Einfache Strukturen in der Mathematik

Monoid

Ein Monoid $(M, \cdot)$ ist eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $\cdot : M \times M \to M$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$, s.d. gilt:

- Assoziativität der Verknüpfung:
  $\forall a, b, c \in M : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existenz des Neutralen:
  $\exists e \in M : e \cdot a = a \quad \forall a \in M$

Gruppe

Ein Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$, s. d. gilt:

- Assoziativität der Verknüpfung:
  $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existenz des Neutralen:
  $\exists e \in G : e \cdot a = a \quad \forall a \in G$
- Existenz des Inversen:
  $\forall a \in G \exists b \in G : a \cdot b = e = b \cdot a$
  In diesem Fall schreibt man: $b = a^{-1}$

Man spricht von einer abelschen oder kommutativen Gruppe, falls zusätzlich noch gilt:

- Kommutativität;
  $\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$

Jede Gruppe ist also auch ein Monoid oder besser gesagt, ein Monoid ist ein Gruppe, falls für jedes Element des Monoids ein Inveres existiert.

Beispiele für Monoide und Gruppen

Monoide:

- $(\mathbb{N}_0, +)$ mit 0 als neutralem Element
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit 1 als neutralem Element
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ mit 1 als neutralem Element
- $(\mathbb{Z}, -)$ ist KEIN Monoid, da die Verknüpfung nicht assoziativ ist
- $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ Menge der $n \times n$-Matrizen mit der Einheitsmaxtrix als Neutrales

Gruppen:

- $(\mathbb{Z}, +)$ mit 0 als neutralem Element
- ($\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$, $+$ bzw. $\cdot$) mit 0 bzw. 1 als neutralem Element
- $(S_n, \circ)$ Symmetrische Gruppe mit der Identität als neutralem Element

Ring

Ein Ring $(R, \diamond, \star)$ ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $\diamond : R \times R \to R$ und $\star : R \times R \to R$, s. d. gilt:

- $(R, \diamond)$ ist eine abelsche Gruppe
- $\star$ ist assoziativ
- Beide Verknüpfungen sind miteinander verträglich (Distributivität):
  $a \star (b \diamond c) = a \star b \diamond a \star c$ und $(a \diamond b) \star c = a \star c \diamond b \star c \quad \forall a, b, c \in R$

Man spricht von einem Ring mit Eins oder einem unitären Ring, falls $(R, \star)$ ein Monoid ist. Man spricht von einem kommutativen Ring, falls $\star$ kommutativ ist.
Man spricht von einem nullteilerfreien Ring oder Integritätsbereich, falls aus $a \star b = 0$ schon folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0 \quad \forall a, b \in R$ ist.
Man bezeichnet oft die erste Verknüpfung als Addition (hier $\diamond$) mit Neutralem 0 und Inversem -a und die zweite Verknüpfung als Multiplikation mit Neutralem 1 und Inversem a^{-1}

Körper

Ein Körper $(K, \diamond, \star)$ ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $\diamond : K \times K \to K$ und $\star : K \times K \to K$, s. d. gilt:

- $(K, \diamond)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(K \backslash 0, \star)$ ist eine abelsche Gruppe
- Beide Verknüpfungen sind miteinander verträglich (Distributivität):
  $a \star (b \diamond c) = a \star b \diamond a \star c$ und $(a \diamond b) \star c = a \star c \diamond b \star c \quad \forall a, b, c \in R$

Beispiele für Ringe und Körper

Ringe:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit 0 und 1 als neutrale Elemente
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist ein kommutativer Ring mit 0 und 1 als neutrale Elemente, jedoch nicht zwingend nullteilerfrei
- R sei ein Ring, dann ist auch $(R[X], +, \cdot)$ der Polynomring ein Ring.
- R $= \{f \| f : J \to \mathbb{R}\}$ ist durch folgende Verknüpfungen ein Ring:
  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

Körper:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ wobei p eine Primzahl ist
- Sei K die Menge $K = \{0, 1\}$. Hier kann man schon einen Körper definieren.

Modul

Ein Modul über einem (kommutativen) Ring $(R, +, \cdot)$ - ein R-Modul - ist eine abelsche Gruppe (M,+) zusammen mit einer verbindenden Verknüpfung $\circ : R \times M \to M$ mit $(r, m) \mapsto r \circ m$, die man Skalarmultiplikation nennt, so dass gilt:

- $r_1 \cdot (r_2 \circ m) = (r_1 \cdot r_2) \circ m$
- $(r_1 + r_2) \circ m = r_1 \circ m + r_2 \circ m$
- $r \circ (m_1 + m_2) = r \circ m_1 + r \circ m_2 \quad \forall m, m_1, m_2 \in M, \quad \forall r, r_1, r_2 \in R$

Hierbei muss man natürlich wieder darauf achten, welche Eigenschaften der Ring besitzt (Nullteilerfreiheit, Kommutativität, Einselement).

Vektorraum

Ein Vektorraum über einem Körper $(K, +, \cdot)$ - ein K-Vektorraum - ist eine abelsche Gruppe (M,+) zusammen mit einer verbindenden Verknüpfung $\circ : K \times M \to M$ mit $(k, m) \mapsto k \circ m$, die man Skalarmultiplikation nennt, so dass gilt:

- $k_1 \cdot (k_2 \circ m) = (k_1 \cdot k_2) \circ m$
- $(k_1 + k_2) \circ m) = k_1 \circ m + k_2 \circ m$
- $k \circ (m_1 + m_2) = k \circ m_1 + k \circ m_2 \quad \forall m, m_1, m_2 \in M, \quad \forall k, k_1, k_2 \in K$
- Insbesondere muss auch gelten: $1_K \circ m = m$

Anders ausgedrückt: Da jeder Körper ein Ring ist, ist jeder Vektorraum ein Modul.

Algebra

Ähnlich wie man bei einer Gruppe (oder Monoid) von einer Verknüpfung zu einer neuen Struktur mir zwei Verknüpfungen (Ring, Körper) übergeht, gelangt man von einem Vektorraum zu einer Algebra.
Eine Algebra ist ein Vektorraum, dessen abelsche Gruppe zusätzlich noch eine Multiplikation besitzt, oder anders formuliert:
Eine Algebra über einem Körper $(K, +, \cdot)$ - eine K-Algebra - ist ein Ring $(C, \diamond, \star)$ zusammen mit einer verbindenden Verknüpfung $\circ : K \times C \to C$, die man Skalarmultiplikation nennt, so dass $\forall k, k_1, k_2 \in K, \ \forall c, c_1, c_2 \in C$ gilt:

- $k_1 \cdot (k_2 \circ c) = (k_1 \cdot k_2) \circ c$
- $c_1 \star (c_2 \circ k) = (c_1 \star c_2) \circ k$
- $(k_1 + k_2) \circ c = k_1 \circ c \diamond k_2 \circ c$
- $(c_1 \diamond c_2) \circ k = c_1 \circ k \diamond c_2 \circ k$
- Insbesondere muss auch gelten: $1_K \circ c = c$

Beispiele für Moduln, Vektorräumen und Algebren

Moduln:

- Jede abelsche Gruppe ist in trivialer Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul
- Jeder Ring ist ein Modul über sich selbst mit der Ringmultiplikation als Operation. Die Untermoduln entsprechen dann genau den Idealen von R

Vektorräume:

- $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind in trivialer Weise $\mathbb{Q}$-, $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$-Vektorräume
- Raum der affinen Funktionen A=$\{f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b\}$ bilden mit der punktweisen Addition einen $\mathbb{R}$-Vektorraum
- Sei K[X] der Polynomring. Dann bildet auch K[X] in trivialer Weise einen K-Vektorraum
- $C^n(J, \mathbb{R})$ bilden für $J \subset \mathbb{R}$ bilden mit der punktweisen Addition einen $\mathbb{R}$-Vektorraum (für $0 \leq n \leq \infty$)

Algebren:

- $C^n(J, \mathbb{R})$ bilden für $J \subset \mathbb{R}$ bilden mit der punktweisen Addition und Multiplikation eine $\mathbb{R}$-Algebra (für $0 \leq n \leq \infty$)
- $\mathbb{R}^3$ bildet mit der Addition und dem (Vektor- bzw.) Kreuzprodukt eine $\mathbb{R}$-Algebra