Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche Fakultät I – Didaktik der Mathematik
Dr. Günter Rothmeier
WS 2008/09

51 722 Elementarmathematik (LH)

Private Vorlesungsaufzeichnungen

Kein Anspruch auf Vollständigkeit und Fehlerfreiheit

8. Geometrische Körper

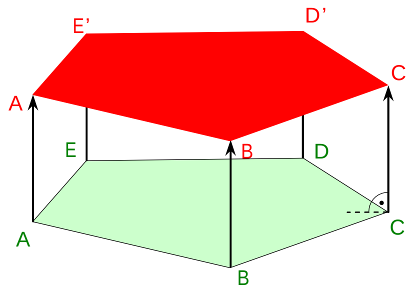
8.1. Das gerade Prisma

8.1.1. Netz und Oberfläche des geraden Prismas

8.1.1.1. Erzeugung eines Quaders durch Parallelverschiebung

Einen Quader kann man durch Parallelverschiebung eines Rechtecks ABCD erzeugen. Die Repräsentanten $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ und $\overrightarrow{DD'}$ des Verschiebungsvektors stehen dabei auf der Ebene ABCD senkrecht.

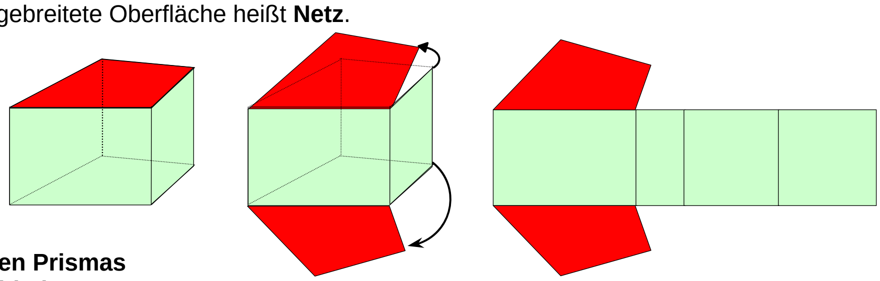
8.1.1.2. Das n-seitige gerade Prisma



Verschiebt man ein beliebiges ebenes n-Eck senkrecht zur Ebene des n-Ecks, so entsteht ein **n-seitiges (gerades) Prisma**.
Ist das n-Eck regelmäßig („regulär“), so spricht man von einem **n-seitigen, regulären Prisma**. Ein Quader ist also ein Spezialfall eines Prismas.
Die Fläche, die verschoben wird (hier ABCDE) nennen wir **Grundfläche G**, ihren Inhalt A_G. Die Fläche A'B'C'D'E' heißt **Deckfläche**. Grund- und Deckfläche sind zueinander kongruent und parallel.
Die **Seitenflächen** sind Rechtecke. Die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte von Grund- und Deckfläche heißen **Seitenkanten**. Die Seitenflächen zusammen bilden die **Mantelfläche** (kurz Mantel). Mantel-, Grund- und Deckfläche ergeben zusammen die **Oberfläche**. Den Inhalt der Mantelfläche bezeichnen wir mit M, den der Oberfläche mit O.

8.1.1.3. Netz des geraden Prismas

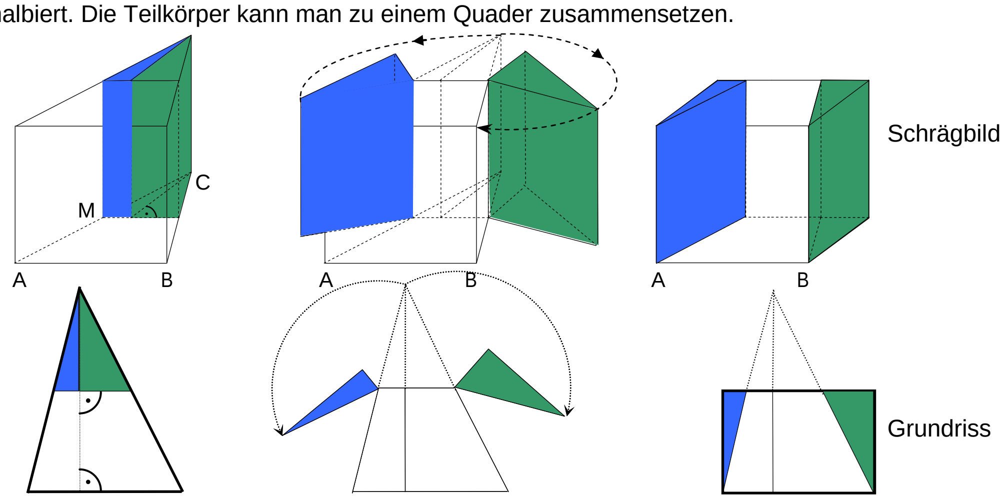
Die Oberfläche eines Prismas lässt sich in die Ebene ausbreiten: Man kann die Oberfläche **abwickeln**. Die ausgebreitete Oberfläche heißt **Netz**.



8.1.2. Volumen des geraden Prismas

8.1.2.1. Zerlegungsgleichheit von Körpern

Wir zerlegen ein dreiseitiges, gerades Prisma mit dem Dreieck ABC als Grundfläche durch zwei ebene Schnitte senkrecht zur Grundfläche (vgl. Skizze). Dabei werden die Seiten [AC] und [BC] halbiert. Die Teilkörper kann man zu einem Quader zusammensetzen.



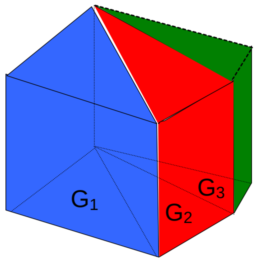
Quader und Prisma besitzen zerlegungsgleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Beide Körper sind also zerlegungsgleich. Da sich durch die Bewegungen der Rauminhalt der Teilkörper nicht verändert, gilt:

8.1.2.2. Volumen des dreiseitigen geraden Prismas

Das dreiseitige gerade Prisma ist volumengleich einem Quader, der mit diesem im Inhalt der Grundfläche und in der Höhe übereinstimmt.
Wegen der Zerlegungsgleichheit gilt: $V_{Prisma} = V_{Quader} = A_G \cdot h$

8.1.2.3. Volumen eines n-seitigen geraden Prismas

Jedes n-Eck kann in n – 2 Dreiecke zerlegt werden. Ein n-seitiges gerades Prisma kann also in n – 2 dreiseitige Prismen mit gleicher Höhe zerlegt werden. Für das Prismenvolumen gilt:

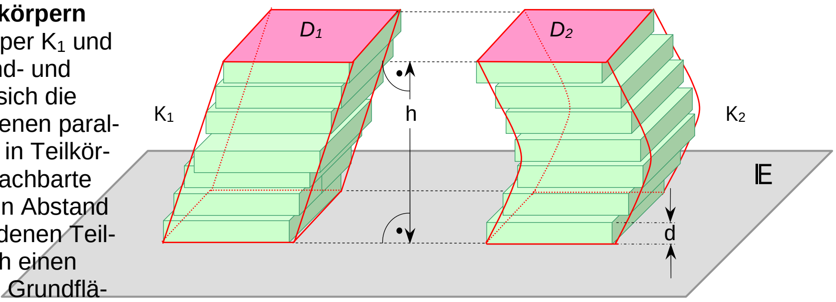


$$\begin{aligned} V &= A_1 \cdot h + A_2 \cdot h + \ldots + A_{n-2} \cdot h \\ &= (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h \\ &= A_G \cdot h \end{aligned}$$

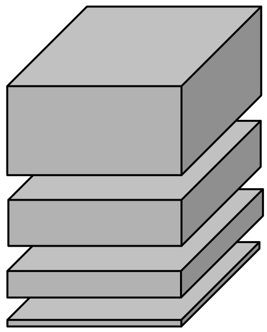
8.2. Das Prinzip von Cavalieri

8.2.1. Volumen von Treppenkörpern

Wir betrachten zwei Körper K_1 und K_2 mit kongruenter Grund- und Deckfläche. Man denkt sich die beiden Körper durch Ebenen parallel zu den Grundflächen in Teilkörper zerlegt. Je zwei benachbarte Ebenen sollen denselben Abstand d haben. Jeden entstandenen Teilkörper ersetzt man durch einen Quader mit der gleichen Grundfläche und der Höhe d.



Auf diese Weise wird jeder der beiden Körper durch einen „Treppenkörper" ersetzt. Je zwei Teile des Treppenkörpers, die auf der gleichen Schnittebene stehen, haben den gleichen Rauminhalt, wenn ihre Grundflächen den gleichen Flächeninhalt haben. Gilt dies für alle Teile, so sind die beiden Treppenkörper zerlegungsgleich, haben also den gleichen Rauminhalt.



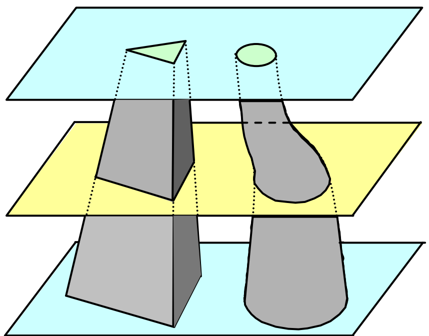
$d \to 0$
„d geht gegen Null"

8.2.2. Grenzfall für d gegen Null

Denkt man sich den Abstand d der Ebenen immer kleiner, so werden die Quader immer „dünner". Die Treppenkörper unterscheiden sich immer weniger von den ursprünglichen Körpern. Im Grenzfall (man sagt: „d geht gegen Null") gehen die Quader in paarweise inhaltsgleiche „Rechtecke" über.

8.2.3. Erweiterung

Obige Überlegung gilt auch, wenn Grund- und Deckfläche des einen Körpers zu Grund- und Deckfläche des anderen Körpers zwar nicht kongruent, aber inhaltsgleich sind.
Entscheidend ist also nicht die Form der Körper, sondern der gleiche Inhalt der Grundflächen sowie der Deckflächen, die gleiche Höhe und der gleiche Inhalt der Schnittflächen in jeder Schnittebene.
Der Zusammenhang zwischen den Volumina der oben beschriebenen Körper wurde von BONAVENTURA CAVALIERI (1598 – 1647) entdeckt.



8.2.4. Prinzip von Cavalieri

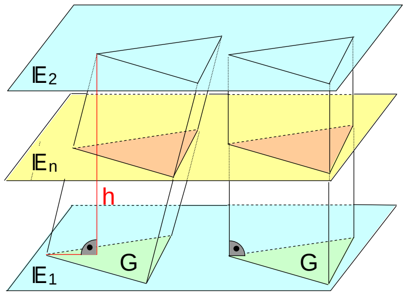
Zwei Körper sind volumengleich, wenn sie folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Grundflächen sind inhaltsgleich und liegen in derselben Ebene $\mathbb{E}_1$.
2. Die Deckflächen sind inhaltsgleich und liegen in einer Ebene $\mathbb{E}_2 \parallel \mathbb{E}_1$.
3. Parallelebenen $\mathbb{E}_n$ zu $\mathbb{E}_1$ schneiden aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen aus.

8.2.5. Volumen des schiefen Prismas

Wir vergleichen ein schiefes Prisma mit einem geraden Prisma, welches so gewählt wird, dass gilt:

1. Die beiden Prismen haben inhaltsgleiche Grundflächen.
2. Die Prismen haben gleiche Höhen.

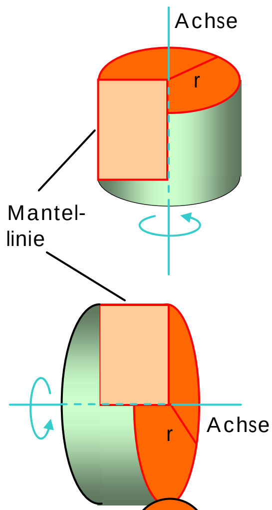


Die Körper kann man sich durch Parallelverschiebung der jeweiligen Grundfläche entstanden denken. Innerhalb eines Körpers sind sämtliche Schnittflächen, die durch Parallelebenen zu $\mathbb{E}_1$ entstehen, zur Grundfläche kongruent. Wegen der Inhaltsgleichheit der Grundflächen sind auch je zwei Figuren der Schnittebene inhaltsgleich.
Die Bedingungen des Prinzips von Cavalieri sind erfüllt, also sind das schiefe und das gerade Prisma volumengleich.

8.3. Der gerade Kreiszylinders

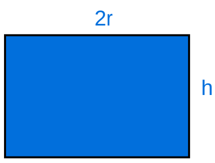
8.3.1. Bezeichnungen

Durch Drehung (Rotation) eines Rechtecks um eine Seite entsteht als **Rotationskörper** ein **gerader Kreiszylinder**, auch kurz **Zylinder** genannt.
Die Rechteckseite, um die gedreht wird, ist **Symmetrieachse** (auch Rotationsachse). Den Abstand der Deckfläche zur Grundfläche nennt man **Höhe**.
Schneidet man den Mantel eines Zylinders senkrecht zur Grundfläche, so erhält man eine **Mantellinie**. Die Länge jeder Mantellinie ist gleich der Höhe.
Schneidet man einen Zylinder mit einer Ebene senkrecht zur Grundfläche, so erhält man als Schnittfigur ein Rechteck. Enthält die Ebene die Achse, so hat das Rechteck die Seitenlängen 2r und h. Man spricht dann von einem **Axialschnitt**.

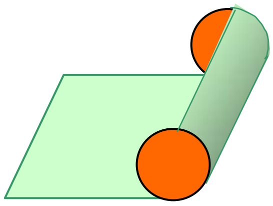


8.3.2. Oberfläche des geraden Kreiszylinders

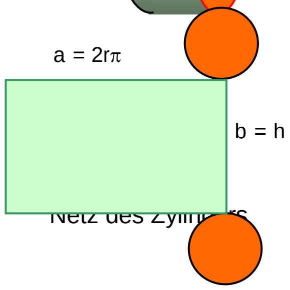
Die Oberfläche des geraden Kreiszylinders besteht aus der Grund- und der Deckfläche sowie der Mantelfläche (Rechteck). Diese lässt sich in die Zeichenebene abwickeln. Man erhält so das Netz des Zylinders



Axialschnitt

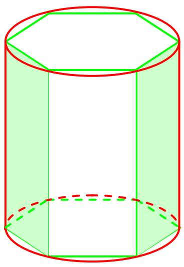


$$O = 2 \cdot A_G + M$$
$$O = 2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi h$$
$$O = 2r\pi \cdot (r + h)$$

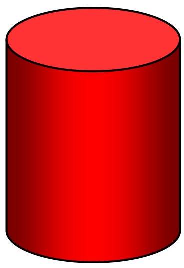


8.3.3. Volumen des geraden Kreiszylinders

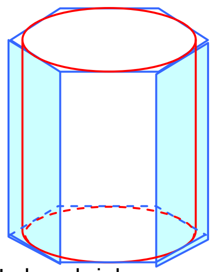
Einem geraden Keiszylinder mit dem Radius r wird ein n-seitiges reguläres Prisma einbeschrieben bzw. umbeschrieben.



Einbeschriebenes reguläres Prisma (n = 6)



Zylinder



Umbeschriebenes reguläres Prisma (n = 6)

Der Rauminhalt V_E des einbeschriebenen Prismas ist kleiner als der Rauminhalt V des Zylinders.
Der Rauminhalt V_U des umbeschriebenen Prismas ist größer als V. Also gilt:

$$V_E < V < V_U \quad \Leftrightarrow \quad A_E \cdot h < V < A_U \cdot h$$

Andererseits gilt für die Grundflächen: $A_E < A_G < A_u$
Aus dieser Ungleichung erhält man die obere durch Multiplikation mit h. Also gilt in diesem Fall:

$$\frac{V}{h} = A_G \quad \Leftrightarrow \quad V = A_G \cdot h$$

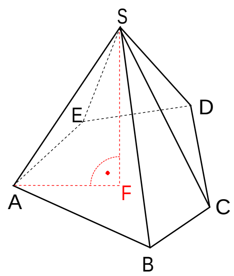
Bei fortgesetzter Verdoppelung der Eckenzahl n vergrößert sich das Volumen des einbeschriebenen Prismas und verkleinert sich das Volumen des umbeschriebenen Prismas. Das Volumen des Zylinders liegt stets dazwischen. Also ist eine Intervallschachtelung für das Volumen des Zylinders festgelegt. Die obige Beziehung gilt für jeden einzelnen Fall, also auch für den Grenzfall.

Wegen $A_G = r^2\pi$ gilt: $V = r^2\pi \cdot h$

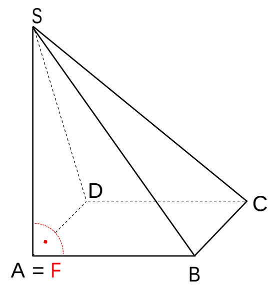
8.4. Die Pyramide

8.4.1. Bezeichnungen

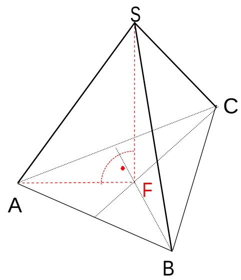
Verbindet man die Eckpunkte eines n-Ecks mit einem Punkt S außerhalb der Ebene des n-Ecks, so entsteht eine **n-seitige Pyramide**. Das n-Eck heißt **Grundfläche**, S heißt **Spitze** der Pyramide.



Fünfseitige schiefe Pyramide



Schiefe Pyramide mit quadratischer Grundfläche



Dreiseitige gerade Pyramide

Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt **Höhe**. Die Seiten der Grundfläche heißen **Grundkanten**, die Verbindungsstrecken der Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze sind die **Seitenkanten**. Die Seitenflächen sind Dreiecke, sie bilden zusammen den **Pyramidenmantel**. Seinen Inhalt bezeichnet man mit M.

Besitzt die Grundfläche einen Mittelpunkt und liegt die Spitze senkrecht darüber, so spricht man von einer **geraden Pyramide**, andernfalls von einer **schiefen Pyramide**. Ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ein reguläres n-Eck, so spricht man von einer **regulären Pyramide**.

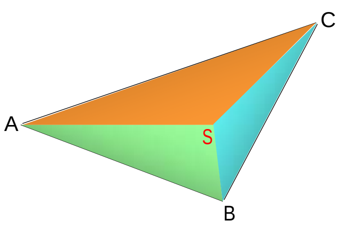
8.4.2. Oberfläche der Pyramide

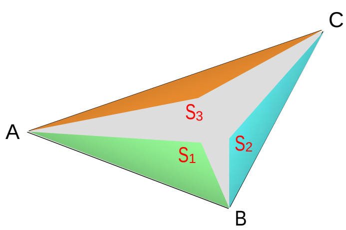
Grundfläche und Mantelfläche zusammen ergeben die **Oberfläche der Pyramide**.

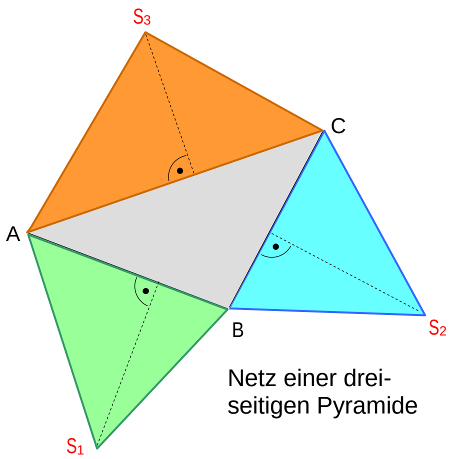
Inhalt der Pyramidenoberfläche: $O = A_G + M$

8.4.3. Netz der Pyramide

Schneidet man eine Pyramide entlang der Seitenkanten auf und klappt die Seitenflächen in die Ebene der Grundfläche, so erhält man das **Netz der Pyramide**.





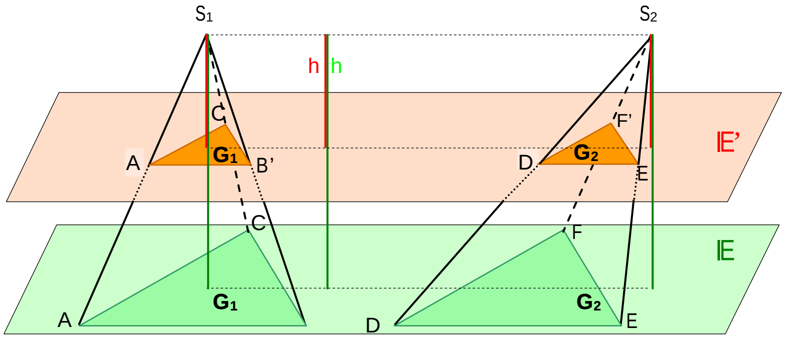


Netz einer dreiseitigen Pyramide

8.4.4. Volumen der Pyramide

8.4.4.1. Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen

Wir betrachten zwei Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen. Nach dem Prinzip von Cavalieri haben sie das gleiche Volumen, wenn jede Parallelebene zur Grundfläche aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen ausschneidet.



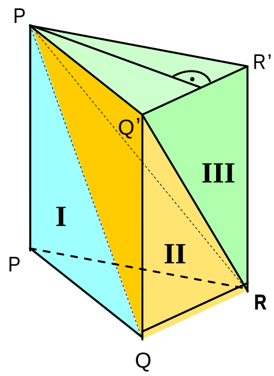
Die Spitzen S_1 und S_2 können als Zentren räumlicher zentrischer Streckungen aufgefasst werden, welche Δ ABC auf Δ A'B'C' bzw. Δ DEF auf Δ D'E'F' abbilden. Für beide Streckungen gilt:

$\frac{h'}{h} = k$ (Streckungsfaktor)

$\frac{\text{Bildfläche}}{\text{Urfläche}} = k^2$

Daraus folgt für die Inhalte A_1, A_2, A_1', A_2' der Flächen G_1, G_2, G_1', G_2':

$\frac{A_1'}{A_2'} = \frac{k^2 \cdot A_1}{k^2 \cdot A_2} = \frac{A_1}{A_2} = 1$, da nach Voraussetzung $A_1 = A_2$ gilt.



Damit ist auch die 3. Bedingung des Prinzips von Cavalieri erfüllt.

Es folgt: Alle Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind volumengleich.

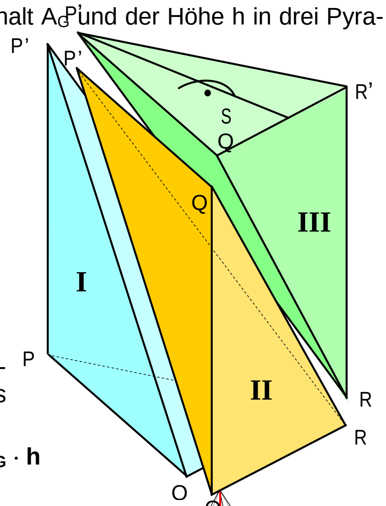
8.4.4.2. Volumen der dreiseitigen Pyramide

Wir zerlegen ein dreiseitiges Prisma mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhe h in drei Pyramiden (vergleiche Zeichnung).

Vergleich der Pyramiden P_I, P_{II} und P_{III}

	P_I und P_{III}	P_{II} und P_{III}
Grundflächen:	$A_{\Delta PQR} = A_{\Delta P'Q'R'}$	$A_{\Delta RQ'R'} = A_{\Delta RQQ'}$
Höhen:	$\overline{PP'} = \overline{RR'}$	$\overline{SP'} = \overline{SP'}$
Folgerung:	$V_I = V_{III}$	$V_{II} = V_{III}$

Damit gilt: $V_I = V_{II} = V_{III}$



Die drei Pyramiden sind also inhaltsgleich. Folglich ist das Volumen der dreiseitigen Pyramide gleich dem dritten Teil des Volumens des Prismas.

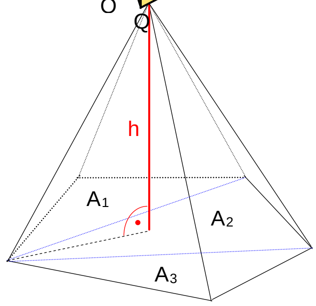
Volumen der dreiseitigen Pyramide: $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

8.4.4.3. Volumen der n-seitigen Pyramide

Eine n-seitige Pyramide lässt sich in n – 2 dreiseitige Pyramiden mit gleichen Höhen zerlegen.

$V_{\text{Pyr.}} = \frac{1}{3} A_1 \cdot h + \frac{1}{3} A_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} A_{n-2} \cdot h$

$V_{\text{Pyr.}} = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

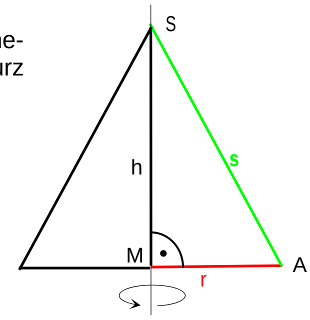


Volumen der n-seitigen Pyramide: $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

8.5. Der gerade Kreiskegels

8.5.1. Bezeichnungen

Durch Drehung (Rotation) eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete als Achse entsteht als Rotationskörper ein **gerader Kreiskegel**, kurz **Kegel**.



Axialschnitt

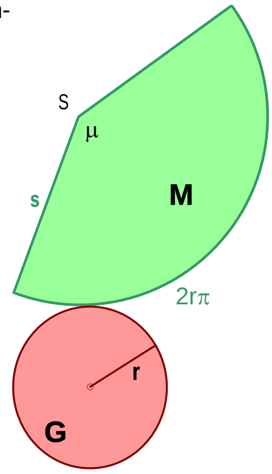
S heißt Spitze.
h heißt Höhe.
[AS] heißt Mantellinie.
Ihre Länge wird mit s bezeichnet:
$s = \overline{A'S} = \overline{A''S} = \overline{A'''S}$

8.5.2. Mantelfläche und Oberfläche

Die **Mantelfläche** ist ein Kreissektor mit dem Maß μ des Mittelpunktswinkels, dem Radius s (Mantellinie) und der Bogenlänge $b = 2r\pi$.
Für die Bogenlänge b des Kreissektors mit dem Radius s gilt:

$$b = \frac{\mu}{360°} \cdot 2s\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2r\pi = \frac{\mu}{360°} \cdot 2s\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu}{360°} = \frac{2r\pi}{2s\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{r}{s} \cdot 360°$$



Netz des Kegels

Für den Inhalt eines Kreissektors mit dem Radius s und dem Bogen b gilt:

$$A_{Sektor} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot s \quad \Leftrightarrow \quad A_{Sektor} = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s \quad \Leftrightarrow$$

$$A_{Sektor} = r\pi s$$

Dieser Kreissektor ist flächengleich mit dem Mantel des Kegels.

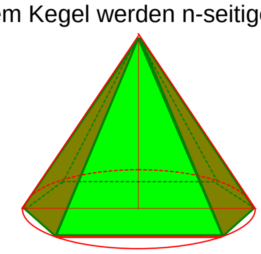
8.5.3. Inhalt der Mantelfläche des Kegels: $\mathbf{M = r\,\pi\,s}$

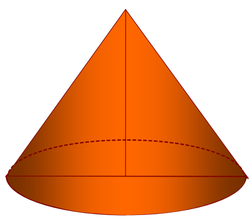
Die **Oberfläche** des Kegels setzt sich zusammen aus der Grundfläche und der Mantelfläche.

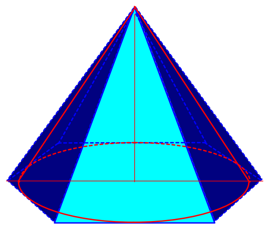
$$O = A_G + M \quad \Leftrightarrow \quad O = r^2\,\pi + r\,\pi\,s \quad \Leftrightarrow \quad O = r\,\pi\,(r + s)$$

8.5.4. Volumen des Kegels

Einem Kegel werden n-seitige reguläre Pyramiden ein- bzw. umbeschrieben.


Einbeschriebene Pyramide


Kegel


Umbeschriebene Pyramide

Durch Grenzbetrachtungen wie beim Zylinder erhält man die Volumenformel.

Volumen des geraden Kreiskegels: $\mathbf{V = \frac{1}{3}\,r^2 \cdot \pi \cdot h}$

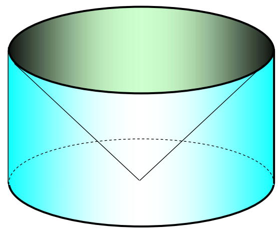
8.6. Die Kugel

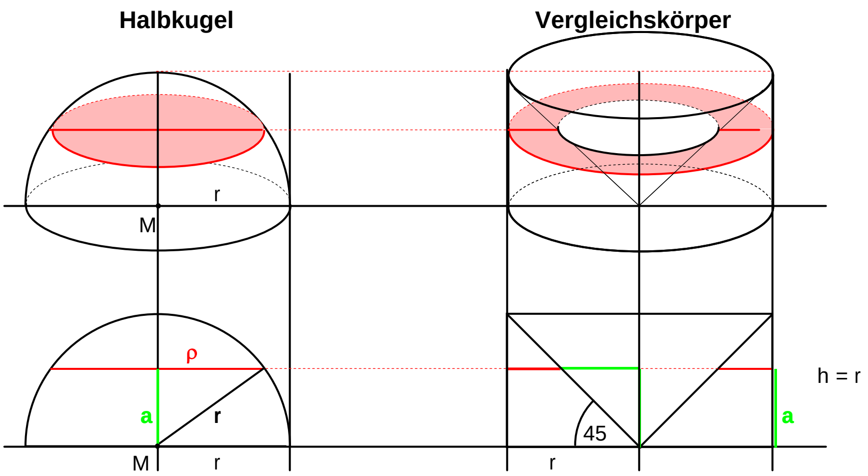
8.6.1. Definition

Bei Rotation eines Kreises um einen beliebigen Durchmesser als Achse entsteht eine **Kugel**. Auch die Kugel ist also ein Rotationskörper.

8.6.2. Volumen der Kugel

Wir leiten zunächst die Volumenformel für eine Halbkugel her. Dazu vergleichen wir diese mit einem Körper, dessen Rauminhalt bereits berechnet werden kann, und wenden das Prinzip von CAVALIERI an. Als Vergleichskörper wählen wir einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgebohrt ist.





$A_1 = r^2\pi$ inhaltsgleiche Grundflächen $A_2 = r^2\pi$

$h = r$ gleiche Höhen $h = r$

Die beiden Körper werden parallel zu den Grundflächen in beliebigem Abstand a geschnitten.
Als Schnittfläche entsteht

eine Kreisfläche mit dem Radius ρ — ein Kreisring mit den Radien r und a

$A_1' = \rho^2\pi$ mit $\rho^2 = r^2 - a^2$ — $A_2' = r^2\pi - a^2\pi$

$A_1' = (r^2 - a^2) \cdot \pi$ — $A_2' = \pi \cdot (r^2 - a^2)$

Also gilt: $A_1' = A_2'$

Die Bedingungen des Prinzips von Cavalieri sind erfüllt. Die beiden Körper sind folglich volumengleich:

$$\mathbf{V_1 = V_2}$$

Wir berechnen das Volumen V_2 des Vergleichskörpers als Differenz aus dem Volumen V_Z des Zylinders und dem Volumen V_K des Kegels:

$$V_2 = V_Z - V_K$$

$$V_2 = r^2\pi h - \tfrac{1}{3} r^2 \pi h \quad \text{mit } h = r$$

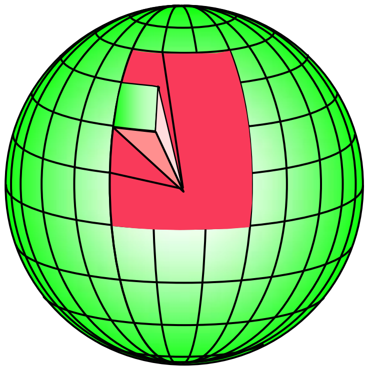
$$V_2 = r^2\pi r - \tfrac{1}{3} r^2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = r^3\pi - \tfrac{1}{3} r^3\pi \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = \tfrac{2}{3} r^3\pi$$

Damit ist auch das Volumen der Halbkugel bestimmt. Das Volumen der Vollkugel erhält man durch Verdoppelung des Volumens der Halbkugel.

Volumen der Kugel: $\mathbf{V_{Kugel} = \tfrac{4}{3} r^3 \pi}$

8.6.3. Oberfläche der Kugel

Um den Inhalt der Oberfläche zu bestimmen, führen wir eine Grenzwertbetrachtung durch.



Man denkt sich die Oberfläche der Kugel in kleine Teilflächen zerlegt. Verbindet man deren Randlinien mit dem Kugelmittelpunkt M, so entstehen Körper, die näherungsweise durch Pyramiden ersetzt werden können, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt liegen. Die Grundflächen der Pyramiden sind Dreiecke oder Trapeze. Die Höhen h sind näherungsweise gleich dem Kugelradius r.

Die Summe der Grundflächeninhalte ist ein Näherungswert für den Inhalt der Kugeloberfläche. Die Summe V* der Rauminhalte ist ein Näherungswert für das Kugelvolumen.

$V_{Kugel} \approx V^*$ mit $V^* = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$

$V^* = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_n) \cdot h$

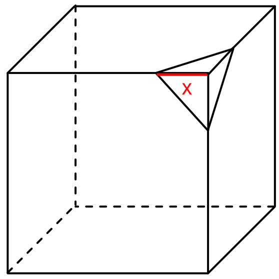
Bei Verfeinerung der Einteilung wird der Unterschied zwischen O und der Summe $(A_1 + A_2 + ... + A_n)$ immer geringer. V* nähert sich immer mehr dem Volumen der Kugel. Im Grenzfall gilt:

$V_{Kugel} = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r \Leftrightarrow \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r \Leftrightarrow 4r^2\pi = O$

Inhalt der Kugeloberfläche: $O = 4 r^2 \pi$

8.7. Übungsblatt: Geometrische Körper

Aufgabe 1



1.0 An allen Ecken eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 8$ cm werden Pyramiden mit den Seitenkanten der Länge x cm abgeschnitten (siehe Zeichnung).

1.1 Berechne das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $V(x) = \frac{4}{3} \cdot (384 - x^3)$ cm³]

1.2 Tabellarisiere V(x) für $x \in [0\,;\,4]$ mit $\Delta x = 0{,}5$ und zeichne den Graphen.

1.3 Welches Volumen hat der Restkörper bei maximalem Abschnitt?

1.4 Entnimm der Grafik aus 8.2 den Wert von x, für den das Volumen des Restkörpers achtmal so groß ist wie der des Abschnitts.

1.5 Für welchen Wert von x sind die Begrenzungsflächen des Restkörpers regelmäßige Achtecke?

Aufgabe 2

2.0 Gegeben ist ein 12 cm hoher Quader mit dem Quadrat ABCD als Grundfläche und der Grundkantenlänge $a = 4$ cm. Man erhält neue Quader, indem man die zwei parallelen Kanten [AB] und [CD] jeweils nach beiden Seiten um x cm verlängert, die Länge der anderen Grundkanten beibehält und die Höhe um 2x cm verkleinert.

2.1 Zeichne ein Schrägbild des ursprünglichen Quaders und des zu $x = 1$ gehörenden neuen Quaders.
$q = \frac{1}{2}$ $\omega = 30°$ Schrägbildachse: AB

2.2 Berechne das Volumen der Quader in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $V(x) = 16\,(-x^2 + 4x + 12)$ cm³]

2.3 Für welchen Wert von x ist das Quadervolumen 112 cm³?

2.4 Für welchen Wert von x ist das Quadervolumen größer als 192 cm³ (graphische und rechnerische Lösung)?

2.5 Für welchen Wert von x nimmt das Volumen einen Extremwert an?

Aufgabe 3

3.0 Die Diagonalen eines Drachenvierecks ABCD schneiden sich mit der Symmetrieachse AC im Punkt M. Das Drachenviereck ABCD ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS.
$\overline{AC} = 12$ cm $\overline{BD} = 8$ cm
$\overline{AM} = 4$ cm $\overline{MS} = 7$ cm

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen.
$q = \frac{1}{2}$ $\omega = 30^0$

3.2 Aus der Pyramide ABCDS entstehen neue Pyramiden ABC_nDS_n, indem man [AC] von C aus um x cm verkürzt und zugleich die Höhe [MS] über S hinaus um x cm verlängert. Zeichne die Pyramide ABC_1DS_1 für
$x = 2$ in das Schrägbild ein.

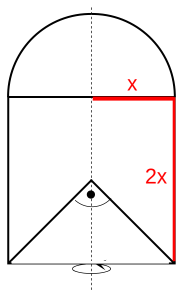
3.3 Stelle das Volumen V(x) der Pyramiden $ABC_n\,DS_n$ in Abhängigkeit von x dar.
[Ergebnis: $V(x) = -\frac{4}{3}\,(x^2 - 5x - 84)$ cm³]

3.4 Unter den Pyramiden hat die Pyramide ABC_0DS_0 das größte Volumen. Berechne V_{max}.

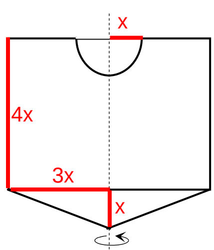
Aufgabe 4

4 Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Rotationskörpers in Abhängigkeit von x.

a)



b)



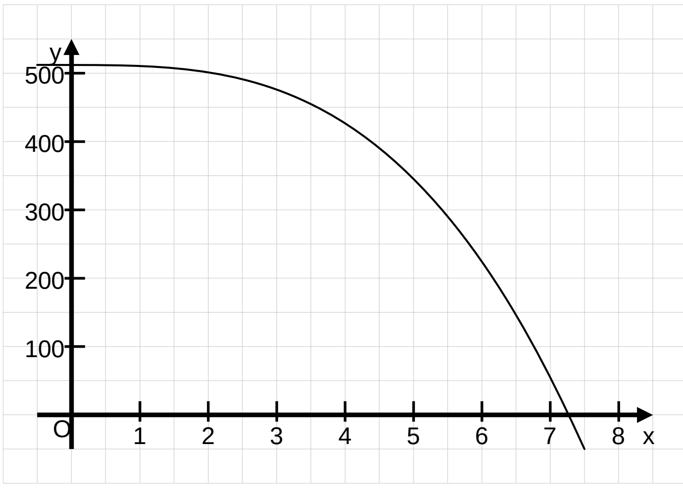
Lösungen

1.1 $V = V_W - 8 \cdot V_{Pyramide}$ $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x\ cm^3 = \frac{1}{6} \cdot x^3\ cm^3$

$V_{Rest(x)} = (512 - \frac{4}{3}x^3)\ cm^3 = \frac{4}{3}(384 - x^3)\ cm^3$

1.2

x	0	0,5	1
V(x)	512	511,8	510,7
x	1,5	2	2,5
V(x)	507,5	501,3	491,2
x	3	3,5	4
V(x)	476	454,8	426,7



1.3 $x = 4$ $V = 426{,}7\ cm^3$

1.4 $V_{Rest} = 8 \cdot V_{Pyramide}$

$x = 3{,}27$

$V = 465{,}38\ cm^3$

1.5 $8 - 2x = x\sqrt{2}$

$x = 2{,}34\ cm$

2.1 vgl. Zeichnung

2.2 $V(x) = (a + 2x) \cdot a \cdot (12\ cm - 2x)$

$V(x) = (4\ cm + 2x) \cdot 4\ cm \cdot (12\ cm - 2x) = 16\,(-x^2 + 4x + 12)\ cm^3$

$\mathbb{D} = [0; 6[$

2.3 $112\ cm^3 = 16\,(-x^2 + 4x + 12)\ cm^3 \quad \Leftrightarrow$

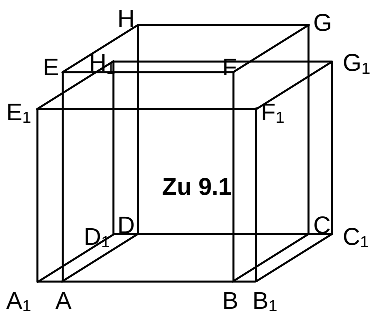
$-x^2 + 4x + 5 = 0 \qquad x = 5 \quad \vee \quad [x = -1]$

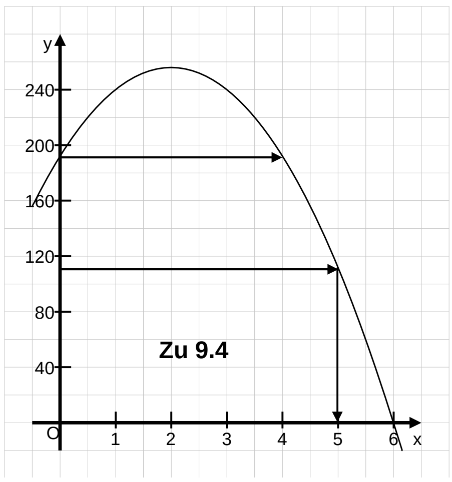
2.4 $16\,(-x^2 + 4x + 12)\ cm^3 > 192\ cm^3 \quad \Leftrightarrow$

$x \cdot (x - 4) < 0 \qquad 0 < x < 4$

2.5 $V(x) = [-16\,(x - 2)^2 + 256]\ cm^3$

$V_{max} = 256\ cm^3$ für $x = 2$





3.1 vgl. Zeichnung

3.2 vgl. Zeichnung

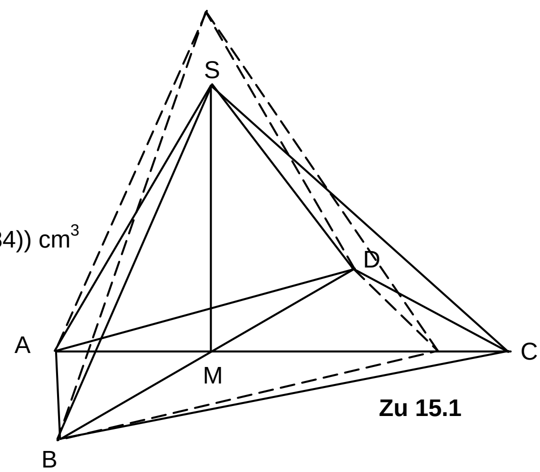
3.3 $A(x) = \frac{1}{2}\ \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

$A(x) = \frac{1}{2}\ (12 - x) \cdot 8\ cm^2 = 4\,(12 - x)\ cm^2$

$V(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (12 - x) \cdot (7 + x)\ cm^3 = \frac{4}{3}\ (x^2 - 5x - 84))\ cm^3$

3.4 $V(x) = [-\frac{4}{3}\ (x - 2{,}5)^2 + 120{,}33]\ cm^3$

$V_{max} = 120{,}33\ cm^3$ für $x = 2{,}5$



4 **a)** $r_{KU} = r_{Zyl} = r_{Ke} = x$ $h_{Zyl} = 2x$ $s_{Ke} = x\sqrt{2}$ $h_{Ke} = x$

$$O = \frac{1}{2} O_{KU} + M_{Zyl} + M_{Ke}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4x^2 \cdot \pi + 2x \cdot \pi \cdot 2x + x \cdot x \sqrt{2} \cdot \pi$$
$$= x^2 \pi \cdot (6 + \sqrt{2})$$
$$V = \frac{1}{2} V_{KU} + V_{Zyl} - V_{Ke}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^3 \cdot \pi + x^2 \cdot \pi \cdot 2x - \frac{1}{3} x^2 \cdot \pi \cdot x$$
$$= \frac{7}{3} \cdot \pi \cdot x^3$$

b) $r_{KU} = x$ $r_{Zyl} = r_{Ke} = 3x$ $h_{Zyl} = 4x$ $h_{Ke} = x$ $s_{Ke} = x\sqrt{10}$

$$O = r^2_{Zyl}\,\pi - r^2_{KU}\,\pi + \frac{1}{2} O_{KU} + M_{Zyl} + M_{Ke}$$
$$= (3x)^2\,\pi - x^2\,\pi + \frac{1}{2} \cdot 4x^2\,\pi + 2 \cdot 3x\,\pi\,4x + 3x \cdot x\sqrt{10} \cdot \pi$$
$$= x^2 \pi \cdot (34 + 3\sqrt{10})$$
$$V = V_{Zyl} - \frac{1}{2} V_{KU} + V_{Ke}$$
$$= (3x)^2\,\pi \cdot 4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^3 \cdot \pi + \frac{1}{3} \cdot (3x)^2 \cdot \pi \cdot x$$
$$= 38\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^3$$