) Berechnen Sie den Barwert der erwarteten Gewinne aus wiederholter Realisierung von Projekt 1 bis in alle Zukunft.
(e) Angenommen, die Kapitalgeber vergeben Unternehmen solange Kapital, wie die Unternehmen Projekt 1 realisieren, und Kapitalnehmer, die einmal Projekt 2 realisiert haben, erhalten nie wieder Kapital. Wie lautet dann die Bedingung für Investieren in Projekt 1? Wie lautet folglich die Nachfrage nach Kapital *für Projekt 1?*
(f) Zeichnen Sie einen Kapitalmarkt, in dem im Gleichgewicht alle Unternehmen mit Kapital versorgt werden und Projekt 1 realisieren. Welche Bedingungen müssen unterstellt werden, damit der Kapitalmarkt so aussieht?