Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche Fakultät I – Didaktik der Mathematik
Dr. Günter Rothmeier
WS 2008/09

51 722 Elementarmathematik (LH)

Private Vorlesungsaufzeichnungen

Kein Anspruch auf Vollständigkeit

und Fehlerfreiheit

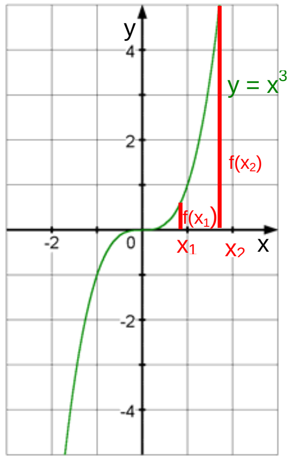
2. Funktionen

2.3. Potenzfunktionen

2.3.1. Potenzfunktion 3. Grades

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ lässt sich die dritte Potenz eindeutig berechnen. Die Gleichung $y = x^3$ beschreibt somit eine Funktion. Diese heißt **kubische Grundfunktion**, ihr Graph heißt **kubische Grundparabel**.

x	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5
$y = x^3$	–3,375	–1	–0,125	0	0,125	1	3,375



Eigenschaften:

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Monotonie:
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
Die Funktion f mit $y = x^3$ ist streng monoton zunehmend.

Symmetrie:
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

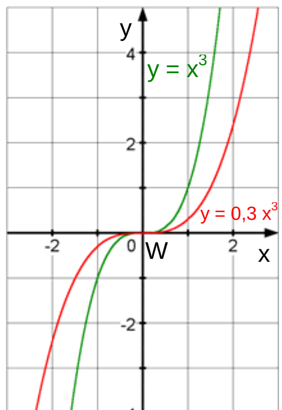
Wendepunkt

Bewegt sich ein Punkt auf dem Graphen vom III. Quadranten in den I. Quadranten, so durchläuft er zunächst eine Rechtskurve. Vom Punkt O (0 | 0) ab durchläuft er eine Linkskurve. Man bezeichnet O (0 | 0) deshalb den Ursprung als **Wendepunkt** W der kubischen Grundparabel.

2.3.2. Abbilden der kubischen Grundparabel durch orthogonale Affinität

Die kubische Grundparabel mit der Gleichung $y = x^3$ kann mit einem Faktor $a \neq 0$ gestreckt oder gestaucht werden.

Es gilt: $P\,(x \mid x^3) \xrightarrow{x\text{–Achse};\ a} P'\,(x \mid a \cdot x^3)$



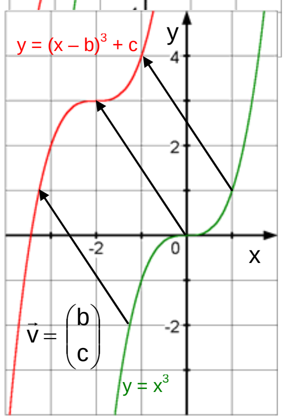
Gleichung der Grundparabel: $y = x^3$
Gleichung der Bildparabel: $y = a \cdot x^3$

Bei dieser Abbildung werden alle Funktionswerte mit dem Faktor a multipliziert. Eine solche Abbildung nennt man **orthogonale Affinität**. Die x-Achse heißt dabei **Affinitätsachse**.

Der Wendepunkt W (0 | 0) ist der einzige Fixpunkt des Graphen bei dieser Abbildung.

2.3.3. Abbilden der kubischen Grundparabel durch Parallelverschiebung

Die kubische Grundparabel mit der Gleichung $y = x^3$ wird durch Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ punktweise abgebildet.



Die Gleichung der Bildparabel kann man folgendermaßen ermitteln (Parameterverfahren) ermitteln:

$$P\,(x \mid x^3) \xrightarrow{\vec{v}} P'\,(x' \mid y')$$

Gleichungssystem: $\mathbf{I}\quad x' = x + b \quad \wedge \quad \mathbf{II}\quad y' = x^3 + c$

Elimination von x: Aus $\mathbf{I}\quad x = x' – b$ In $\mathbf{II}\quad y' = (x' – b)^3 + c$

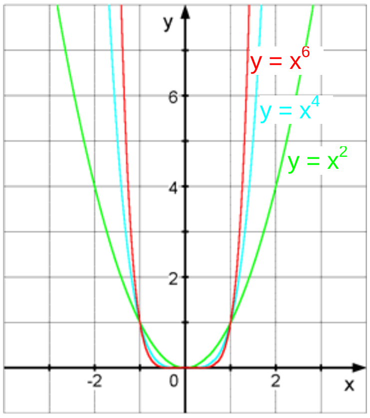
Die Koordinaten von P' erfüllen die Gleichung $y = (x – b)^3 + c$. Dies ist also die Gleichung der Bildkurve. Sie ist symmetrisch zum Wendepunkt W (b | c).
Wir bezeichnen eine verschobene kubische Grundparabel als kurz als **kubische Parabel**. Verschiebung und Abbildung durch orthogonale Affinität ergeben zusammen eine Gleichung der Form $y = a\,(x – b)^3 + c$

2.3.4. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten ($n \in \mathbb{N}$)

Die maximale Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$. Die Graphen kann man mit Hilfe einer Wertetabelle zeichnen. Man nennt sie **Parabeln** n-ter Ordnung.

Wir unterscheiden, ob der Exponent n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

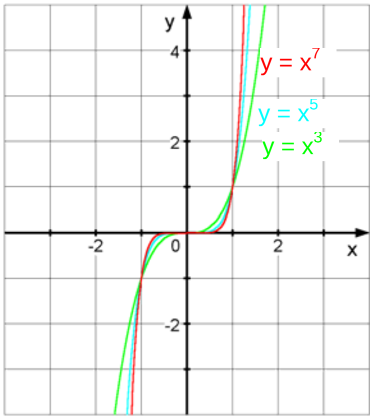
a) Parabeln gerader Ordnung



Symmetrie zur y-Achse

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

b) Parabeln ungerader Ordnung



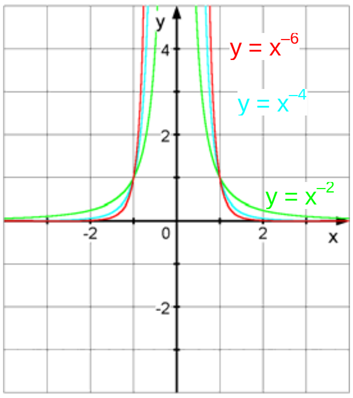
Symmetrie zum Ursprung

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

2.3.5. Potenzfunktionen mit negativ-ganzzahligen Exponenten ($n \in \mathbb{Z}^-$)

Die maximale Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Graphen nennt man **Hyperbeln** n-ter Ordnung. Wir treffen dieselbe Fallunterscheidung wie oben.

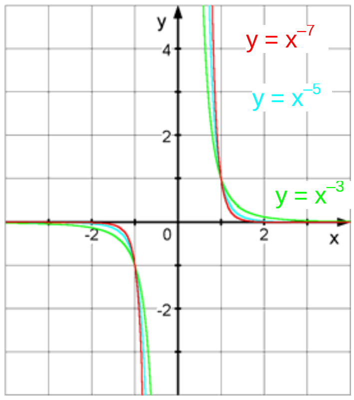
c) Hyperbeln gerader Ordnung



Symmetrie zur y-Achse

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

d) Hyperbeln ungerader Ordnung

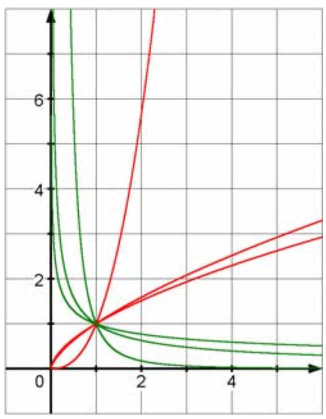


Symmetrie zum Ursprung

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.3.6. Potenzfunktionen mit rationalem Exponent

Funktionen mit der Gleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ und $x \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ nennen wir **Grundfunktionen** der Potenzfunktionen. Die zugehörigen Graphen sind entweder Parabelstücke (Exponent positiv) oder Hyperbelstücke (Exponent negativ). Die Graphen dieser Funktionen können durch Parallelverschiebung und durch orthogonale Achsenaffinität abgebildet werden.



2.3.7. Potenzfunktionen mit irrationalen Exponenten

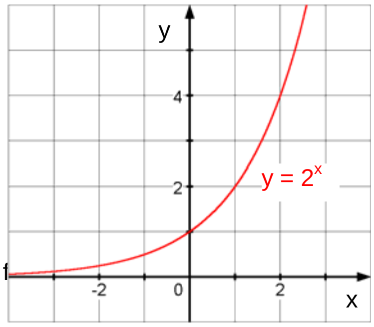
Da es Potenzen mit irrationalen Zahlen gibt, ist es sinnvoll, auch Potenzfunktionen mit irrationalen Exponenten zu betrachten. Ihre Graphen zeichnet man mit Hilfe einer Wertetabelle.

2.4. Exponentialfunktionen

Wir beschränken uns neben einer kurzen Übersicht über die in der Sekundarstufe I vorkommenden Funktionen auf Wachstums- und Ablingprozesse.

2.4.1. Die Funktion mit $y = 2^x$

Jedem $x \in \mathbb{R}$ kann eindeutig die Zahl zugeordnet werden, da die Potenzen für beliebige reelle Exponenten definiert sind. Die Gleichung $y = 2^x$ beschreibt also eine Funktion. Sie heißt **Exponentialfunktion** zur Basis 2.



Eigenschaften:

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

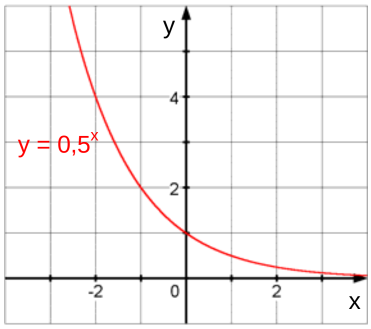
Monotonie: Für alle x_1, x_2 gilt:
$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow$ f

Die Funktion f mit $y = 2^x$ ist in $\mathbb{D}$ streng monoton zunehmend.

Asymptoten: Die x-Achse ist Asymptote.

2.4.2. Die Funktion mit $y = (\frac{1}{2})x$

Wegen $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: Die Funktion g mit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hat an der Stelle x den gleichen Funktionswert wie die Funktion f mit $y = 2^x$ an der Stelle –x. Also erhält man den Graphen von $y = (\frac{1}{2})^x$ durch Spiegelung des Graphen von $y = 2^x$ an der y-Achse.



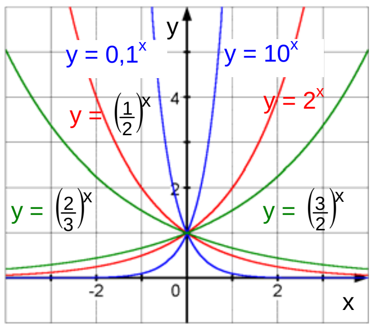
Für alle x_1, $x_2 \in \mathbb{D}$ gilt:
$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$

Die Funktion f mit $y = (\frac{1}{2})^x$ ist in $\mathbb{D}$ streng monoton abnehmend.

Die Graphen der Funktionen mit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und mit $y = 2^x$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse in einander über. Funktionswerte können durch Ablesen aus einer Graphik oder mit dem Taschenrechner bestimmt werden.

2.4.3. Die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$

Entsprechend der Definition der allgemeinen Potenz beschränken wir die Basis a in $y = a^x$ auf positive Werte. Der Term a^x ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ berechenbar. Die Menge der Zahlenpaare $(x \mid a^x)$ und $x \in \mathbb{R}$ stellt also eine Funktion dar.



Die Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis a**.

Eigenschaften für $a \neq 1$:

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

Asymptoten: Die x-Achse ist Asymptote.

Monotonie für $a > 1$: Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt: $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$
Die Funktionen sind in $\mathbb{D}$ streng monoton zunehmend.

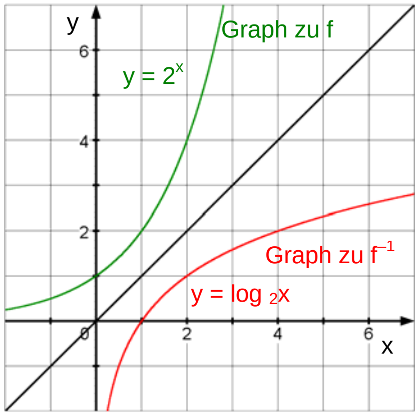
Monotonie für $0 < a < 1$: Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt: $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$
Die Funktionen sind in $\mathbb{D}$ streng monoton abnehmend.

Alle Graphen gehen durch den Punkt P (0 |1).
Für a = 1 erhält man als Sonderfall eine Parallele zur x-Achse.

2.4.4. Definition des Logarithmus

Nebenstehende Graphik zeigt, dass die Funktion $y = 2^x$ in $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ umkehrbar ist.

Funktion f: $y = 2^x$ Umkehrfunktion f^{-1}: $x = 2^y$



Die Gleichung der Umkehrfunktion können wir mit den bisher bekannten Rechenarten nicht nach y auflösen und wollen deshalb eine neue Rechenart definieren, das **Logarithmieren**. Damit kann man eine Exponentialgleichung der Form $a^x = c$ nach dem Exponenten x auflösen.

Wir zeigen die Vorgehensweise an einem Beispiel:

$2^x = 64 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^6$

Exponentenvergleich: $x = 6$

6 ist der Exponent,	der den Potenzwert 64 ergibt,	bei der Basis 2
6 ist der Exponent	zu 64	zur Basis 2
Neue Sprechweise:		
6 ist der **Logarithmus**	von 64	zur Basis 2
Kurzschreibweise:	$6 = \log_2 64$	

Entsprechend kann die Gleichung $x = 2^y$ nach y aufgelöst werden: $y = \log_2 x$.

2.4.5. Übersicht über die Rechenarten der dritten Stufe

Diese Rechenarten umfassen das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren. Sie stehen in folgendem Zusammenhang:

$$a^b = c \quad \begin{cases} \textbf{radizieren} & a = \sqrt[b]{c} \\ \textbf{logarithmieren} & b = \log_a c \end{cases}$$

2.4.6. Sonderfälle für Logarithmen

Aus den Definitionen für Potenzen ergibt sich für jedes zulässige a, c:

$a^0 = 1$	$\Leftrightarrow$	$\log_a 1 = 0$	
$a^1 = a$	$\Leftrightarrow$	$\log_a a = 1$	
$a^n = c$	$\Leftrightarrow$	$a^{\log_a c} = c$	mit $n = \log_a c$
$\log_a c = n$	$\Leftrightarrow$	$\log_a a^n = n$	mit $c = a^n$

2.4.7. Logarithmieren eines Produkts

Für jedes zulässige a, b, c gilt:

I $a^{\log_a (b \cdot c)} = b \cdot c$ **II** $a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = b \cdot c$

Aus dem Vergleich von **I** und **II** folgt: $a^{\log_a (b \cdot c)} = a^{\log_a b + \log_a c}$

Durch Exponentenvergleich: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2.4.8. Logarithmieren eines Quotienten

Für jedes zulässige a, b, c gilt:

I $a^{\log_a (b : c)} = b : c$ **II** $a^{\log_a b - \log_a c} = a^{\log_a b} : a^{\log_a c} = b : c$

Aus dem Vergleich von **I** und **II** folgt: $a^{\log_a (b : c)} = a^{\log_a b - \log_a c}$

Durch Exponentenvergleich: $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

y

2.4.9. Logarithmieren einer Potenz

Für jedes zulässige a, b, c gilt:

I $a^{\log_a b^c} = b^c$ **II** $a^{c \cdot \log_a b} = (a^{\log_a b})^c = b^c$

Aus dem Vergleich von **I** und **II** folgt: $a^{\log_a b^c} = a^{c \cdot \log_a b}$

Durch Exponentenvergleich: $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

2.4.10. Wechsel der Logarithmenbasis

Dem Taschenrechner können wir nur Zehnerlogarithmen, also Logarithmen zur Basis 10 entnehmen. Die Berechnung eines Logarithmus zu einer beliebigen Basis lässt sich auf die Berechnung eines Zehnerlogarithmus zurückführen.

Wir formen die Gleichung $a^x = c$ auf zwei Arten um:

Nach Definition:	Durch Logarithmieren zur Basis 10:
I $\quad x = \log_a c$	**II** $\quad x \cdot \log_{10} a = \log_{10} c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} a} = \frac{\lg c}{\lg a}$

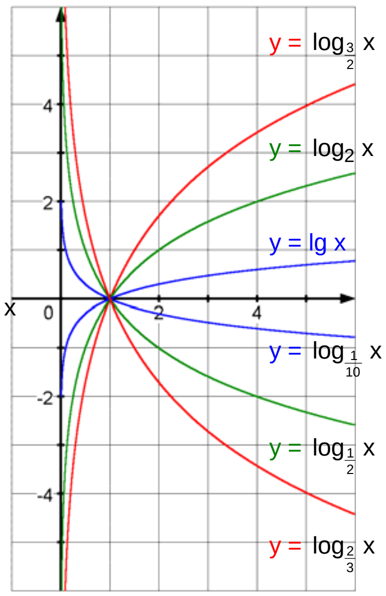
Gleichsetzen: $\quad \log_a c = \boxed{\frac{\lg c}{\lg a}} \qquad c \in \mathbb{R}^+ \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

2.4.11. Die allgemeine Logarithmusfunktion

Wir bezeichnen jede Funktion mit der Gleichung $y = \log_a x$ als logarithmische Grundfunktion.

Die Funktion f mit $y = \log_a x$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a.

Die Logarithmusfunktion mit $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit $y = a^x$.



Eigenschaften:

Definitionsmenge: $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

Wertemenge: $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Monotonie für $a > 1$:

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt: $\quad x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$
Die Funktion f mit $y = \log_a x$ und $a > 1$ ist in $\mathbb{D}$ **streng monoton steigend**.

Monotonie für $0 < a < 1$:

Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt: $\quad x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$
Die Funktion f mit $y = \log_a x$ ist **streng monoton fallend**.

Asymptote: Die y-Achse ist Asymptote.

Gemeinsamer Punkt: Alle Graphen gehen durch Punkt P (1 | 0).

2.4.12. Exponentialgleichungen

Eine Gleichung, bei der eine Variable im Exponenten auftritt, heißt **Exponentialgleichung**.

Für die Lösung einer Exponentialgleichung der Form $k \cdot a^{x+b} = c$ bzw. $a^{x+b} = \frac{c}{k}$ mit $\frac{c}{k} > 0$ stehen drei Verfahren zur Verfügung.

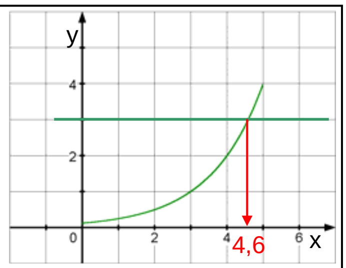
a) Graphische Lösung

Man zeichnet den Graphen der zugehörigen Exponentialfunktion $y = k \cdot a^{x+b}$. Die Parallele zur x-Achse mit $y = c$ und $c > 0$ schneidet den Graphen in einem Punkt P. Die x-Koordinate dieses Punktes ist die gesuchte Lösung.

Beispiel

Gegeben: $\quad 2^{x-3} = 3$
Gesucht: $\quad \mathbb{L}$

Zugehörige Exponentialfunktion: $y = 2^{x-3}$



Die Parallele zur x-Achse im Abstand d = 3 schneidet den Graphen im Punkt P (4,6 | 3).

Aus der Zeichnung: $\quad x = 4{,}6 \qquad \mathbb{L} = \{4{,}6\}$

Probe: $2^{4,6-3} = 3{,}0$

b) Lösung durch Exponentenvergleich

Dieses Verfahren ist nur anzuwenden, wenn sich $\frac{c}{k}$ als Potenz von a schreiben lässt. In diesem Fall kann ein Exponentenvergleich durchgeführt werden.

Beispiel

1. $2^{x+4} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x+4} = 2^3$
Exponentenvergleich: $x + 4 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \qquad \mathbb{L} = \{-1\}$

2. $4 \cdot 3^{x-5} = 36 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x-5} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x-5} = 3^2$
Exponentenvergleich: $x - 5 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7 \qquad \mathbb{L} = \{7\}$

c) Lösung durch Logarithmieren

Durch Logarithmieren beider Seiten lässt sich jede Exponentialgleichung $k \cdot a^{x+b} = c$ nach x auflösen:

$$\lg k + (x + b) \cdot \lg a = \lg c \quad \Leftrightarrow \quad x + b = \frac{\lg c - \lg k}{\lg a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg c - \lg k}{\lg a} - b$$

Wegen der Verwendung des Taschenrechners zur Berechnung von Näherungswerten verwendet man günstigerweise den Zehnerlogarithmus.

2.4.13. Wachstumsprozesse

Von einer Bakterienkultur sind anfänglich 10 Bakterien vorhanden. Im Durchschnitt verdoppelt sich ihre Anzahl in jeder Stunde. Auf welchen Bestand ist die Bakterienkultur nach 5,5 Stunden angewachsen? Nach welcher Zeit hat sie sich verzehnfacht.
Gesucht ist also der funktionale Zusammenhang zwischen der Zeit (x Stunden) seit Anlage der Kultur und der Anzahl (y) der vorhandenen Bakterien.

Zu Beginn:	$y_0 = 10$	bzw.	$y_0 = 10 \cdot 1$	$\Leftrightarrow$	$y_0 = 10 \cdot 2^0$
Nach 1 Stunde:	$y_1 = 20$	bzw.	$y_1 = 10 \cdot 2$	$\Leftrightarrow$	$y_1 = 10 \cdot 2^1$
Nach 2 Stunden:	$y_2 = 40$	bzw.	$y_2 = 10 \cdot 4$	$\Leftrightarrow$	$y_2 = 10 \cdot 2^2$
Nach 3 Stunden:	$y_3 = 80$	bzw.	$y_3 = 10 \cdot 8$	$\Leftrightarrow$	$y_3 = 10 \cdot 2^3$
Nach 4 Stunden:	$y_4 = 160$	bzw.	$y_4 = 10 \cdot 16$	$\Leftrightarrow$	$y_4 = 10 \cdot 2^4$
	$\vdots$				$\vdots$
Nach x Stunden:					$y = 10 \cdot 2^x$

Das Anwachsen der Bakterienkultur kann also durch die Funktionsgleichung $y = 10 \cdot 2^x$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{N}_0$ beschrieben werden. Diese Gleichung kann auch für Zwischenwerte (z. B. 3,2 Stunden) verwendet werden, also $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$.

a) Graphische Lösung

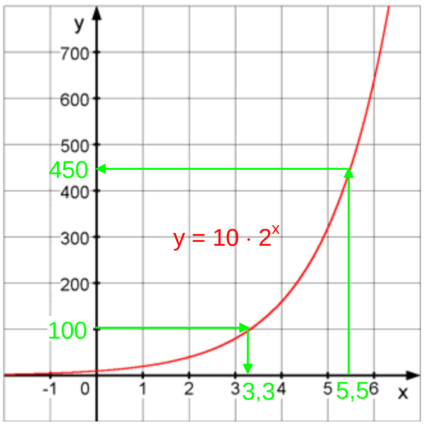
Aus der Graphik: Für x = 5,5 erhält man $y \approx 450$

Überprüfung mit dem Taschenrechner:

Das Ergebnis kann nur eine ganze Zahl sein; also ist auf 453 zu runden.
Nach 5,5 Stunden ist die Bakterienkultur auf 453 Bakterien angewachsen.

Aus der Graphik: Für y = 100 erhält man $x \approx 3{,}3$

Nach 3,3 Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien in der Bakterienkultur verzehnfacht.



b) Rechnerische Lösung

Für y = 100 erhält man:
$100 = 10 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 2^x$.

Logarithmieren: $\lg 10 = x \cdot \lg 2$

Auflösen nach x: $x = \frac{\lg 10}{\lg 2} \approx 3{,}32$

Nach 3,32 Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien in der Kultur verzehnfacht.

2.4.14. Abklingprozesse

Das Edelgas Radon wandelt sich durch radioaktiven Zerfall um, wobei täglich 16,7 % der Restmasse zerfallen. Nach welcher Zeit ist noch die Hälfte des Stoffes vorhanden? Wie viele Gramm von 60 g Radon sind nach zwei Tagen zerfallen?

Gesucht ist der funktionale Zusammenhang zwischen der Zeit des Zerfalls (in x Tagen) und der Masse (y Gramm) des noch vorhandenen radioaktiven Gases.

Anfangsmasse: $y_0 = 60$

Masse nach 1 Tag: $y_1 = 60 - 60 \cdot \frac{16{,}7}{100} = 60\,(1 - 0{,}167) = 60 \cdot 0{,}833^1$

Masse nach 2 Tagen: $y_2 = y_1 - y_1 \cdot \frac{16{,}7}{100} = y_1\,(1 - 0{,}167) = 60 \cdot 0{,}833^2$

Masse nach 3 Tagen: $y_3 = y_2 - y_2 \cdot \frac{16{,}7}{100} = y_2\,(1 - 0{,}167) = 60 \cdot 0{,}833^3$

$\vdots$

Masse nach x Tagen: $y = 60 \cdot 0{,}833^x$

Der Zusammenhang kann also durch die Exponentialgleichung $y = 60 \cdot 0{,}833^x$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.

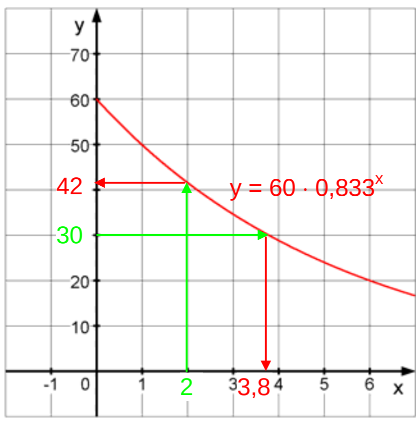
a) Graphische Lösung

Aus der Graphik: Für y = 30 erhält man x = 3,8.
Nach 3,8 Tagen ist also die Hälfte des Radons zerfallen.

Die Zeit, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Masse des radioaktiven Gases noch die Hälfte übrig ist, nennt man **Halbwertszeit**.

Aus der Graphik: Für x = 2 erhält man y = 42.

Nach 2 Tagen sind also 18 g des Radons zerfallen.



b) Rechnerische Lösung

Masse nach 2 Tagen:
$y_2 = 60 \cdot 0{,}833^2$ g
$y_2 = 41{,}63$ g
Nach zwei Tagen sind 18,37 Gramm zerfallen.

Für eine beliebige Anfangsmasse m_0 eines radioaktiven Stoffes gilt allgemein das Zerfallsgesetz $m = m_0 \cdot a^x$.
Die Halbwertszeit eines Stoffes errechnet sich dann folgendermaßen:

Mit $m = \frac{1}{2} m_0$ gilt: $\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot a^x$

Kürzen mit m_0: $\frac{1}{2} = a^x$

Logarithmieren: $\lg 0{,}5 = x \cdot \lg a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg a}$

Für Radon: $x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}833} = 3{,}79$

Die Halbwertszeit von Radon beträgt 3,79 Tage.

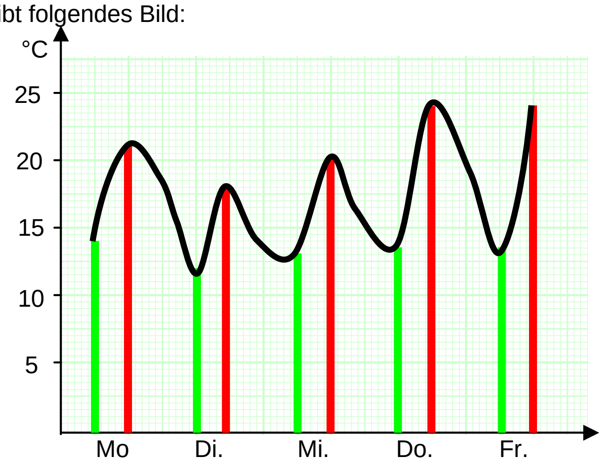
2.4.15. Empirische Funktion

Wir sprechen von einer empirischen Funktion, wenn die Zahlenpaare keiner erkennbaren mathematischen Gesetzmäßigkeit unterliegen.

Beispiel: Die Klasse 8a der Stein-Realschule liest eine Woche lang täglich um 8.00 Uhr und um 12.00 Uhr die Tagestemperatur ab. Sie erhält eine Messtabelle folgender Art:

Montag		Dienstag		Mittwoch		Donnerstag		Freitag	
8.00	12.00	8.00	12.00	8.00	12.00	8.00	12.00	8.00	12.00
14°	21°	12°	18°	13°	20°	17°	23°	17°	24°

Die graphische Darstellung ergibt folgendes Bild:



Durch die Zahlenpaare in der numerischen und graphischen Wertetabelle ist eine Funktion festgelegt. Häufig verbindet man auch die Endpunkte näherungsweise zu einem geschlossenen Streckenzug.

2.4.16. Übung: Potenz- und Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

1 Der Graph der Funktion f mit $y = x^3$ ($y = x^{-\frac{2}{3}}$) soll zuerst durch eine orthogonale Affinität mit a und anschließend durch eine Parallelverschiebung mit $\vec{v}$ abgebildet werden. Geben Sie die Gleichung des Bildgraphen an. Überprüfen Sie die Ergebnisse mit einem Geometrieprogramm.

a) $a = -1{,}5$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **b)** $a = 0{,}4$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

2.0 Die kinetische Energie eines Körpers lässt sich nach der Formel $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ berechnen.
m: Masse des Körpers
v: Geschwindigkeit des Körpers

2.1 Für die Einheit J (Joule) der Energie gilt:
$1\ J = 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$. Bestätigen Sie dies.

2.2 Welche Energie hat ein Auto (m = 1,4 Tonnen), das mit $100\ km \cdot h^{-1}$ fährt?

2.3 Stellen Sie den Zusammenhang aus 8.0 für
$v \in [0\ km \cdot h^{-1}; 100\ km \cdot h^{-1}]$ und m = 1,4 t graphisch dar.
x-Achse: $1\ cm \mathrel{\widehat{=}} 10\ km \cdot h^{-1}$
y-Achse: $1\ LE \mathrel{\widehat{=}} 10\,000\ J$

2.4 Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Auto (Angabe in $km \cdot h^{-1}$), wenn seine anfängliche Bewegungsenergie von 60 000 J halbiert wird? Graphische und rechnerische Lösung.

2.5 Das Auto fährt nun bis $50\ km \cdot h^{-1}$ gleichmäßig beschleunigt, dann behält es für 1 Minute die erreichte Geschwindigkeit bei und erreicht letztlich mit der gleichen Beschleunigung die Endgeschwindigkeit von $100\ km \cdot h^{-1}$. Stellen Sie diesen Vorgang graphisch dar und geben Sie die einzelnen Bewegungsgleichungen an.

Aufgabe 3

3.0 Zu einem Kapital K_0 werden die Zinsen jeweils am Jahresende hinzugefügt. Kapital und Zinsen werden zusammen weiter verzinst (Zinseszinsen). Das Kapital K_0 wächst so in n Jahren bei p% Zinsen auf K_n an.

Es gilt die Gleichung: $\quad K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

3.1 Auf welchen Betrag wachsen 800 EUR bei einem Zinssatz von 4% in 6 Jahren?

3.2 Legt man 800 EUR bei 6% Verzinsung für 4 Jahre fest, erhält man ein kleineres Endkapital. Berechnen Sie den Unterschied.

3.3 Wie hoch ist der Zinssatz bei der Gleichung $K_n = K_0 \cdot 1{,}055^n$? Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich bei dieser Verzinsung das Kapital?

Aufgabe 4

4.0 Eine Strecke der Länge l = 1 m wird fortlaufend halbiert (vgl. Skizze).

4.1 Geben Sie eine Gleichung der Form $y = a^x$ an, die diesen Vorgang beschreibt.

4.2 Nach wie vielen Teilungen erhält man eine Strecke, deren Länge kleiner ist als 1 mm?

4.3 Ein Stabbakterium ist etwa 10^{-7} m lang.
Nach wie vielen Teilungen erhält man eine Strecke dieser Länge?

Lösungen

Zu Aufgabe 1

1 **a)** $y = -1{,}5 \cdot (x-5)^3 + 2$ bzw. $y = -1{,}5 \cdot (x-5)^{-\frac{2}{3}} + 2$

b) $y = 0{,}4 \cdot (x+7)^3 + 1{,}5$ bzw. $y = 0{,}4 \cdot (x+7)^{-\frac{2}{3}} + 1{,}5$

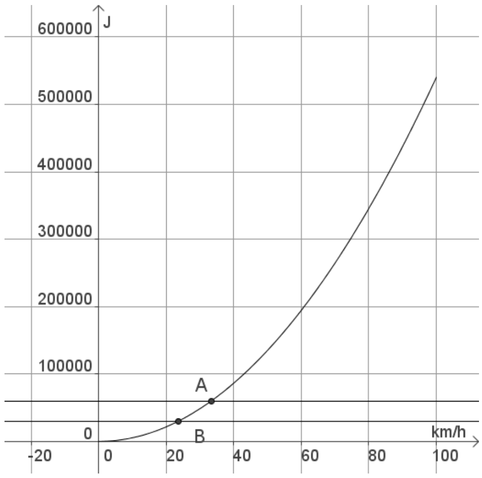
Zu Aufgabe 2

2.1 $[E_{kin}] = [m] \cdot [v^2] = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\ J$

2.2 $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 1\,400\ kg \cdot (27{,}78\ \frac{m}{s})^2$ $E_{kin} = 540\,210\ J = 540{,}21\ kJ$

2.3 $E_{kin} = y\ J$ $v = x\ \frac{km}{h}$

$y = \frac{1}{2} \cdot 1\,400\ kg \cdot \frac{1\,000^2}{3\,600^2} x^2$ $y = 54{,}01 \cdot x^2$



2.4 Aus der Graphik:
A (33,33 | 600 000) B (23,57 | 300 000)
Bei Halbierung der Bewegungsenergie reduziert sich die Geschwindigkeit nur auf das 0,7-fache.

Durch Rechnung:

$E_{kin} = 60\,000\ J$ $x^2 = \frac{60\,000}{54{,}01}$ $x = 33{,}33$

$E_{kin} = 30\,000\ J$ $x^2 = \frac{30\,000}{54{,}01}$ $x = 23{,}57$

$n = \frac{23{,}57}{33{,}33} = 0{,}7$

2.5 **1. Abschnitt:**

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $a = \frac{50\ \frac{km}{h}}{5\ s} = \frac{13{,}89\ \frac{m}{s}}{5\ s} = 2{,}78\ \frac{m}{s^2}$ $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}78\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2$

$t \in [0\ s; 5\ s]$

2. Abschnitt:

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}78\ \frac{m}{s^2} \cdot (5\ s)^2$ $s_1 = 34{,}75\ m$

$s_2 = 34{,}75\ m + 13{,}89\ \frac{m}{s} \cdot (t - 5\ s)$ $t \in [0\ s; 65\ s]$

3. Abschnitt:

$s_3 = 34{,}75\ m + 13{,}89\ \frac{m}{s} \cdot 60\ s$ $s_3 = 868{,}15\ m$

$s_3 = 868{,}15\ m + \frac{1}{2} \cdot 2{,}78\ \frac{m}{s^2} \cdot (t - 65)^2$

$v = a \cdot t$ $27{,}77\ \frac{m}{s} = 2{,}78\ \frac{m}{s^2} \cdot t$ $t = 10\ s$ $t \in [65\ s; 75\ s]$

Zu Aufgabe 3

3.1 $K_6 = 1\,012{,}26$ €
3.2 $K_4 = 1\,009{,}98$ €
3.3 $p = 5{,}5\ \%$ $1{,}055^n = 2$ $n = 12{,}95$
Nach 13 Jahren verdoppelt sich das Kapital.
3.4 entsprechend dem Unterricht

Zu Aufgabe 4

4.1 $y = 0{,}5^x$

4.2 $0{,}001 = 0{,}5^x$ $x = \frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}5}$ $x = 9{,}97$

Nach 10 Teilungen ist die Strecke kürzer als 1 mm.

4.3 $10^{-7} = 0{,}5^x$ $x = \frac{\lg 0{,}0000001}{\lg 0{,}5}$ $x = 23{,}25$