Skalarprodukt, Norm, Metrik, Topologie

Skalarprodukt

Man unterscheidet bei einem Skalarprodukt auf einem reellen und auf einem komplexen Vektorraum:
Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V - $\mathbb{R}$-Vektorraum - ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform $< .,. >; V \times V \to V$ mit $(v, w) \mapsto < v, w >$, s. d. $\forall v, w, x \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- Bilinearität (d.h. Linearität in beiden Argumenten):
  $< v + w, x > = < v, x > + < w, x >$
  $< v, x + w > = < v, x > + < v, w >$
  $< \lambda v, w > = \lambda < v, w > = < v, \lambda w >$
- Symmetrie:
  $< v, w > = < w, v >$
- Positive Definitheit:
  $< v, v > \geq 0$ und $< v, v > = 0 \leftrightarrow v = 0$

Ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V - $\mathbb{C}$-Vektorraum - ist eine symmetrische positiv definite Sesquilinearform $< .,. >; V \times V \to V$ mit $(v, w) \mapsto < v, w >$, s. d. $\forall v, w, x \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- Sesquilinearität (d.h. Antilinearität im 1.Argument und Linearität im 2. Argument):
  $< v + w, x > = < v, x > + < w, x >$
  $< v, x + w > = < v, x > + < v, w >$
  $< \lambda v, w > = \bar{\lambda} < v, w > = < v, \bar{\lambda} w >$
- Hermitizität:
  $< v, w > = \overline{< w, v >}$
- Positive Definitheit:
  $< v, v > \geq 0$ und $< v, v > = 0 \leftrightarrow v = 0$

Bemerkungen:

- Mit einer Abbildung von Vektorräumen, die man Form nennt, meint man eine Abbildung in den zugrundeliegenden Körper
- Ein Vektorraum mit Skalarprodukt nennt man Prähilbertraum, einen vollständigen Prähilbertraum nennt man Hilbertraum (ein Banachraum ist dagegen ein vollständig normierter Vektorraum)
- Skalarprodukte können natürlich auch für Funktionenvektorräume definiert werden

Norm

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in die nichtnegativen reellen Zahlen nennt man Norm auf V, wenn für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit:
  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- Homogenität:
  $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- Dreiecksungleichung:
  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bemerkungen:

- Entsprechend nennt man einen Vektorraum mit Norm einen normierten Vektorraum.
- Aus der Definitheit folgt schon, dass $\|x\| \geq 0$

Metrik

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man Metrik auf X, wenn für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit:
  $d(x, x) = 0 \leftrightarrow x = 0$
- Symmetrie:
  $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung:
  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Bemerkungen:

- Entsprechend nennt man eine Menge zusammen mit einer Metrik d einen metrischen Raum (X,d).
- Aus der Definitheit folgt schon, dass $\|x\| \geq 0$
- Vollständigkeit hängt nicht von der Topologie, sondern von der Metrik ab. (d.h. ein Raum kann für eine Metrik vollständig sein und für eine andere nicht)
- Abbildungen, die die Metrik erhalten, nennt man Isometrie (d.h. f ist eine Isometrie, falls $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
  Sehr bekannt ist die Fouriertransformation, die dank der Plancherelgleichung eine Isometrie zweier Räume darstellt.

Topologie

Eine Topologie ist ein Mengensystem T bestehend aus Teilmengen (offene Mengen genannt) einer Grundmenge X, für die die folgenden Axiome erfüllt sind:

- $\emptyset, X$ sind offen
- Seien $U_1, ..., U_n$ offene Mengen, dann ist auch $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ offen.
  Hier ist die Endlichkeit wichtig.
- Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen, dann ist auch $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Bemerkungen:

- Entsprechend nennt man eine Menge zusammen mit einer Topologie einen topologischen Raum (X,T).
- Es gibt - wie bei Metriken, Normen und Skalarprodukten - verschiedene Topologien (diskrete, euklidische, p-adische,...)

Mathematische Hierarchie

Ein Skalarproduktraum ist ein spezieller normierter Vektorraum, ein normierter Vektorraum ein spezieller metrischer Raum und ein metrischer Raum ein spezieller topologischer Raum.
Man kann insbesondere auch sagen, dass ein Skalarprodukt eine Norm induziert, eine Norm eine Metrik induziert und eine Metrik eine Topologie induziert:

- Ein Skalarprodukt induziert eine Norm:
  $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$
- Eine Norm induziert eine Metrik:
  $d(x, y) := \|x - y\|$
- Eine Metrik induziert eine Topologie:
  Die offenen Kugeln in einem metrischen Raum erzeugen eine (Basis der) Topologie